



SURAT - TUGAS

Nomor : 160/AU.00.02/FTI-STD/I/2025

- Dasar :
1. Bahwa Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi telah mengatur dan mengelompokkan beberapa jenis buku ajar untuk melengkapi proses belajar dan mengajar diantaranya adalah modul.
 2. Bahwa modul digunakan untuk memudahkan mahasiswa mempelajari dan menguasai kompetensi yang diajarkan dengan baik dan mahasiswa dapat memahami pembelajaran secara mandiri.
 3. Bahwa modul harus dikemas secara sistematis, menarik, lengkap dengan cakupan materi dan evaluasi di dalamnya, maka untuk itu dipandang perlu menugaskan tenaga pendidik (dosen) untuk menyusun modul yang diperlukan dalam lingkup Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti.
 4. Bahwa agar penyusunan modul dapat diperoleh hasil yang maksimal, maka Dekan Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti dengan ini :

MENUGASKAN

K e p a d a : Dosen Tetap Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti

U n t u k : Menyusun modul yang diperlukan untuk melengkapi proses belajar dan mengajar pada Program Studi dalam lingkup Fakultas Teknologi Industri-Universitas Trisakti.

Periode : Tahun Akademik 2024/2025

Demikian surat tugas ini untuk dilaksanakan dengan sebaik-baiknya dan penuh tanggung jawab.

Jakarta, 9 Januari 2025

D e k a n,



Prof. Dr. Ir. Rianti Dewi Sulamet-Ariobimo, ST, M.Eng, IPM



**FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI
UNIVERSITAS TRISAKTI**

KAMPUS A, GEDUNG F&G LT. 4
Telp: 62-21-5663232 / 62-21-5605835 ext.8406,5605841
Email: fti@trisakti.ac.id

**SURAT TUGAS MELAKSANAKAN KEGIATAN
PENDIDIKAN DAN PENGAJARAN
Nomor: 001/AU.00.02/FTI-STD/IX/2024**

Dekan Fakultas TEKNOLOGI INDUSTRI Universitas Trisakti, dengan ini menugaskan kepada:

Nama : Dr. Syah Alam, S.Pd., M.T.
NIK : 3617/Usakti
NIDN : 0315048604
Jabatan Akademik : LK

Untuk melaksanakan Kegiatan Pendidikan dan Pengajaran pada:

Program Studi: TEKNIK ELEKTRO Jenjang: Sarjana

No.	Kode	Nama Matakuliah	sks	Kelas	Hari	Waktu	Ruang
1	IEM213	Variabel Kompleks	2.00	07	Kamis	18:00:00-19:40:00	OLR-FTI
2	IET6271	Menggambar Teknik	2.00	01	Kamis	10:00:00-11:40:00	AE601
3	IEF6302	Fisika Listrik Magnit	3.00	07	Selasa	17:00:00-19:30:00	OLR-FTI
4	IEM6307	Variabel Kompleks	3.00	01	Rabu	09:10:00-11:40:00	AE601

Program Studi: TEKNIK ELEKTRO Jenjang: Magister

No.	Kode	Nama Matakuliah	sks	Kelas	Hari	Waktu	Ruang
1	IEU8282	Seminar Tesis	2.00	01	Sabtu	09:00:00-10:40:00	AFG606A
2	IEU8580	Tesis	5.00	01	Sabtu	11:00:00-13:00:00	AFG605

Demikian untuk dilaksanakan dengan sebaik-baiknya

Jakarta, 02-09-2024

Dekan



ttd

Prof.Dr. Ir. Rianti Dewi Sulamet Ariobimo, ST., M.
Eng., IPM.
2289/Usakti

Tembusan Kepada Yth

1. Ketua Program Studi
2. Ka Subbag SDM
3. Arsip

**DIKTAT MATA KULIAH VARIABEL
KOMPLEKS (IEM213)**



Penyusun :
Syah Alam, S.Pd, MT, PhD

**JURUSAN TEKNIK ELEKTRO
UNIVERSITAS TRISAKTI
SEPTEMBER, 2024**

KATA PENGANTAR

Puji syukur penyusun haturkan kepada Tuhan Yang Maha Esa dengan penuh kerendahan hati karena hanya dengan berkat, rahmat dan ijin Nya-lah penyusun dapat merampungkan Diktat Mata Kuliah sebagai materi ajar pada mata kuliah Variabel Kompleks (Program S1 – Teknik Elektro). Isi dari diktat ini terkait dengan konsep bilangan kompleks, operasi bilangan kompleks, representasi bilangan kompleks dan penerapannya untuk bidang teknik elektro.

Dalam menyusun diktat ini penyusun mendapatkan banyak masukan dari beberapa rekan peneliti baik dari internal maupun eksternal kampus. Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada pimpinan Universitas dan Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti yang selalu memberikan dukungan dan motivasi untuk dapat terus berkarya. Semoga diktat ini memberikan manfaat bagi para mahasiswa dalam mempelajari konsep dasar variable kompleks.

Jakarta, September 2024

Syah Alam, S.Pd, MT, PhD

HALAMAN PENGESAHAN DIKTAT

Judul Diktat : Variabel Kompleks
Nama / Kode MK : Variabel Kompleks / IEM213
Jurusan : Teknik Elektro – S1
TA/Semester : 2024/2025 - Gasal
Jumlah Halaman : 127 halaman
Keterangan : Tidak diterbitkan, digunakan untuk kalangan sendiri

Jakarta, 04 September 2024

Disahkan oleh:

Ketua Jurusan



Dr. Ir. Lydia Sari, ST, MT

Disusun oleh:

Penyusun

A blue ink signature of Syah Alam, S.Pd, MT, PhD, written in a stylized cursive script.

Syah Alam, S.Pd, MT, PhD

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Halaman Pengesahan	ii
Daftar Isi	iii
Topik 1 : Konsep Dasar Bilangan Kompleks	1
Topik 2 : Operasi Bilangan Kompleks	11
Topik 3 : Representasi Garis dan Bentuk Polar	21
Topik 4 : Pangkat dan Akar Bilangan Kompleks	30
Topik 5 : Penerapan Bilangan Kompleks Pada Rangkaian Listrik Sumber	38
Topik 6 : Penerapan Bilangan Kompleks Pada Rangkaian Listrik RLC Sumber Arus Bolak Balik	51
Topik 7 : Limit dan Fungsi Turunan Kompleks	70
Topik 8 : Integral Fungsi Kompleks	86
Topik 9 : Integral Cauchy	101
Topik 10 : Deret Bilangan Kompleks	107
Topik 11 : Deret Pangkat Bilangan Kompleks	120
Topik 12 : Deret Taylor dan Mclaurin	128
Daftar Pustaka	129

Topik 1

Konsep dan Sistem Bilangan

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dari bilangan asli, bulat negative, rasional dan irasional dan bilangan kompleks
2. Mahasiswa memahami representasi grafis bilangan real.
3. Mahasiswa memahami sifat-sifat bilangan real dan bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan matematis menggunakan system bilangan real.

A. Konsep Sistem Bilangan

Sistem bilangan seperti yang kita kenal hingga saat ini merupakan hasil dari pengembangan secara bertahap seperti yang ditunjukkan dalam daftar berikut.

1. *Bilangan asli* 1, 2, 3, 4, . . . , juga disebut bilangan bulat positif, pertama kali digunakan dalam menghitung. Simbol bervariasi dengan waktu, misalnya yang digunakan bangsa Romawi I, II, III, IV. . . , jika a dan b adalah bilangan asli, jumlah $a+b$ dan perkalian dari $a \cdot b$, $(a)(b)$ atau ab juga disebut bilangan asli. Untuk alasan ini himpunan bilangan asli dikatakan tertutup di bawah operasi penjumlahan dan perkalian atau memenuhi sifat tertutup (closure) terhadap operasi ini
2. *Bilangan bulat negatif dan nol*, dilambangkan dengan -1 , -2 , -3 . . . dan 0 masing-masing muncul untuk memungkinkan solusi dari persamaan seperti $x + b = a$, dimana a dan b adalah setiap bilangan asli. Hal ini mengarah pada operasi pengurangan, atau invers penjumlahan, dan kita tulis dengan $x = a - b$, himpunan bilangan bulat positif, negatif dan nol disebut himpunan bilangan bulat dan tertutup di bawah operasi-operasi penjumlahan, perkalian, dan pengurangan.
3. *Bilangan rasional dan pecahan* seperti $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{7}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{5}$ muncul sebagai bagian yang memungkinkan penyelesaian persamaan berbentuk $bx = a$ untuk semua bilangan bulat a dan b di mana $b \neq 0$. Hal ini mengarah ke operasi pembagian atau invers perkalian dan ditulis dengan $x = \frac{a}{b}$ yang disebut hasil bagi a dan b , di mana a adalah pembilang dan b adalah penyebut. Himpunan bilangan bulat adalah himpunan bagian atau subset dari bilangan rasional, karena bilangan bulat sesuai dengan bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dimana

- $b = 1$. Himpunan bilangan rasional tertutup di bawah operasi-operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, selama pembagian dengan nol tidak dilakukan.
4. Bilangan irasional seperti $\sqrt{2} = 1.41423 \dots$ dan $\pi = 3.14159 \dots$ adalah bilangan yang tidak rasional, yang tidak dapat dinyatakan dengan $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Himpunan bilangan rasional dan irasional disebut dengan himpunan bilangan real. Diasumsikan bahwa mahasiswa sudah mengetahui dengan berbagai operasi pada bilangan real.

B. Representasi Grafis Bilangan Real

Sebelum penulis menguraikan konsep sistem bilangan real (R), terlebih dahulu marilah kita ingat kembali konsep himpunan (set). Himpunan mempunyai peranan sangat penting dalam memahami sistem bilangan real. Secara eksplisit himpunan didefinisikan sebagai sekumpulan objek, unsur atau sesuatu yang mempunyai ciri-ciri, kriteria dan syarat yang tertentu serta terdefinisi dengan jelas. Objek atau unsur sesuatu himpunan A dinamakan anggota atau elemen. Anggota suatu himpunan dinyatakan dengan $a, b, c, d, \dots$ atau $1, 2, 3, 4, \dots$ sedangkan nama himpunan dinyatakan dengan huruf kapital A, B, C, D dan seterusnya. Misal kita mendefinisikan suatu himpunan A dengan menyatakan secara jelas anggota-anggotanya yang terdiri dari a, b, c, d, e , himpunan A dapat dituliskan dengan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dengan masing-masing anggota himpunan A dipisahkan oleh tanda baca koma dan terdapat dua tanda kurung $\{ \}$. Jika himpunan A mempunyai anggota banyaknya tak hingga maka unsur-unsurnya tidak ditulis semuanya akan tetapi cukup dituliskan beberapa anggotanya dan titik-titik sebanyak 3 atau 5, Jika a adalah anggota himpunan A maka pernyataan tersebut ditulis dengan notasi $a \in A$ dan dibaca a anggota A . Jika a bukan anggota himpunan A , maka dituliskan $a \notin A$ dan dibaca a bukan anggota A . Jika suatu himpunan A tidak memiliki anggota, maka A disebut himpunan kosong, dan dinyatakan dengan notasi ϕ atau $\{ \}$.

Himpunan sebagai telah disebutkan di atas, dalam penulisannya dapat dilakukan dua metode, yaitu metode pencirian (notasi) dan metode perincian (tabulasi). Metode pencirian dilakukan dengan cara menuliskan syarat keanggotaan yang dimiliki oleh seluruh anggota suatu himpunan akan tetapi tidak dimiliki oleh unsur-unsur yang bukan anggota himpunan tersebut.

Contoh :

- 1) $A = \{y \mid y \text{ bilangan prima kurang dari } 20\}$
- 2) $B = \{x \mid x \text{ faktor ganjil dari } 21\}$
- 3) $C = \{x \mid x^2 < 1, x \text{ bilangan prima}\}$
- 4) $D = \{x \mid x \text{ faktor genap dari } 21\}$
- 5) $E = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \geq 0\}$
- 6) $F = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$

Metode perincian dilakukan dengan cara mendaftar seluruh anggota himpunan yang memenuhi syarat dan ketentuan yang diberikan dalam suatu himpunan.

- 1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 2) $B = \{\text{Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu}\}$
- 3) $C = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$
- 4) $D = \{\text{merah, kuning, hijau, biru}\}$
- 5) $E = \{0\}$
- 6) $F = \{\} = \phi$

Misal A dan B suatu himpunan, himpunan A disebut himpunan bagian himpunan B , ditulis dengan notasi $A \subset B$, jika setiap anggota A merupakan anggota B . Kiranya tidaklah sulit untuk dipahami bahwa $\phi \subset A$ untuk sebarang himpunan A . Jika setiap anggota himpunan anggota A juga merupakan anggota setiap himpunan B maka dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Selanjutnya untuk memudahkan para pembaca dalam memahami konsep sistem bilangan real berikut ini diberikan beberapa bilangan dan himpunan bilangan yang pada bab-bab selanjutnya dalam buku ini sering ditemukan. Bilangan dan himpunan bilangan tersebut adalah:

1. Himpunan bilangan asli (*Natural*)

Himpunan bilangan asli biasanya dinotasikan dengan N dan anggota-anggota bilangan asli adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... sehingga, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bilangan asli tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, artinya untuk setiap a, b bilangan asli maka $(a+b)$ dan $(a \cdot b)$ bilangan asli. Oleh karena itu, himpunan semua bilangan asli membentuk suatu sistem sistem bilangan asli.

2. Bilangan Cacah (whole)

Bilangan cacah biasanya dinotasikan dengan W dan anggota-anggota bilangan cacah adalah $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, sehingga $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bilangan cacah tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, artinya untuk setiap a, b bilangan cacah maka $(a+b)$ dan $(a \cdot b)$ bilangan cacah.

3. Sistem Bilangan Asli

Sistem bilangan asli bersama-sama dengan bilangan nol dan lawan dari bilangan bilangan asli membentuk system bilangan bulat, Bilangan bulat biasanya dinotasikan dengan Z yang anggota-anggotanya adalah $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, sehingga $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

4. Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan atau bilangan rasional (quotient) biasanya dinyatakan dengan Q . Bilangan rasional adalah bilangan yang secara umum dinyatakan dengan $Q = \frac{a}{b}$. $a, b \in Z$, $b \neq 0$.

Contoh :

1) $p = \frac{1}{3}$

2) $q = -\frac{2}{11}$

3) $r = \frac{22}{7}$

Bilangan-bilangan rasional di atas, dapat dinyatakan dalam bilangan-bilangan desimal, yaitu

1) $p = \frac{1}{3} = 0,33333333 \dots$

2) $q = -\frac{2}{11} = -0,285714285714285714 \dots$

3) $r = \frac{22}{7} = 3,1428571428571428$

Jika kita cermati lebih mendetail, bilangan-bilangan desimal sebagai mana tersebut di atas selalu berulang angka-angkanya, sehingga bilangan rasional juga disebut bilangan desimal berulang. Sebaliknya bilangan desimal berulang dapat dinyatakan sebagai bilangan rasional. Untuk menyatakan bentuk desimal menjadi bilangan rasional adalah dengan cara

melihat angka yang berulang pada bilangan tersebut. Jika terdapat 1 angka yang berulang maka kalikan bilangan dimaksud dengan 10^1 . Jika terdapat 2 angka yang berulang maka kalikan bilangan tersebut dengan 10^2 dan seterusnya. Selanjutnya cari selisih bilangan semula dengan bilangan yang baru. Dengan metode perhitungan sederhana akhirnya diperoleh bilangan rasional yang dimaksud. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh Soal :

Ubahlah bilangan desimal berikut ini menjadi bentuk rasional $Q = \frac{a}{b}$. $a, b \in \mathbb{Z}$

1. Tentukan bentuk rasional bilangan 0,12121212...

Jawab :

Bilangan 0,12121212... adalah bilangan desimal dengan 2 angka berulang yaitu angka 1 dan 2. Karena banyaknya angka yang berulang pada bilangan 0,12121212... adalah 2 , kalikan bilangan 0,12121212... dengan 10^2 .

Misal :

$$x = 0,12121212... \times 100$$

$$100 x = 12, 12121212...$$

Selanjutnya cari selisih bilangan semula dengan bilangan yang baru

$$100 x - x = 12, 12121212 - 0,12121212$$

$$99 x = 12$$

$$x = \frac{12}{99}$$

Sehingga bentuk rasional dari bilangan 0,12121212... adalah $\frac{12}{99}$

2. Tentukan bentuk rasional bilangan 1,41233333

Bilangan 1,41233333 adalah bilangan desimal dengan 1 angka berulang yaitu angka 3. Karena banyaknya angka yang berulang pada bilangan 1,41233333 adalah 1 , kalikan bilangan 0,12121212... dengan 10^1 .

Misal :

$$x = 1,41233333 \times 10$$

$$10 x = 14,12333333...$$

Selanjutnya cari selisih bilangan semula dengan bilangan yang baru

$$10x - x = 14,12333333 - 1,412333333$$

$$9x = 12,71$$

$$x = \frac{12,71}{9} = \frac{1271}{900}$$

Sehingga bentuk rasional dari bilangan 1,412333333... adalah $\frac{1271}{900}$

3. Tentukan bentuk rasional bilangan $-0,9826273273273$

Bilangan $-0,9826273273273...$ adalah bilangan desimal dengan 3 angka berulang yaitu angka 2,7 dan 3. Karena banyaknya angka yang berulang pada bilangan $-0,9826273273273...$ adalah 3, kalikan bilangan $-0,9826273273273...$ dengan 10^3 .

Misal :

$$x = -0,9826273273273... \times 1000$$

$$1000x = -982,5627327327$$

Selanjutnya cari selisih bilangan semula dengan bilangan yang baru

$$1000x - x = -982,5627327327 - (-0,9826273273273)$$

$$999x = -981,58017$$

$$x = -\frac{981,58017}{999} = -\frac{98158017}{99900}$$

Sehingga bentuk rasional dari bilangan $-0,9826273273273...$ adalah $-\frac{98158017}{99900}$

4. Tentukan bentuk rasional bilangan 0,0543154315431..

Bilangan 0,0543125431254312... adalah bilangan desimal dengan 4 angka berulang yaitu angka 5,4,3 dan 1. Karena banyaknya angka yang berulang pada bilangan 0,0543154315431... adalah 4, kalikan bilangan 0,0543154315431.. dengan 10^4 .

Misal :

$$x = 0,0543125431254312... \times 10000$$

$$10000x = 543,154315431...$$

Selanjutnya cari selisih bilangan semula dengan bilangan yang baru

$$10000x - x = 543,154315431 - 0,0543125431254312$$

$$9999x = 542,1$$

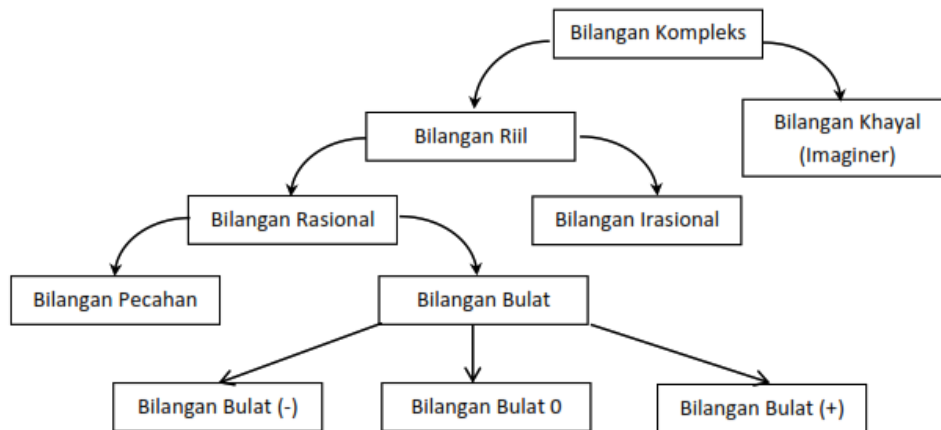
$$x = \frac{542,1}{9999} = \frac{5421}{9990}$$

Sehingga bentuk rasional dari bilangan 0,0543125431254312... adalah $\frac{5421}{9990}$

C. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks merupakan perluasan dari system bilangan real. Munculnya bilangan kompleks ini dikarenakan adanya beberapa permasalahan, misalnya penyelesaian dari persamaan $x^2 + 4 = 0$ yang bukan merupakan anggota dari bilangan real. Oleh karena itu diperlukan bilangan baru yang dinamakan bilangan kompleks

Untuk menjelaskan hal tersebut di atas, akan ditunjukkan skema bilangan sbb:



Gambar 1.1 Skema Sistem Bilangan Kompleks

Dari gambar di atas dapat kita lihat bahwa bilangan kompleks merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan riil dan bilangan imajiner. Bilangan kompleks dilambangkan dengan z , sehingga:

$$z = x + yi$$

dimana $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $b \neq 0$ dan i merupakan satuan khayal bersifat $i^2 = -1$

Definisi :

Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari $x + yi$, dimana $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $y \neq 0$ dan i adalah satuan khayal/imajiner bersifat $i^2 = -1$

Himpunan bilangan kompleks ($\mathbb{C}$) = $\{z / z = x + yi, \text{ dengan } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \text{ dan } i^2 = -1\}$

Selanjutnya, x di namakan bagian riil dari z dan y dinamakan bagian khayal dari z yang berturut-turut dinyatakan dengan $\text{Re}(z)$ dan $\text{Im}(z)$.

D. Sifat Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks memiliki sifat antara lain :

1. Jika $\text{Re}(z) = 0$ dan $\text{Im}(z) \neq 0$, maka bilangan kompleks z disebut bilangan imajiner murni.
2. Jika $\text{Re}(z) = 0$ dan $\text{Im}(z) = 1$, maka bilangan kompleks z disebut satuan khayal/imajiner.
3. Jika $\text{Re}(z) \neq 0$ dan $\text{Im}(z) = 0$, maka bilangan kompleks z merupakan bilangan riil.
4. Kesamaan bilangan kompleks,

Misalkan $z_1 = x_1 + y_1i$ dan $z_2 = x_2 + y_2i$

$z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

E. Konjugate bilangan Kompleks

Konjugate kompleks atau secara singkat conjugate adalah suatu bilangan kompleks dimana $x + yi$ adalah $x - yi$. Konjugate bilangan bilangan kompleks z sering diindikasikan oleh $\bar{z}$ atau z^* .

Contoh soal :

$$1. \overline{2 + 5i} = 2 - 5i$$

$$2. \overline{\frac{5-9i}{4}} = \frac{5+9i}{4} = \frac{5}{4} + \frac{9i}{4}$$

$$3. \overline{(3-i)(2+2i)} = \overline{(6 + 6i - 2i - 2i^2)} = \overline{(6 + 6i - 2i - 2(-1))} = \overline{(6 + 6i - 2i + 2)} = \overline{8 - 4i} = 8 + 4i$$

F. Harga Besaran Skalar pada bilangan kompleks

Bentuk umum bilangan kompleks adalah $z = x + yi$, dimana x adalah bilangan real dan y adalah bilangan imajiner. Cara untuk mendapatkan besaran skalar / nilai absolut / modulus pada bilangan kompleks adalah :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Contoh soal :

1. $Z_1 = 3 - i4$

Maka nilai $|Z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

2. $Z_2 = -3 + i4$

Maka nilai $|Z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

3. $Z_3 = -4 + i5$

Maka nilai $|Z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = 6.40$



EVALUASI

1. Jelaskan konsep dari system bilangan :
 - a. Bilangan Asli
 - b. Bilangan bulat negatif dan nol
 - c. Bilangan Rasional
 - d. Bilangan Irrasional
2. Berikan contoh metode metode pencirian (notasi) dan metode perincian (tabulasi) pada bilangan real !
3. Tentukan bentuk rasional dari bilangan dibawah ini :
 - a. $0,14523232323\dots$
 - b. $5,76978978979878\dots$
 - c. $0.023543154315431\dots$
4. Jelaskan konsep dasar dari system bilangan kompleks !
5. Hitunglah nilai konjugasi dari bilangan kompleks dibawah ini
 - a. $\overline{5 + 10i}$
 - b. $\overline{\frac{10-12i}{5}}$
 - c. $\overline{(3 - 2i)(4+5i)}$
6. Hitunglah modulus dari bilang kompleks dibawah ini :
 - a. $Y_1 = 15 - i3$
 - b. $Y_2 = -8 + i4$
 - c. $Y_3 = -9 + i7$

Topik 2

Operasi Dasar Bilangan Kompleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dari operasi dasar pada bilangan kompleks meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian
2. Mahasiswa memahami metode penyelesaian aljabar pada bilangan kompleks
3. Mahasiswa memahami sifat-sifat aljabar bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan matematis operasi dasar menggunakan system bilangan kompleks

A. Operasi Dasar Bilangan Kompleks

Operasi yang ditunjukkan pada bilangan kompleks juga berlaku seperti pada Aljabar. Operasi pada bilangan kompleks meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Pada operasi bilangan kompleks kita dapat memprosesnya seperti aljabar dari bilangan-bilangan asli dan mengganti i^2 dengan -1 sehingga diperoleh hasil sebagai operasinya. Jika Z_1 , Z_2 dan Z_3 adalah bilangan kompleks, maka berlaku sifat-sifat berikut ini :

1. $Z_1 + Z_2 \in \mathbb{C}$ dan $Z_1 \cdot Z_2 \in \mathbb{C}$ (sifat tertutup)
2. Ada $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$, sehingga $z + 0 = z$ (0 elemen netral penjumlahan)
3. Ada $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$, sehingga $z \cdot 1 = z$ (1 elemen netral perkalian)
4. Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ada z^{-1} sehingga $z \cdot z^{-1} = 1$
5. Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ada $-z = -x - iy$ sehingga $z + (-z) = 0$
6. Hukum komutatif : $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$
7. Hukum asosiatif : $Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$, $Z_1 (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3$
8. Hukum distributif : $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$
9. `Hukum kesekawanan (konjugat) : Jika $z = x + yi$, maka konjugat $\bar{z} = x - yi$
 - a. $\overline{\bar{z}} = z$
 - b. Konjugat $(Z_1 + Z_2) = \text{konj} \{(X_1 + Y_1.i) + (X_2 + Y_2.i)\}$
$$= \text{konj} \{(X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2) i\}$$
$$= (X_1 + X_2) - (Y_1 + Y_2) i = (X_1 - Y_2) + (Y_1 - X_2) i$$
$$= \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$
 - c. Konjugat $(z_1 - z_2) = \text{konj} \{(X_1 + Y_1.i) - (X_2 + Y_2.i)\}$

$$\begin{aligned} &= \text{konj} \{ (X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2)i \} \\ &= (X_1 - X_2) - (Y_1 - Y_2)i = (X_1 - Y_1.i) - (X_2 - Y_2.i) \\ &= \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 \end{aligned}$$

d. Konjugat $\frac{(Z_1)}{(Z_2)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$ dimana $\bar{Z}_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} &= \text{konj} \left(\frac{x_1 + y_1.i}{x_2 + y_2.i} \right) = \text{konj} \left(\frac{x_1 + y_1.i}{x_2 + y_2.i} \times \frac{x_2 - y_2.i}{x_2 - y_2.i} \right) \\ &= \text{kjt} \left\{ \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + x_2y_1.i - x_1y_2.i}{x_2^2 + y_2^2} \right\} = \text{kjt} \left\{ \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2).i}{x_2^2 + y_2^2} \right\} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{(x_2y_1 - x_1y_2).i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - x_2y_1.i + x_1y_2.i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 - y_1.i)(x_2 + y_2.i)}{(x_2 + y_2.i)(x_2 - y_2.i)} = \frac{(x_1 - y_1.i)}{(x_2 - y_2.i)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \end{aligned}$$

e. $z + \bar{z} = 2x$

f. $z - \bar{z} = 2yi$

g. $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

10. $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{x + y.i} = \frac{1}{x + y.i} \times \frac{x - y.i}{x - y.i} = \frac{x - y.i}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot i$

11. $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$

B. Operasi Penjumlahan

Misal $Z_1 = (a + bi)$ dan $Z_2 = (c + di)$, dalam operasi penjumlahan metode yang digunakan adalah menjumlahkan masing-masing bilangan secara terpisah yaitu bilangan riil dan bilangan imajineranya.

$$Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + bi + c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Contoh Soal :

a. $(4 - 2i) + (5 - 3i) = (4 - 2i + 5 - 3i) = (4 + 5) + (-2 + -3)i = 9 - 5i$

b. $3(2 + 3i) + 3(4 - 4i) = (6 + 9i + 12 - 12i) = (6 + 12) + (9 + -12)i = 18 - 3i$

c. $(8 + 5i) + (2 - 7i) + (6 + 4i) = (8 + 2 + 6) + (5 - 7 + 4)i = 16 + 2i$

C. Operasi Pengurangan

Misal $Z_1 = (a + bi)$ dan $Z_2 = (c + di)$, dalam operasi pengurangan metode yang digunakan adalah mengurangkan masing-masing bilangan secara terpisah yaitu bilangan riil dan bilangan imajineranya

$$Z_1 - Z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a + bi - c - di) = (a - c) + (b - d)i$$

Contoh Soal :

- a. $3(4 - 3i) - 2(5 - 3i) = (12 - 9i) - (10 - 6i) = (12 - 10) + (-9 + 6)i = 2 + 3i$
- b. $3(-2 + 3i) - 3(4 + 4i) = (-6 + 9i) - (12 + 12i) = (-6 - 12) + (9 - 12)i = -18 - 3i$
- c. $2(8 + 5i) - 3(2 - 7i) - 2(6 + 4i) = (16 + 10i) - (6 - 21i) - (12 + 8i)$
 $= (16 - 6 - 12) + (10 - 21 + 8)i = -2 - 3i$

D. Operasi Perkalian

Misal $Z_1 = (a + bi)$ dan $Z_2 = (c + di)$, dalam operasi perkalian metode yang digunakan adalah mengalikan masing-masing bilangan riil dan imajiner lalu menyelesaikan persamaan menggunakan metode penjumlahan atau pengurangan. Perlu diingat bahwa nilai $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + a di + bi c + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Contoh Soal :

- a. $(2 + 3i) \cdot (4 - 4i) = (8 - 8i + 12i - 12i^2) = (8 + 3i - 12(-1)) = (8 + 12) + 3i = 20 + 3i$
- b. $(-7 - 5i) \cdot (2 - 6i) = (-14 + 42i - 10i + 30i^2) = (-14 + 32i + 30(-1)) = -44 + 32i$
- c. $(3 - i) \cdot (3 + 5i) \cdot (4 - 2i) = (9 + 15i - 3i - 5i^2) \cdot (4 - 2i)$
 $= (14 + 12i) \cdot (4 - 2i)$
 $= 56 - 28i + 16i - 24i^2$
 $= 80 - 12i$

E. Operasi Pembagian

Misal $Z_1 = (a + bi)$ dan $Z_2 = (c + di)$, dalam operasi perkalian metode yang digunakan adalah mengalikan masing-masing bilangan riil dan imajiner dengan invers dari bilangan kompleks penyebutnya $(c - di)$ lalu menyelesaikan persamaan menggunakan metode perkalian, penjumlahan atau pengurangan. Perlu diingat bahwa nilai $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \\ \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} \end{aligned}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c^2 + c \cdot di + c \cdot di - d^2 i^2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(ac + bd) \cdot (bc - ad)i}{(c^2 + d^2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

Contoh Soal :

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{(4 - 2i)}{(5 + 3i)} &= \frac{(4 - 2i)}{(5 + 3i)} \cdot \frac{(5 - 3i)}{(5 - 3i)} = \frac{(20 - 12i - 10i + 6i^2)}{(25 - 15i + 15i - 9i^2)} = \frac{(18 - 22i)}{(25 - 9i^2)} = \frac{(18 - 22i)}{(25 - 9i^2)} \\ &= \frac{(18 - 22i)}{(34)} = \frac{(18)}{(34)} - \frac{(22)}{(34)} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{(-5 + 3i)}{(10 - 6i)} &= \frac{(-5 + 3i)}{(10 - 6i)} \cdot \frac{(10 + 6i)}{(10 + 6i)} = \frac{(-50 + -30i + 40i + 24i^2)}{(100 + 60i - 60i - 36i^2)} = \frac{(-74 - 10i)}{(100 - 36i^2)} = \frac{(-74 - 10i)}{(100 + 36)} \\ &= \frac{(-74 - 10i)}{(136)} = \frac{(-74)}{(136)} - \frac{(10)}{(136)} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (2 - 5i)^2 \cdot \left\{ \frac{4}{2-i} + \frac{3-i}{2+i} \right\} &= (2 - 5i) \cdot (2 - 5i) \cdot \left\{ \frac{4(2+i) + (3-i)(2-i)}{5} \right\} \\ &= 4 - 10i - 10i + 5i^2 \cdot \left\{ \frac{(8+4i) + (6-3i-2i+i^2)}{5} \right\} \\ &= (-1 - 20i) \cdot \left\{ \frac{(8+4i) + (5-5i)}{5} \right\} \\ &= (-1 - 20i) \cdot \left\{ \frac{(60-20i)}{5} \right\} \\ &= \left\{ \frac{(-1-20i) \cdot (60-20i)}{5} \right\} \\ &= \left\{ \frac{(-60-20i-1200i+400i^2)}{5} \right\} = \frac{(-460-1220i)}{5} \end{aligned}$$

F. Nilai Mutlak

Nilai Mutlak atau modulus dari suatu bilangan kompleks $Z_1 = (a + bi)$ dinotasikan $|Z|$ dan didefinisikan sebagai $|Z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Contoh Soal :

$$\text{a. } |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\text{b. } |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{c. } \left| \frac{1}{3} + \frac{2}{6} i \right| = \sqrt{\frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{6^2}} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{36}} = \sqrt{\frac{2}{9}}$$

Jika $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \dots, Z_m$ adalah bilangan kompleks, berlaku sifat-sifat berikut :

1. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ atau $|z_1 z_2 \dots z_m| = |z_1| |z_2| \dots |z_m|$

Bukti

Misal $z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\Leftrightarrow |z_1 z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 c^2 - 2acbd + b^2 d^2) + (a^2 d^2 + abcd + b^2 c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

$$\Leftrightarrow |z_1| |z_2|$$

2. $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, jika $z_2 \neq 0$

Bukti

Dari operasi pembagian dua bilangan kompleks diperoleh:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}, \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 c^2 + 2abcd + b^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd + a^2 d^2}{(c^2 + d^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + b^2 c^2 + a^2 d^2}}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Dilain pihak

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} \cdot \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2} \quad \text{Sehingga dapat}$$

disimpulakan bahwa $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, asalkan $z_2 \neq 0$

3. a. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, b. $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, c. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

(a). Penyelesaian

Misal $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ dan kita harus menunjukkan bahwa

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Kuadratkan Persamaan kedua diatas, akan benar jika

$$(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

jika $x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$

atau jika (Kuadratkan Kedua persamaan lagi)

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

Atau $2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$

Tetapi ini sama untuk $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ jika benar.

Balikkan langkah –langkah yang reversibel.

Contoh soal

1) Jika $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 - 2i, z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, hitunglah

a) $|3z_1 - 4z_2| = |3(2+i) - 4(3-2i)| = |6+3i-12+8i| = |-6+11i| = \sqrt{(-6)^2 + 11^2} = \sqrt{157}$

b) $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 = (2+i)^3 - 3(2+i)^2 + 4(2+i) - 8$
 $= (2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3) - 3(4 + 4i + i^2) + (8 + 4i) - 8$
 $= (8 + 12i + 6i^2 + i^3) - (12 + 12i + 3i^2) + (8 + 4i) - 8$

$$\begin{aligned} &= (8 + 12i - 6 - i) - (12 + 12i - 3) + (8 + 4i) - 8 \\ &= (8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 8 + 4i - 8) \\ &= -7 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\overline{z_3}\right)^4 &= \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2 \cdot 2} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left| \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right| &= \left| \frac{2(3 - 2i) + (2 + i) - 5 - i}{2(z + i) - (3 - 2i) + 3 - i} \right| = \left| \frac{3 - 4i}{4 + 3i} \right| = \left| \frac{3 - 4i}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i} \right| \\ &= \left| \frac{3 - 4i}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i} \right| = \left| \frac{12 - 9i - 16i + 12i^2}{16 + 9} \right| = \left| \frac{0 - 25i}{25} \right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \end{aligned}$$

2) Tentukan bilangan real x dan y sedemikian sehingga $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$

Jawab

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$$

$$\Leftrightarrow (3x + 5y) + (2y - x)i = 7 + 5i$$

Sehingga diperoleh dua persamaan

$$3x + 5y = 7$$

$$-x + 2y = 5$$

Dengan menggunakan metode substitusi diperoleh $x = -1, y = 2$

3) Tunjukkan kesamaan di bawah ini:

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Bukti

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

Karena

$$z_1 = a + bi \text{ sehingga } \overline{z_1} = a - bi$$

$$z_2 = c + di \text{ sehingga } \overline{z_2} = c - di$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\text{Tampak bahwa sehingga } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

b) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Bukti

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(a + bi)(c + di)| = |ac + adi + bci + bdi^2| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{(a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2) + (a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)} \sqrt{(c^2 + d^2)} \\ &= |z_1| |z_2| \end{aligned}$$



EVALUASI

1. Selesaikanlah menggunakan operasional bilangan kompleks persoalan dibawah ini :
 - a. $(5 + 4i) \cdot (3 - 4i)$
 - b. $(4 + 2i) + ((-3 + 4i) + (7 - 3i))$
 - c. $\frac{3-4i}{2-7i}$
 - d. $\frac{3i}{i-2} + \frac{12i}{i+2}$
 - e. $\frac{3i}{(4-2i)-(2+i)}$
2. Jika $Z_1 = 5 - 2i$ dan $Z_2 = 6 + 7i$, hitunglah :
 - a. $|Z_1 + Z_2|$
 - b. $|Z_1 - Z_2|$
 - c. $Z_1 - Z_2$
 - d. $|2Z_1 + 4Z_2 - 4|$
 - e. $|\overline{Z_1} + \overline{Z_2}|$
3. Jelaskan sifat-sifat dari aljabar pada bilangan kompleks !
4. Jelaskan apa yang dimaksud dengan nilai konjugat pada bilangan kompleks, berikan contoh !

Topik 3

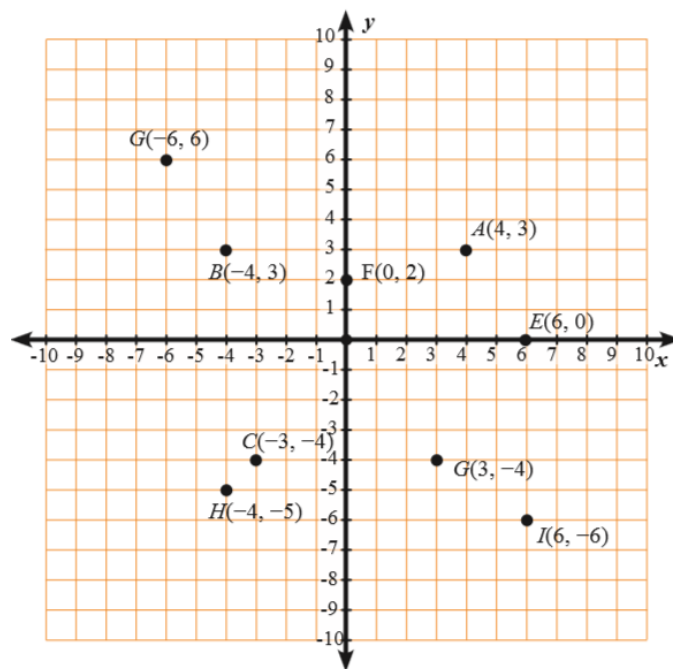
Representasi Grafis dan Bentuk Polar dari Bilangan Kompleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dari representasi grafis bilangan kompleks
2. Mahasiswa mampu menggambarkan grafis pada bilangan kompleks
3. Mahasiswa memahami analisis bilangan kompleks menggunakan representasi grafis
4. Mahasiswa memahami bentuk polar bilangan kompleks

A. Representasi Grafis pada Bilangan Kompleks

Jika skala-skala bilangan real dipilih pada dua sumbu yang saling tegak lurus, yaitu XOX' dan YOY' (selanjutnya disebut sumbu x dan sumbu y secara berturut-turut) seperti pada gambar 3.1 dibawah ini.



Gambar 3.1 Representasi Grafis Sumbu X dan Y

Selanjutnya kita dapat meletakkan sebarang titik pada bidang dengan cara menarik garis yang sejajar masing-masing dan kedua garis dapat bertemu di satu titik, titik tersebut dinamakan koordinat tegak lurus dan dinotasikan dengan (x,y) . Pada gambar di atas dipilih titik A $(4,3)$.

Karena suatu bilangan kompleks $z = x + yi$ dapat dipandang sebagai pasangan berurutan bilangan real sehingga kita dapat merepresentasikan bilangan kompleks dengan suatu titik pada bidang xy . Bidang xy sebagai representasi bilangan kompleks dinamakan bidang

komplek atau argand. Bilangan kompleks yang ditunjukkan titik A (4,3) pada gambar 3.1 dipandang sebagai $4 + 3i$. Setiap bilangan kompleks berkorespondensi satu dan hanya satu dengan setiap titik pada bidang, sebaliknya setiap satu titik pada bidang berkorespondensi dengan satu dan hanya satu bilangan kompleks. Karena hal ini sering dan biasa kita menyatakan bilang kompleks z , sebagai titik z .

Kadang-kadang kita dapat menyatakan sumbu x dan sumbu y sebagai sumbu real dan sumbu imajiner secara berturut-turut dan bidangnya dinamakan bidang z . Jarak antara dua titik $Z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $Z_2 = x_2 + y_2 i$ pada bidang kompleks diberikan oleh

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Contoh soal :

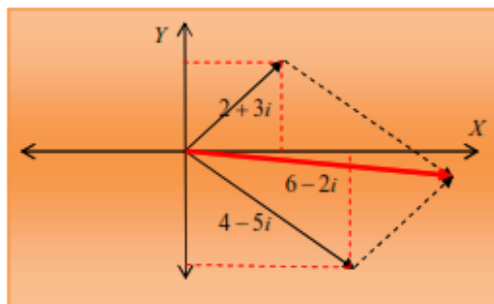
1. Bentuklah operasi-operasi berikut secara analitik dan grafik.

a) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$

Secara analitis

$$(2 + 3i) + (4 - 5i) = 2 + 3i + 4 - 5i = 2 + 4 + (3 - 5)i = 6 - 2i$$

Secara grafis

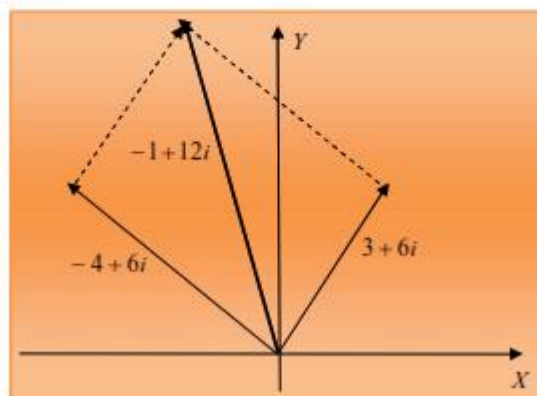


b) $3(1 + 2i) - 2(2 - 3i)$

Secara analitis

$$3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = (3 + 6i) - (4 - 6i) = (3 - 4) + (6 + 6)i = -1 + 12i$$

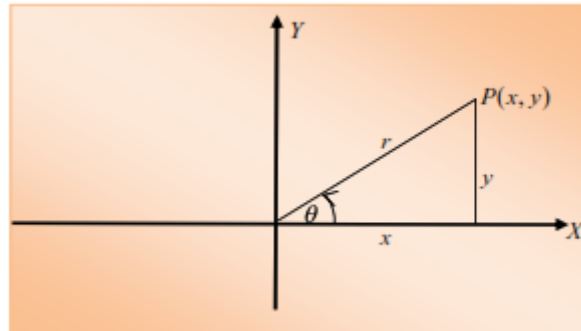
Secara grafis



B. Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Jika P adalah titik pada bidang kompleks yang berkorepondensi dengan bilangan kompleks (x,y) atau $x + y i$ maka berdasarkan gambar 3.2 kita dapat melihat bahwa:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$



Gambar 3.1 Koordinat titik P dengan r , x dan y

Karena $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + yi|$ adalah modulus atau nilai mutlak dari bilangan kompleks $z = x + iy$, (dinotasikan dengan $\text{mod } z$ atau $|z|$); dan θ disebut *amplitude* atau *argument* dari $z = x + iy$ (dinotasikan dengan $\arg z$), adalah sudut yang dibuat oleh garis OP dengan sumbu x positif.

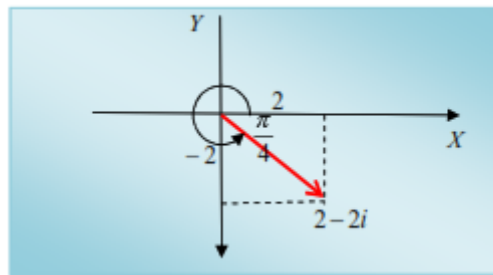
$$\text{Oleh karena itu, } z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Yang disebut bentuk polar dari bilangan kompleks, r dan θ disebut koordinat *polar*. Kadang-kadang dengan mudah untuk menulis dan menyebut sebagai singkatan *cis* θ untuk $\cos \theta + i \sin \theta$.

Untuk suatu bilangan kompleks $z \neq 0$ terdapat korespondensi satu dan hanya satu terdapat hanya satu nilai yang sesuai dengan θ untuk $0 \leq \theta < 2\pi$. Namun, interval lain dari panjang 2π , misalnya $-\pi < \theta \leq \pi$, dapat digunakan. Setiap pilihan utama, diputuskan terlebih dahulu, disebut jarak utama, dan nilai θ disebut nilai utamanya.

Contoh

1. Nyatakan setiap titik dalam koordinat tegak lurus berikut dalam bentuk polar
 - a. $2 - 2i$

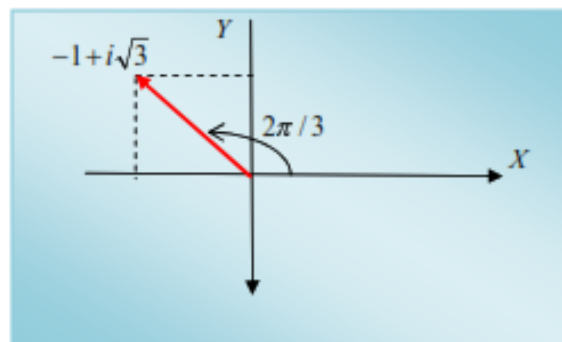


Karena $z = 2 - 2i$ maka $|z| = r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Karena titiknya terletak pada kuadran ke-4 maka $\cos \theta = -\frac{2}{2} = -1 = 180^\circ = \pi$

Sehingga $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = 2\sqrt{2} \text{ cis}(\pi)$

b. $-1 + i\sqrt{3}$

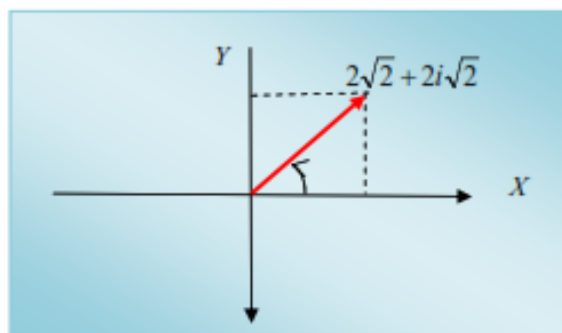


Karena $z = -1 + i\sqrt{3}$ maka $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Karena titiknya terletak pada kuadran ke-2 maka $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 120^\circ = 2\pi/3$

Sehingga $z = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = 2 \text{ cis}(2\pi/3)$

c. $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

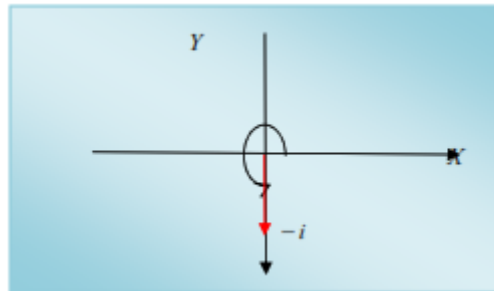


$$z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \text{ maka } |z| = r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Karena titiknya terletak pada kuadran ke-1 maka } \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \pi/4$$

$$\text{Sehingga } z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 4(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = 4 \operatorname{cis}(\pi/4)$$

d. $-i$

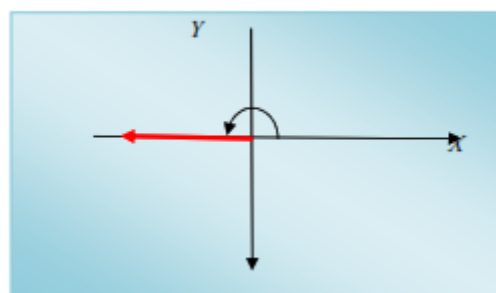


$$z = -i \text{ maka } |z| = r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Karena titiknya terletak pada sumbu -Y maka } \cos \theta = \frac{0}{-1} = 0 = 270^\circ = 3\pi/2$$

$$\text{Sehingga } z = -i = 1(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2) = \operatorname{cis}(3\pi/2)$$

e. -4

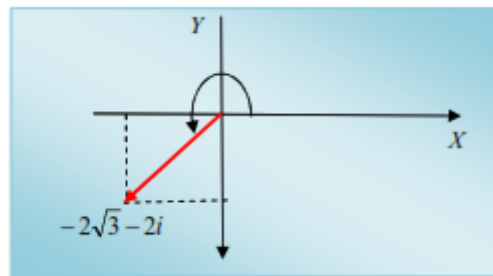


$$z = -4 \text{ maka } |z| = r = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Karena titiknya terletak pada sumbu -X maka } \cos \theta = \frac{-4}{4} = -1 = 180^\circ = \pi$$

$$\text{Sehingga } z = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = 4 \operatorname{cis}(\pi)$$

f. $-2\sqrt{3} - 2i$



$$z = -2\sqrt{3} - 2i \text{ maka } |z| = r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Karena titiknya terletak pada kuadran 3 maka $\cos \theta = \frac{-2}{4} = 210^\circ$

Sehingga $z = -2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

2. Nyatakanlah bentuk polar berikut dalam koordinat tegak lurus

a. $6(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

Karena $\theta = 135^\circ = 3\pi/4$ berarti $x < 0, y > 0$

dan diperoleh

$$x = 6 \cos 135^\circ = 6(-1/2\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$$

$$y = 6 \sin 135^\circ = 6(1/2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$$

Sehingga $6(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 6 \operatorname{cis} 135^\circ = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

Catatan

$$6(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 6e^{3\pi i/4}$$

b. $12 \operatorname{cis} 90^\circ$

Karena $\theta = 90^\circ = \pi/2$ berarti $x = 0, y > 0$

dan diperoleh

$$x = 12 \cos 90^\circ = 12(0) = 0$$

$$y = 12 \sin 90^\circ = 12(1) = 12$$

Sehingga $12(\operatorname{cis} 90^\circ) = (0, 12)$

d. $5e^{7\pi i/6}$

Karena $\theta = 7\pi/6 = 210^\circ$ berarti $x < 0, y < 0$

dan diperoleh

$$x = 5 \cos 7\pi/6 = 5(-1/2\sqrt{3}) = -5/2\sqrt{3}$$

$$y = 5 \sin 7\pi/6 = 5(-1/2) = -5/2$$

$$\text{Sehingga } 5e^{7\pi i/6} = (-5/2\sqrt{3}, -5/2)$$

e. $3e^{-2\pi i/3}$

Karena $\theta = -2\pi/3 = -60^\circ$ berarti $x > 0, y < 0$

dan diperoleh

$$x = 3 \cos(-2\pi/3) = 3(-1/2\sqrt{3}) = -3/2\sqrt{3}$$

$$y = 3 \sin(-2\pi/3) = 3(-1/2) = -3/2$$

$$\text{Sehingga } 3e^{-2\pi i/3} = (-3/2\sqrt{3}, -3/2)$$

c. $2e^{5\pi i/4}$

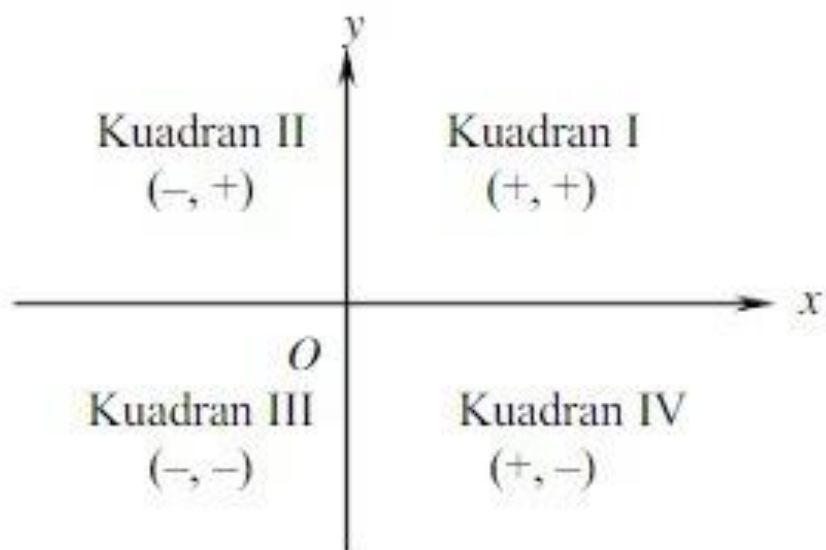
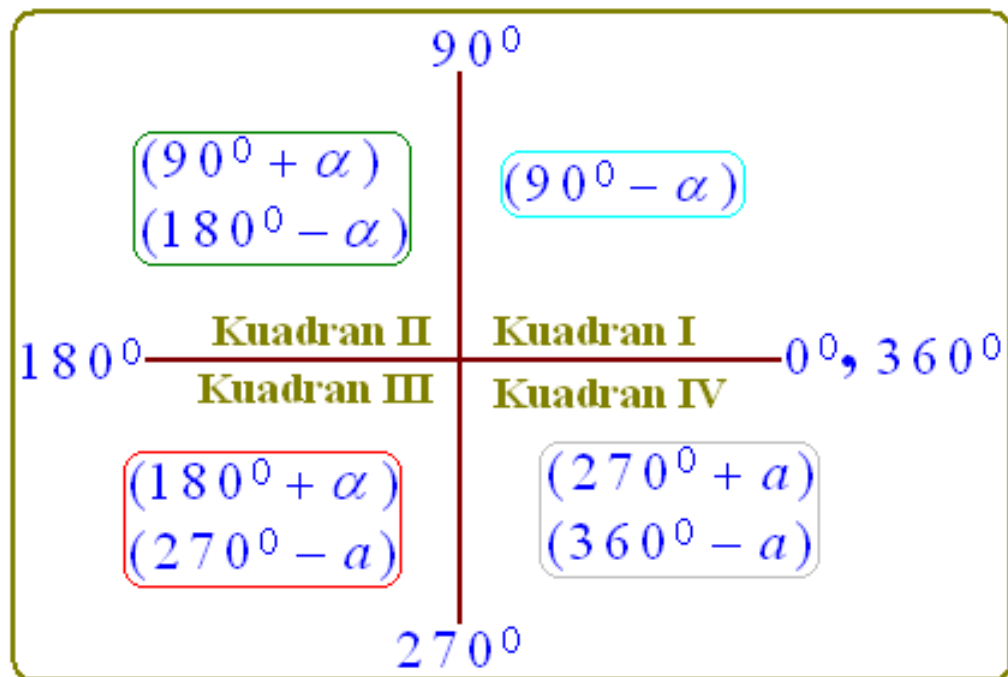
Karena $\theta = 5\pi/4 = 225^\circ$ berarti $x < 0, y < 0$

dan diperoleh

$$x = 2 \cos 5\pi/4 = 2(-1/2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$y = 2 \sin 5\pi/4 = 2(-1/2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$\text{Sehingga } 2e^{5\pi i/4} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$



EVALUASI

1. Selesaikan soal dibawah ini !

Jika $z_1 = 4 - 3i$ dan $z_2 = -1 + 2i$, buatlah grafik dan analitik:

(a). $|z_1 + z_2|$

(b). $|z_1 - z_2|$

(b). $z_1 - z_2$

(d). $|2z_1 - 3z_2 - 2|$

2. Tunjukkan bentuk polar dari :

a. $-3 - 4i$

b. $1 - 2i$

c. $\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

d. $2 + 2\sqrt{3}i$

e. $-5 + 5i$

3. Buatlah grafik untuk titik yang dinyatakan oleh :

a. $6\cos(240^\circ) + i\sin 240^\circ$

b. $\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}$

c. $2\sqrt{2}\left(\text{cis}\frac{7\pi}{4}\right)$

d. $4e^{3\pi i/5}$

e. $2e^{-\pi i/4}$

Topik 4

Pangkat dan Akar Bilangan Kompleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dari pangkat dan akar pada bilangan kompleks
2. Mahasiswa mampu memahami teorema De Moivre
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan matematis terkait pangkat dan akar pada bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menggunakan teorema De Moivre untuk penyelesaian terkait akar dan pangkat pada bilangan kompleks

A. Perkalian dan Pemangkatan Bilangan Kompleks

Telah kita ketahui bahwa bilangan kompleks dalam bentuk kutub adalah :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Jika $Z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ & $Z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, maka kita peroleh hasil perkalian keduanya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) i) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2) i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{r_2(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2^2 (\cos^2 \theta_2 + i \sin \theta_2 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - (-1) \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2^2 (\cos^2 \theta_2 - (-1) \sin^2 \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)}{r_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))}{r_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

Bentuk generalisasi dari persamaan dibawah ini adalah :

$$r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \{ \cos(\theta_1 + \theta_2 \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 \dots + \theta_n) \}$$

$$z \cdot z \cdot z \dots z = z^n = \{ r(\cos \theta + i \sin \theta) \}^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Bentuk generalisasi ini kita sebut dengan **teorema de Moivre**.

Contoh Soal

1. Buktikan teorema de Moivre $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ dengan $n \in \mathbb{C}$ sebarang bilangan bulat positif

Bukti

Kita gunakan prinsip induksi matematika

Untuk $n = 1$ maka diperoleh $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos \theta + i \sin n\theta)^1 = \cos \theta + i \sin \theta$

Dianggap benar untuk $n = k$, sehingga

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos \theta + i \sin n\theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$$

Selanjutnya akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} = (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

Dengan demikian benar untuk

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Hasil di atas ekuivalen $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

2. Hitunglah perkalian bilangan kompleks dibawah ini !

$$(3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ))(4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ))$$

$$(3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ))(4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)) = 3 \cdot 4 (\cos(40^\circ + 80^\circ) + i \sin(40^\circ + 80^\circ))$$

$$= 12(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$= 12\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -6 + 6i\sqrt{3}$$

$$3. \frac{(2cis15^\circ)^7}{(4cis45^\circ)^3}$$

$$\frac{(2cis15^\circ)^7}{(4cis45^\circ)^3} = \frac{2^7 cis 7.15^\circ}{4^3 cis 3.45^\circ} = \frac{128cis105^\circ}{64cis135^\circ} = 2cis(105^\circ - 135^\circ)$$

$$4. (2cis50^\circ)^6 = 2(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)^6$$

$$= 2^6(\cos 6.50^\circ + i \sin 6.50^\circ)$$

$$= 64(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$= 64\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$$

$$= (-32 - 32i\sqrt{3})$$

B. Akar Bilangan Kompleks

Andaikan $w = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ adalah akar pangkat n dari bilangan kompleks yaitu $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, maka:

$$w^n = z$$

$$\rho(\cos \phi + i \sin \phi)^n = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Sehingga

$$\rho^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = r (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ dan } \rho^n = r, \quad n\phi = \theta + 2k\pi,$$

n adalah bilangan asli 1, 2, 3, dan k adalah bilangan bulat 0, 1, 2, (n-1)

Akibatnya

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{dan} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Jadi akar pangkat n dari bilangan kompleks $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ adalah :

$$w = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

dimana $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$; berturut-turut untuk $n = 1, 2, 3, \dots, n$

Dari persamaan $w^n = z$, maka ada n buah akar berbeda yang memenuhi persamaan itu, dan akan membagi sudut 360° menjadi n bagian sama besar.

Dimana, $0 \leq \frac{\theta + 2k\pi}{n} < 2\pi$, sehingga diperoleh $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ sebagai akar ke- n dari z .

Contoh Soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{-25}$

misal $\sqrt{-25} = w = \rho(\cos\phi + i \sin\phi)$ dan $-25 = z$ dapat ditulis $z = 25 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$

Maka $w = \sqrt{z}$ atau $w^2 = z$

$$\rho^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi) = 25(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

$$\text{Sehingga } \rho = 5 \text{ dan } \phi = \frac{180 + 2k\pi}{2}$$

$$\text{Jadi } w = \rho(\cos\phi + i \sin\phi) = 5(\cos \frac{180 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{180 + 2k\pi}{2})$$

$$\text{Untuk } k = 0 \rightarrow w = 5 (\cos \frac{180}{2} + i \sin \frac{180}{2}) = 5 (0 + i) = 5i$$

$$\text{Untuk } k = 1 \rightarrow w = 5 (\cos \frac{3.180}{2} + i \sin \frac{3.180}{2}) = 5 (0 - i) = -5i$$

$$H_p = \{5i, -5i\}$$

2. Hitunglah $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}i}$!

Misal $8 + 8\sqrt{3}i = z$ dan $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}i} = w = \rho(\cos\phi + i \sin\phi)$, maka $\sqrt[4]{z} = w = \rho(\cos\phi + i \sin\phi)$

Untuk $z = 8 + 8\sqrt{3}i$ diperoleh $r = \sqrt{64 + 192} = 16$ dan $\theta = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$

Jadi: $z = 16(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

Dari $\sqrt[4]{z} = w$ dapat ditulis $w^4 = z$ Dengan menggunakan dalil De-Moivre diperoleh

$$\rho^4(\cos 4\phi + i \sin 4\phi) = 16(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \text{ sehingga } \rho^4 = 16 \rightarrow \rho = 2 \text{ dan } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{4}$$

$$\text{Untuk } k = 0 \rightarrow w_1 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) = 2(0,966 + 0,259i) = 1,932 + 0,518i$$

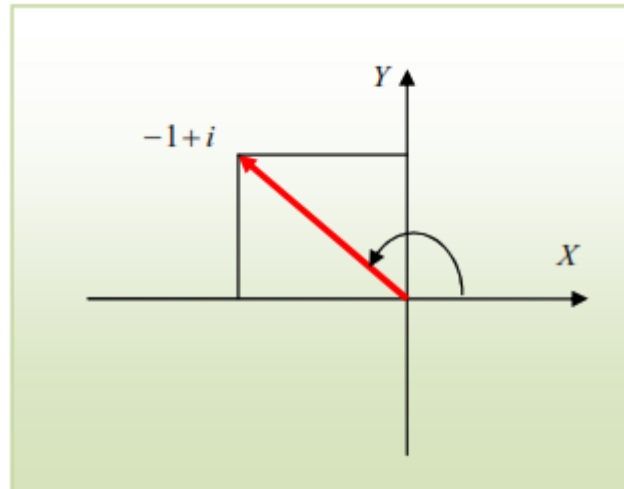
$$\text{Untuk } k = 1 \rightarrow w_2 = 2(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ) = 2(-0,259 + 0,966i) = -0,518 + 1,932i$$

$$\text{Untuk } k = 2 \rightarrow w_3 = 2(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ) = 2(-0,259 - 0,966i) = -0,518 - 1,932i$$

$$\text{Untuk } k = 3 \rightarrow w_4 = 2(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ) = 2(0,966 - 0,259i) = 1,932 - 0,518i$$

Jadi akar-akar dari $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}i}$ adalah $w_1 = 1,932 + 0,518i$; $w_2 = -0,518 + 1,932i$; $w_3 = -0,518 - 1,932i$ dan $w_4 = 1,932 - 0,518i$

3. Tentukan $(-1+i)^{1/3}$



Dalam bentuk polar

$$-1+i = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4 + 2k\pi) + i\sin(3\pi/4 + 2k\pi))$$

Sehingga

$$(-1+i)^{1/3} = \left(\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4)\right)^{1/3}$$

$$= \left(\sqrt{2}(\cos(3\pi/4 + 2k\pi) + i\sin(3\pi/4 + 2k\pi))\right)^{1/3}$$

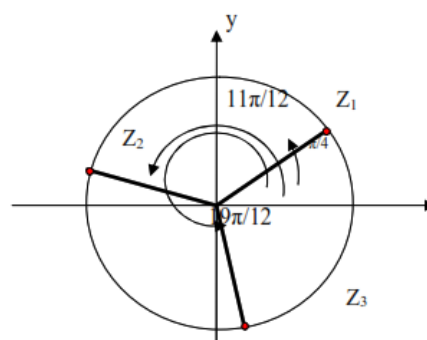
$$= (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2 \right)$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos\left(\frac{3\pi/4}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4}{3}\right) \right) = 2^{1/6} \left(\text{cis } \frac{\pi}{4} \right)$$

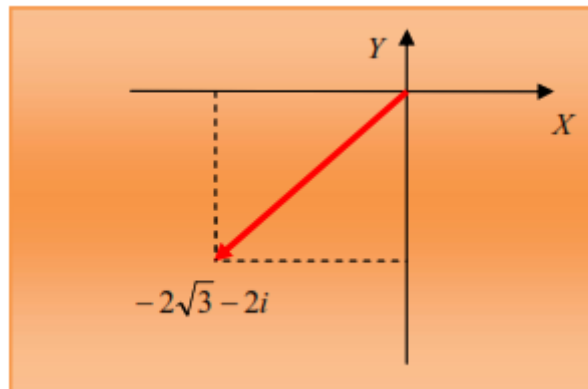
$$k = 1 \Rightarrow z_1 = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos\left(\frac{3\pi/4 + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4 + 2\pi}{3}\right) \right) = 2^{1/6} \left(\text{cis } \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$k = 2 \Rightarrow z_1 = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos\left(\frac{3\pi/4 + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4 + 4\pi}{3}\right) \right) = 2^{1/6} \left(\text{cis } \frac{19\pi}{12} \right)$$

Semua akar – akar ini dapat terlihat pada gambar berikut ini



4. $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$



Dalam bentuk polar

$$-2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos(7\pi/6 + 2k\pi) + i\sin(7\pi/6 + 2k\pi))$$

Sehingga

$$(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4} = (4(\cos 7\pi/6 + i\sin 7\pi/6))^{1/4}$$

$$= (4(\cos(7\pi/6 + 2k\pi) + i\sin(7\pi/6 + 2k\pi)))^{1/4}$$

$$= (4)^{1/4} \left(\cos\left(\frac{7\pi/6 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi/6 + 2k\pi}{4}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

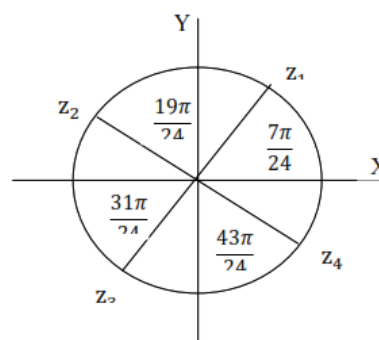
$$k = 0 \Rightarrow z_1 = (4)^{1/4} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) \right) = 4^{1/4} \left(\text{cis } \frac{7\pi}{24} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = (4)^{1/4} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{24}\right) \right) = 4^{1/4} \left(\text{cis } \frac{19\pi}{24} \right)$$

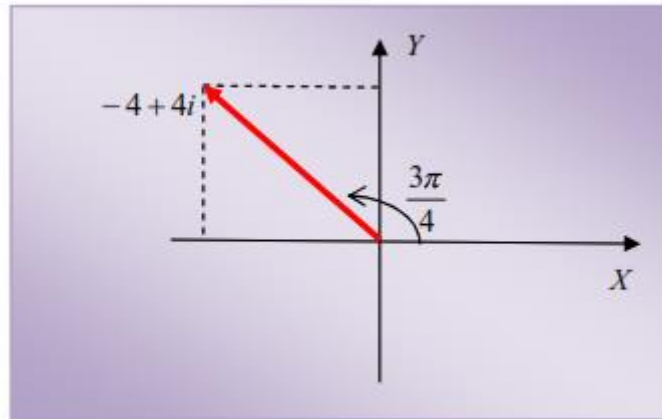
$$k = 2 \Rightarrow z_3 = (4)^{1/4} \left(\cos\left(\frac{45\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{45\pi}{24}\right) \right) = 4^{1/4} \left(\text{cis } \frac{45\pi}{24} \right)$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = (4)^{1/4} \left(\cos\left(\frac{71\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{71\pi}{24}\right) \right) = 4^{1/4} \left(\text{cis } \frac{71\pi}{24} \right)$$

Pernyataan di atas dinyatakan dalam gambar di bawah ini :



5. $(-4 + 4i)^{1/5}$



$$-4 + 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$(-4 + 4i)^{1/5} = \left(4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{1/5}$$

$$= \left((4\sqrt{2})^{1/5} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{5} \right) \right), k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow z_1 = \left(4^{1/5} (2)^{1/10} \left(\cos \frac{3\pi}{20} + i \sin \frac{3\pi}{20} \right) \right)$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow z_2 = \left(4^{1/5} (2)^{1/10} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi}{5} \right) \right)$$

$$\text{Untuk } k = 2 \Rightarrow z_3 = \left(4^{1/5} (2)^{1/10} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 4\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi/4 + 4\pi}{5} \right) \right)$$

$$\text{Untuk } k = 3 \Rightarrow z_4 = \left(4^{1/5} (2)^{1/10} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 6\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi/4 + 6\pi}{5} \right) \right)$$

$$\text{Untuk } k = 4 \Rightarrow z_4 = \left(4^{1/5} (2)^{1/10} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 8\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi/4 + 8\pi}{5} \right) \right)$$

EVALUASI

1. Selesaikan soal dibawah ini dengan teorema de Moivre !

a. $2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$

b. $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)5(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

c. $4(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)8(\cos -35^\circ + i \sin -35^\circ)$

2. Selesaikan soal dibawah ini !

a. $(2\text{cis}3\pi/4)(3\text{cis}\pi/4)$

b. $\left(\frac{1}{2}\text{cis}\pi/3\right)\left(\frac{3}{4}\text{cis}3\pi/4\right)$

c. $\left(2\text{cis}\frac{\pi}{3}\right)\left(3\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)$

3. Hitunglah menggunakan teorema de Moivre

a. $4(1+3i)^{1/6}$

b. $(5-12i)^{1/2}$

c. $(4+4i)^{1/8}$

Topik 5

Penggunaan Variabel Kompleks Pada Rangkaian Listrik

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep penerapan bilangan kompleks pada Rangkaian Listrik
2. Mahasiswa mampu memahami konsep phasor
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan matematis terkait rangkaian listrik menggunakan pendekatan bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menggunakan aljabar bilangan kompleks untuk penyelesaian terkait permasalahan pada rangkaian listrik,

A. Fasor

Kita mengenal pernyataan suatu bilangan kompleks yang berbentuk

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Dengan menggunakan hubungan ini maka sinyal sinus dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial kompleks, yaitu

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{jx} \quad \text{dan} \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{jx}$$

dengan Re dan Im masing-masing menunjukkan bahwa yang dimaksudkan adalah bagian riil dan bagian imajiner dari bilangan kompleks e^{jx} . Jika kita tetapkan bahwa hanya bagian riil dari bilangan kompleks e^{jx} saja yang kita ambil untuk menyatakan sinyal sinus maka sinyal $y = A \cos(\omega t + \theta)$ dapat kita tulis sebagai.

$$y = A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re} A e^{j(\omega t + \theta)} = \operatorname{Re} A e^{j\theta} e^{j\omega t} = A e^{j\theta} e^{j\omega t}$$

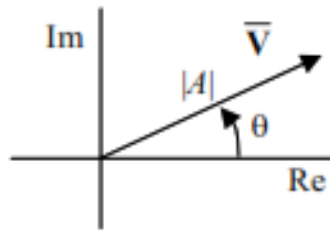
Jika kita bekerja pada suatu frekuensi ω tertentu untuk seluruh $j\omega t$ sistem, maka faktor $e^{j\omega t}$ pada pernyataan fungsi sinus tidak perlu dituliskan lagi. Kita dapat menyatakan fungsi sinus cukup dengan mengambil besar dan sudut fasa-nya saja. Jadi

$$\text{sinyal sinus } v = A \cos(\omega t + \theta) \text{ dinyatakan dengan } \bar{V} = A e^{j\theta}$$

Pernyataan sinyal sinus dengan bilangan kompleks ini kita sebut fasor. Jadi dengan notasi fasor, kita hanya memperhatikan amplitudo dan sudut fasanya saja dengan pengertian bahwa frekuensinya sudah tertentu. Karena kita hanya memperhatikan amplitudo dan sudut fasa saja, maka fasor dapat kita tuliskan dengan menyebutkan besarnya dan sudut fasanya. Jadi penulisan fasor dalam bentuk yang kita sebut bentuk polar adalah

$$\bar{V} = Ae^{j\theta} \text{ ditulis sebagai } \bar{V} = A\angle\theta$$

Fasor $\bar{V} = A\angle\theta$ dapat kita gambarkan dalam bidang kompleks, seperti terlihat pada gambar 5.1



Gambar 5.1 Fasor

Panjang fasor adalah nilai mutlak dari amplitudo A. Penulisan fasor dalam bentuk polar, dapat diubah ke bentuk sudut-siku, yaitu :

$$\bar{V} = A\angle\theta = A(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Transformasi timbal balik antara pernyataan dalam bentuk sudut siku dan bentuk polar, memudahkan kita dalam melakukan operasi-operasi fasor yang akan kita lihat berikut ini.

B. Operasi Fasor

1. Perkalian Fasor

Perkalian fasor mudah dilakukan bila fasor dituliskan dalam bentuk polar.

Jika $\bar{A} = A\angle\theta_1$ dan $\bar{B} = B\angle\theta_2$ maka

$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B} = AB\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

Hal ini mudah difahami, karena jika kita menuliskan

$$\bar{A} = Ae^{j\theta_1} \text{ dan } \bar{B} = Be^{j\theta_2}$$

$$\text{maka } \bar{C} = Ae^{j\theta_1} Be^{j\theta_2} = AB e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = AB\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

2. Pembagian Fasor

Pembagian fasor mudah dilakukan bila fasor dituliskan dalam bentuk polar

Jika $\bar{A} = A\angle\theta_1$ dan $\bar{B} = B\angle\theta_2$ maka

$$\bar{D} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A\angle\theta_1}{B\angle\theta_2} = \frac{A}{B}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Hal ini juga mudah difahami jika kita menuliskan

$$\bar{A} = Ae^{j\theta_1} \text{ dan } \bar{B} = Be^{j\theta_2}$$

$$\text{maka } \bar{D} = \frac{Ae^{j\theta_1}}{Be^{j\theta_2}} = \frac{A}{B} e^{j\theta_1} e^{-j\theta_2} = \frac{A}{B} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{A}{B}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

3. Penjumlahan dan Pengurangan Fasor

Operasi penjumlahan ataupun pengurangan lebih mudah dilakukan jika kita menuliskan fasor dalam bentuk sudut-siku.

$$\begin{aligned} \text{Jika } \bar{A} &= a_1 + jb_1 \quad \text{dan} \quad \bar{B} = a_2 + jb_2 \\ \text{maka } \bar{C} &= \bar{A} + \bar{B} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \\ &= \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \right) \\ \bar{D} &= \bar{A} - \bar{B} = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jika } \bar{A} &= A \angle \theta_1 \quad \text{dan} \quad \bar{B} = B \angle \theta_2 \quad \text{maka} \\ \bar{C} &= \bar{A} + \bar{B} = (A \cos \theta_1 + B \cos \theta_2) + j(A \sin \theta_1 + B \sin \theta_2) \\ \bar{D} &= \bar{A} - \bar{B} = (A \cos \theta_1 - B \cos \theta_2) + j(A \sin \theta_1 - B \sin \theta_2) \end{aligned}$$

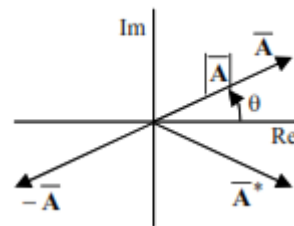
4. Fasor Negatif dan Fasor Konjugat

Jika dituliskan dalam bentuk sudut-siku, nilai negatif fasor adalah negatif dari masing-masing komponen riil dan imajiner.

$$\begin{aligned} \text{Jika } \bar{A} &= a_1 + jb_1 \quad \text{maka} \\ -\bar{A} &= -a_1 - jb_1 \end{aligned}$$

Fasor konjugat dari $\bar{A}$ ditulis $\bar{A}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Jika } \bar{A} &= a_1 + jb_1 \quad \text{maka} \\ \bar{A}^* &= a_1 - jb_1 \end{aligned}$$



Gambar 5.2 Fasor dengan negative dan konjugat

Dalam bentuk polar,

$$\begin{aligned} \text{Jika } \bar{A} &= A \angle \theta \\ \text{maka } -\bar{A} &= A \angle (\theta + 180^\circ) \\ &= A \angle (\theta - 180^\circ) \quad \text{dan} \quad \bar{A}^* = A \angle -\theta \end{aligned}$$

5. Fasor dengan sudut 90° dan 0°

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \angle 90^\circ = jA ; \\ \bar{B} &= B \angle -90^\circ = -jB ; \\ \bar{C} &= C \angle 0^\circ = C \end{aligned}$$

Contoh soal 1

Ubahlah pernyataan sinyal sinus berikut ini ke dalam fasor dengan bentuk polar maupun bentuk sudut-siku dan lakukanlah operasi-operasi fasor yang diminta.

- a). $v_1(t) = 10 \cos(500t - 45^\circ)$ b). $v_2(t) = 15 \cos(500t + 30^\circ)$
c). $i_1(t) = -4 \cos 1000t$ d). $i_2(t) = 3 \cos(1000t - 90^\circ)$
e). $\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$ f). $S_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_1^*$; $S_2 = \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$
g). $Z_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}$; $Z_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}$

Penyelesaian :

- a). Pernyataan fasor sinyal sinus ini dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\bar{V}_1 = 10 \angle -45^\circ \quad \text{atau} \\ \bar{V}_1 = 10 \cos(-45^\circ) + j10 \sin(-45^\circ) = 7,07 - j7,07$$

- b). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\bar{V}_2 = 15 \angle 30^\circ \quad \text{atau} \\ \bar{V}_2 = 15 \cos(30^\circ) + j15 \sin(30^\circ) = 12,99 + j7,5$$

- c). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\bar{I}_1 = -4 \angle 0^\circ \quad \text{atau} \quad \bar{I}_1 = -4 \cos(0^\circ) - j4 \sin(0^\circ) = -4$$

- d). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\bar{I}_2 = 3 \angle -90^\circ \quad \text{atau} \quad \bar{I}_2 = 3 \cos(-90^\circ) + j3 \sin(-90^\circ) = -j3$$

- e). Fasor hanya dapat dijumlahkan jika frekuensinya sama. Karena kedua arus dalam soal e) ini berfrekuensi sama maka fasornya dapat kita jumlahkan $\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = -4 - j3$. Hasil penjumlahan ini dapat kita ubah kembali dalam bentuk polar menjadi

$$\bar{I}_3 = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{-3}{-4} \right) = 5 \angle 216,9^\circ$$

- f). $S_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* = (10 \angle -45^\circ) \times (-4 \angle 0^\circ) = -40 \angle -45^\circ$

$$S_2 = \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = (15 \angle 30^\circ) \times (3 \angle 90^\circ) = 45 \angle 120^\circ$$

- g). $Z_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{10 \angle -45^\circ}{-4 \angle 0^\circ} = -2,5 \angle -45^\circ$;

$$Z_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = \frac{15 \angle 30^\circ}{3 \angle 90^\circ} = 5 \angle -60^\circ$$

Contoh soal 2

Ubahlah pernyataan fasor dari sinyal sinus berikut ini ke pernyataan sinus di kawasan waktu.

- $\bar{V}_1 = 150 \angle -45^\circ$ V, pada frekuensi siklus 50 Hz
- $\bar{V}_2 = 30 + j40$ V, pada frekuensi sudut $\omega = 1000$ rad/detik.
- $\bar{I} = 15 + j5 + 10 \angle 180^\circ$ mA, pada $\omega = 1000$ rad/detik.

Penyelesaian :

- Sinyal ini mempunyai amplitudo 150 V, dan sudut fasa -45° . Frekuensi siklusnya 50 Hz yang berarti frekuensi sudutnya $\omega = 2\pi \times 50 = 314$ rad/detik. Jadi di kawasan waktu sinyal ini adalah $v_1(t) = 150 \cos(314t - 45^\circ)$ V
- Amplitudo sinyal ini adalah $V_m = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ V dan sudut fasanya $\theta = \tan^{-1} \frac{40}{30} = 53,1^\circ$. Karena $\omega = 1000$ rad/detik, maka pernyataan sinyal ini di kawasan waktu adalah $v_2(t) = 50 \cos(1000t + 53,1^\circ)$
- Sinyal ini dinyatakan dalam fasor dan merupakan jumlah dari dua sinyal, satu dalam bentuk sudut siku dan yang lain dalam bentuk polar. Jika dinyatakan dalam bentuk sudut siku, sinyal ini menjadi

$$\begin{aligned}\bar{I} &= 15 + j5 + 10 \cos 180^\circ + j10 \sin 180^\circ \\ &= 15 + j5 - 10 + j0 = 5 + j5 \text{ mA}\end{aligned}$$

Amplitudo dan sudut fasanya adalah

$$I_m = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07 \text{ mA} \quad ; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{5}{5} = 45^\circ$$

Karena diketahui $\omega = 1000$ rad/detik, maka

$$i(t) = 7,07 \cos(1000t + 45^\circ)$$

C. Resistansi , Reaktansi dan Impedansi

Dengan fungsi sinus dinyatakan dalam fasor, maka kita akan mendapatkan hubungan-hubungan tegangan dan arus pada elemen-elemen pasif sebagai berikut.

1. Resistor

Jika arus pada resistor sebesar

$$i_R(t) = I_{Rm} \cos(\omega t + \theta) = I_{Rm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

Maka tegangannya adalah

$$v_R(t) = R i_R(t) = R I_{Rm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

Jika dinyatakan dalam fasor adalah

$$\bar{V}_R = R\bar{I}_R$$

Hubungan arus dan tegangan resistor tetap seperti yang telah kita kenal selama ini, dengan faktor proporsionalitas R yang kita sebut resistansi.

2. Induktor

Untuk induktor, jika arus induktor adalah

$$i_L(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \theta) = I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka tegangan induktor adalah

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d(I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)})}{dt} = j\omega L (I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)})$$

Jika dinyatakan dalam fasor adalah

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L = jX_L \bar{I}_L = Z_L \bar{I}_L$$

dengan: $X_L = \omega L$ dan $Z_L = j\omega L$

Jadi dengan pernyataan sinyal dalam fasor, hubungan tegangan dan arus induktor tidak lagi berbentuk hubungan diferensial, melainkan linier dengan faktor proporsionalitas sebesar $Z_L = jX_L$; X_L kita sebut reaktansi induktif, Z_L kita sebut impedansi induktor.

3. Kapasitor

Untuk kapasitor, jika tegangan kapasitor adalah

$$v_C(t) = V_{Cm} \cos(\omega t + \theta) = V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka arus kapasitor adalah

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{d(V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)})}{dt} = j\omega C (V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)})$$

yang dalam bentuk fasor dapat kita tuliskan sebagai

$$\begin{aligned} \bar{I}_C &= j\omega C \bar{V}_C \text{ atau} \\ \bar{V}_C &= \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_C = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}_C = jX_C \bar{I}_C = Z_C \bar{I}_C \\ \text{dengan: } |X_C| &= \frac{1}{\omega C} \text{ dan } Z_C = -\frac{j}{\omega C} \end{aligned}$$

Seperti yang kita peroleh pada induktor, hubungan tegangan dan arus kapasitor tidak lagi berupa hubungan integral, melainkan berupa hubungan linier dengan faktor

proporsionalitas sebesar $Z_C = jX_C$; X_C kita sebut reaktansi kapasitif, Z_C kita sebut impedansi kapasitor.

D. Hubungan Seri dan Kaidah Pembagi Tegangan

Tegangan total pada R dan L yang terhubung seri dengan $i(t) = I_m e^{j(\omega t + \theta)}$ adalah

$$\begin{aligned} v_{RL}(t) &= v_R(t) + v_L(t) = RI_m e^{j(\omega t + \theta)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \theta)} \\ &= (R + j\omega L) I_m e^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

Dalam bentuk fasor,

$$\bar{V}_{RL \text{ seri}} = (R + j\omega L) \bar{I}$$

Perbandingan antara tegangan dan arus pada resistor dan induktor yang terhubung seri disebut impedansi dari hubungan seri ini, yaitu

$$Z_{RL \text{ seri}} = R + j\omega L$$

Dengan cara yang sama kita dapat memperoleh impedansi hubungan seri RC dan LC sebagai :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{RC \text{ seri}} &= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I} ; \\ Z_{RC \text{ seri}} &= R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} \\ \bar{V}_{LC \text{ seri}} &= \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I} ; \\ Z_{LC \text{ seri}} &= j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

Hubungan seri tidak terbatas hanya dua elemen tetapi bisa lebih, sehingga terbentuklah hubungan seri beberapa impedansi. Secara umum impedansi total dari beberapa impedansi yang terhubung seri adalah

$$\begin{aligned} \bar{V}_{total \text{ seri}} &= Z_{total \text{ seri}} \bar{I} \\ Z_{total \text{ seri}} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka berlaku kaidah pembagi tegangan

$$\bar{V}_k = \frac{Z_k}{Z_{total \text{ seri}}} \times \bar{V}_{total}$$

E. Hubungan Paralel dan Kaidah Pembagi Arus

Dua atau lebih impedansi yang terhubung paralel akan bertegangan sama. Jika tegangan ini adalah V maka arus pada impedansi ke k adalah

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{V}}{Z_k} = Y_k \bar{V}$$

dengan $Y_k = 1/Z_k$ disebut admitansi.

Arus total dalam hubungan paralel adalah

$$\bar{I}_{total} = \sum_{k=1}^n \bar{I}_k = \sum_{k=1}^n Y_k \bar{V} = Y_{total} \bar{V}$$

dengan

$$Y_{total} = \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Dengan demikian maka berlaku kaidah pembagi arus :

$$\bar{I}_k = Y_k \bar{V} = \frac{Y_k}{Y_{total}} \bar{I}_{total}$$

F. Impedansi Secara Umum

Secara umum impedansi dapat kita tuliskan

$$Z = R(\omega) + jX(\omega)$$

Bagian riil adalah resistansi dan bagian imajiner adalah reaktansi. Kedua bagian ini mungkin merupakan fungsi dari frekuensi ω . Reaktansi yang bernilai positif merupakan reaktansi induktif, sedang yang bernilai negatif merupakan reaktansi kapasitif. Sebagai contoh, impedansi dari induktor yang terhubung seri dengan kapasitor yang terparalel dengan resistor adalah

$$\begin{aligned} Z_{L+R//C} &= j\omega L + \frac{R(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)} \\ &= \frac{R}{(\omega RC)^2 + 1} + j \left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{(\omega RC)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bagian riil maupun bagian imajiner merupakan fungsi dari frekuensi ω . Jadi baik resistansi maupun reaktansi dari impedansi secara umum merupakan fungsi frekuensi.

Walaupun impedansi merupakan pernyataan yang berbentuk kompleks, akan tetapi impedansi bukanlah fasor. Impedansi dan fasor merupakan dua pengertian dari dua konsep yang berbeda

- Fasor adalah pernyataan dari sinyal sinus
- Impedansi adalah pernyataan elemen.

Walaupun impedansi bukan fasor, namun karena keduanya berupa pernyataan kompleks, maka operasi-operasi fasor dapat diterapkan pada keduanya. Sebagai contoh kita ambil hubungan seri RL :

$$Z_{RL \text{ seri}} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = Z_1 \angle \lambda_1$$

Jika fasor tegangan $V_s = V_1 \angle \theta_1$ diterapkan pada hubungan seri RL ini, maka arus yang mengalir adalah

$$\bar{I}_{RL} = \frac{\bar{V}_s}{Z_{RL \text{ seri}}} = \frac{V_1 \angle \theta_1}{Z_1 \angle \lambda_1} = \frac{V_1}{Z_1} \angle (\theta_1 - \lambda_1)$$

Secara singkat, impedansi elemen dan hubungan arus-tegangan elemen adalah sebagai berikut.

$$Z_R = R; \quad Z_L = j\omega L; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$
$$\bar{V}_R = R\bar{I}_R; \quad \bar{V}_L = j\omega L\bar{I}_L; \quad \bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}_C$$

Secara singkat dapat kita katakan bahwa : dengan menyatakan sinyal sinus ke dalam bentuk fasor, maka perbandingan antara tegangan elemen dan arus elemen merupakan suatu besaran kompleks yang kita sebut impedansi di kawasan fasor. Dengan menyatakan elemen dalam impedansinya maka hubungan antara tegangan dan arus elemen menjadi mirip dengan relasi hukum Ohm di kawasan waktu. Kaidah-kaidah rangkaian di kawasan waktu berlaku juga di kawasan fasor.

Contoh Soal 3

Arus yang melalui induktor 0,5 H adalah $i_L(t)=0,4\cos(1000t)$ A.

Tentukanlah:

- a) impedansi induktor;
- b) Fasor tegangan pada induktor;
- c) bentuk gelombang tegangan pada induktor.

Penyelesaian :

- a). Impedansi induktor adalah $Z_L = j\omega L$. Dalam contoh ini $\omega = 1000$, jadi

$$Z_L = j \times 1000 \times 0,5 = j500 \, \Omega$$

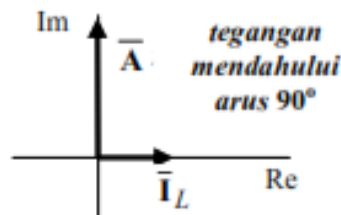
- b). Fasor tegangan induktor adalah fasor arus kali impedansinya. Karena arus dinyatakan di kawasan waktu, kita ubah dulu pernyataan arus ini ke kawasan fasor menjadi $\bar{I}_L = 0,4 \angle 0^\circ \text{ A}$. Tegangan induktor adalah

$$\begin{aligned}\bar{V}_L &= Z_L \bar{I}_L = (j500) \times 0,4 \angle 0^\circ \\ &= 500 \angle 90^\circ \times 0,4 \angle 0^\circ = 200 \angle 90^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

- c). Bentuk gelombang tegangan pada induktor yang dimaksudkan di sini adalah pernyataan di kawasan waktu dari tegangan induktor. Dari hasil b) dengan mudah kita nyatakan

$$v_L(t) = 200 \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V}$$

Fasor tegangan dan fasor arus pada induktor berbeda fasa sebesar 90° . Tegangan mendahului arus dengan sudut 90° .



Contoh Soal 4

Arus yang melalui kapasitor sebesar 50 pF adalah $i_C(t) = 0,5 \cos(10^6 t) \text{ mA}$.

Tentukanlah:

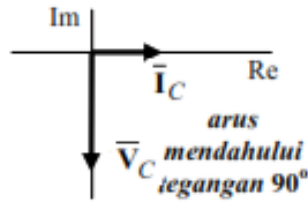
- impedansi kapasitor;
- fasor tegangan pada kapasitor;
- bentuk gelombang tegangan pada kapasitor.

Penyelesaian

$$a). Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{10^6 \times (50 \times 10^{-12})} = -j20 \text{ k}\Omega$$

$$\begin{aligned}b). \bar{V}_C &= Z_C \bar{I}_C = (20 \times 10^3 \angle -90^\circ) \times (0,5 \times 10^{-3} \angle 0^\circ) \\ &= 10 \angle -90^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

$$c). v_C(t) = 10 \cos(10^6 t - 90^\circ) \text{ V}.$$



Contoh Soal 5

Suatu beban diberi tegangan

$$v(t) = 120\cos(314t+10^\circ) \text{ V.}$$

Arus yang mengalir adalah $i(t) = 5\cos(314t+40^\circ)$ A. Carilah impedansi beban tersebut.!

Penyelesaian

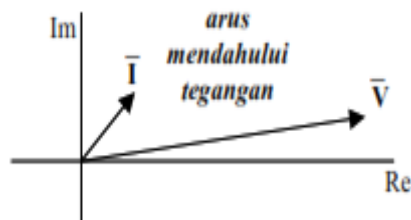
Tegangan dan arus dalam fasor adalah

$$\bar{V} = 120\angle 10^\circ \text{ V} \quad \text{dan} \quad \bar{I} = 5\angle 40^\circ \text{ A}$$

Impedansi beban adalah:

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{120\angle 10^\circ}{5\angle 40^\circ} = 24\angle -30^\circ \Omega \\ &= 24\cos(-30) + j24\sin(-30) = 20,8 - j12 \Omega \end{aligned}$$

Kita mengetahui bahwa impedansi induktor adalah $Z_L = j\omega L$ dan impedansi kapasitor adalah $Z_C = -j/\omega C$. Dari sini kita lihat bahwa sesuatu impedansi yang komponen imajinernya positif akan bersifat induktif sedangkan jika komponen imajinernya negatif akan bersifat kapasitif. Pada beban kapasitif ini sudut fasa arus lebih besar dari sudut fasa tegangan. Kita katakan bahwa arus mendahului tegangan atau arus leading terhadap tegangannya. Gambar Fasor tegangan pada beban adalah seperti di samping ini.



Contoh Soal 6

Suatu beban diberi tegangan

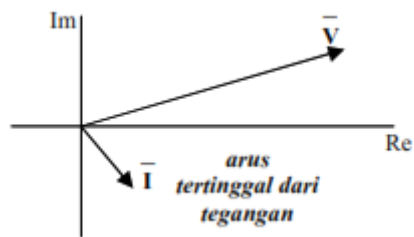
$$v(t) = 120\cos(314t+20^\circ) \text{ V}$$

Arus yang mengalir adalah $i(t) = 5\cos(314t-40^\circ)$ A. Carilah impedansi beban tersebut.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{120 \angle 20^\circ}{5 \angle -40^\circ} = 24 \angle 60^\circ \Omega \\ &= 24 \cos(60^\circ) + j24 \sin(60^\circ) = 12 + j20,8 \Omega \end{aligned}$$

Dalam contoh ini komponen imajiner Impedansi beban bernilai positif. Beban bersifat induktif. Pada beban yang bersifat induktif sudut fasa arus lebih kecil dari sudut fasa tegangan. Fasor arus ketinggalan dari tegangan atau arus lagging terhadap tegangan. Fasor tegangan dan fasor arus dalam contoh ini digambarkan seperti di bawah ini.



EVALUASI

1. Arus yang melalui induktor 2 H adalah $i_L(t) = 0,8 \cos(800t - 40^\circ)$ A. Tentukanlah:
 - a) impedansi induktor;
 - b) Fasor tegangan pada induktor;
 - c) bentuk gelombang tegangan pada inductor

2. Arus yang melalui kapasitor sebesar 80 pF adalah $i_C(t) = 0,8 \cos(10^8 t)$ mA. Tentukanlah:
 - a) impedansi kapasitor;
 - b) fasor tegangan pada kapasitor;
 - c) bentuk gelombang tegangan pada kapasitor.

3. Suatu beban diberi tegangan sebesar $v(t) = 300 (\cos 120t + 30^\circ)$ dan arus sebesar $i(t) = 10 \cos(120t - 20^\circ)$ A. Carilah impedansi beban tersebut.!

Topik 6

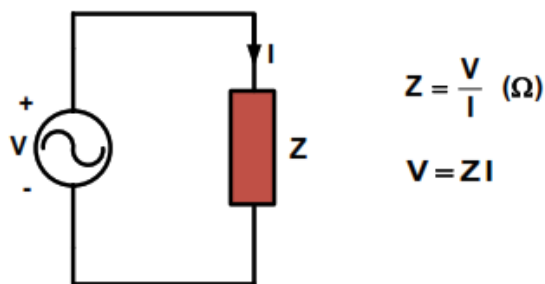
Penggunaan Variabel Kompleks Pada Rangkaian Listrik R, L dan C Sumber Arus Searah

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep penerapan bilangan kompleks pada Rangkaian Listrik R, L dan C pada sumber arus searah
2. Mahasiswa mampu memahami konsep impedansi, admitansi dan daya pada sumber AC.
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan matematis terkait rangkaian listrik R, L dan C pada sumber arus searah menggunakan pendekatan bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menggunakan aljabar bilangan kompleks untuk penyelesaian terkait permasalahan pada rangkaian listrik dengan sumber arus bolak balik

A. Impedansi dan Admitansi

Dalam penyelesaian dengan menggunakan metode fasor, harus dipahami terlebih dahulu pengertian impedansi dan admitansi, impedansi adalah perbandingan antara tegangan (fasor) dan arus (fasor) diantara dua terminal. Apabila dinyatakan dalam bentuk matematik sebagai berikut yang diperlihatkan pada gambar 6.1

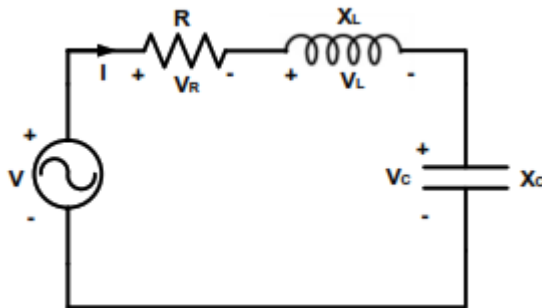


Gambar 6.1 Rangkaian Impedansi

Impedansi (Z) mempunyai satuan ohm, admitansi (Y) adalah kebalikan dari impedansi, satuan dari admitansi adalah mho, yang dinyatakan dalam persamaan :

$$Y = \frac{1}{Z} \qquad Y = \frac{I}{V} \text{ (U)}$$
$$I = YV$$

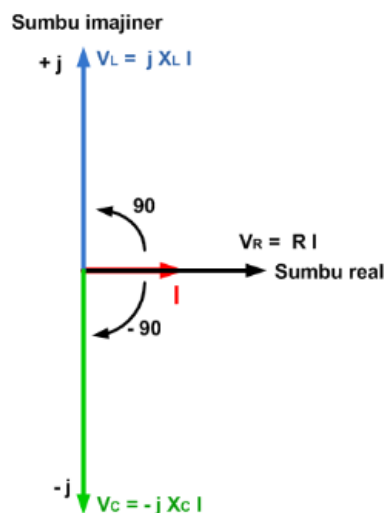
Pada rangkaian R,L dan C yang dihubungkan seri, seperti diperlihatkan pada gambar 6.2, maka fasor tegangan pada masing-masing unsur rangkaian dapat dihitung sebagai berikut:



$$\begin{aligned} I &= I \angle 0^\circ \\ V_R &= R I \angle 0^\circ \\ V_L &= X_L I \angle 90^\circ \\ V_C &= X_C I \angle -90^\circ \end{aligned}$$

Gambar 6.2 Rangkaian RLC

Fasor tegangan pada masing-masing unsur rangkaian apabila digambarkan pada bidang kompleks, sebagai berikut :



Gambar 6.3 Fasor Tegangan pada Bidang Komplek

Dari gambar 4.10 Rangkaian RLC dapat dilihat, apabila arus yang mengalir dalam rangkaian mempunyai sudut fasa 0° maka tegangan pada resistansi akan sefasa dengan arus, sedangkan pada induktansi tegangan akan mendahului 90° terhadap arus dan tegangan pada kapasitansi akan tertinggal 90° terhadap arus. Apabila digambarkan pada bidang kompleks dapat diperlihatkan pada gambar 6.3. Dari bidang kompleks, diperoleh :

1. Resistansi

$$V_R = RI \quad \text{maka diperoleh impedansi :} \quad \frac{V_R}{I} = R$$

$$Z_R = R$$

2. Induktansi

$$V_L = jX_L I \quad \text{maka diperoleh impedansi :} \quad \frac{V_L}{I} = jX_L$$

$$Z_L = jX_L$$

3. Kapasitansi

$$V_C = -jX_C I \quad \text{maka diperoleh impedansi :} \quad \frac{V_C}{I} = -jX_C$$

$$Z_C = -jX_C$$

B. Penyelesaian Rangkaian Listrik R, L dan C

Unsur rangkaian (R,L,C) harus dinyatakan dalam bentuk impedansi (Z) atau admitansi (Y). Impedansi dan admitansi seperti diperlihatkan pada table berikut ini :

	R	L	C
$Z(\Omega)$	R	jX_L	$-jX_C$
$Y(S)$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{jX_L}$	$\frac{1}{-jX_C}$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

Tegangan dan Arus harus dalam bentuk fasor

$$\text{Tegangan sesaat : } v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_1^\circ)$$

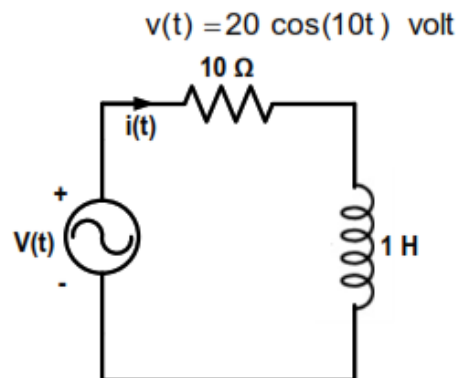
$$\text{Bentuk tegangan fasor :} \quad \begin{aligned} V_m &= V_m \angle \theta_1 \\ V_{ef} &= V_{ef} \angle \theta_1 \end{aligned}$$

$$\text{Arus sesaat :} \quad i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta_2)$$

$$\text{Bentuk arus fasor :} \quad \begin{aligned} I_m &= I_m \angle -\theta_2 \\ I_{ef} &= I_{ef} \angle -\theta_2 \end{aligned}$$

Contoh :

1. Rangkaian R L seri, dicatu sumber tegangan sinusoida :



- a) Hitung tegangan efektif dan frekuensi tegangan
- b) Hitung arus efektif dan arus sesaat yang mengalir dalam rangkaian

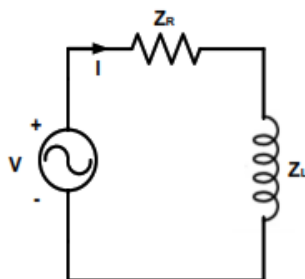
Solusi :

$v(t) = 20 \cos(10t) \text{ volt}$, maka : $V_m = 20$, $\omega = 10$

Tegangan efektif : $V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14,14 \text{ V}$

maka frekuensi : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{6,28} = 1,59 \text{ Hz}$

Rangkaian kawasan frekuensi :



$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L \\ &= R + j\omega L \\ &= 10 + j10 \times 1 \\ &= 10 + j10 \\ Z &= 14,14 \angle 45^\circ \Omega \end{aligned}$$

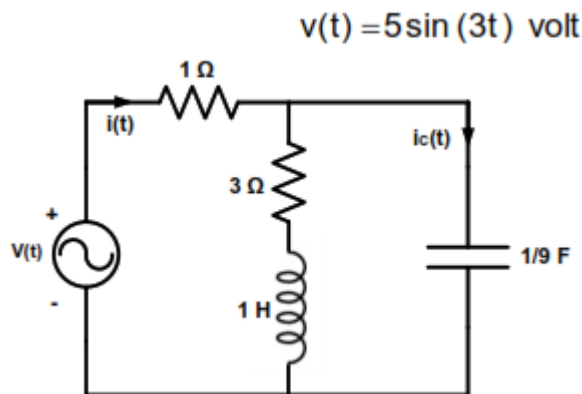
$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{14,14 \angle 0^\circ}{14,14 \angle 45^\circ} = 1 \angle -45^\circ$$

Jadi arus efektif $I_{ef} = 1 \text{ A}$

$$I_m = \sqrt{2} \times I = \sqrt{2} \times 1 = 1,41$$

Arus sesaat : $i(t) = 1,41 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A}$

2. Dalam rangkaian elektrik, diketahui sumber tegangan :

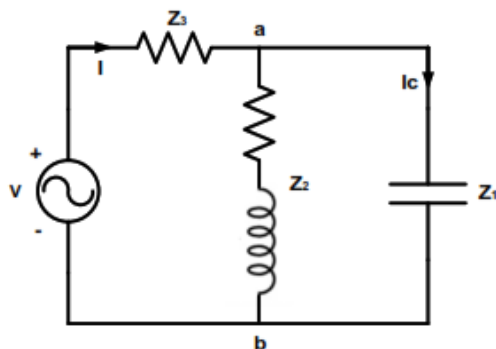


- Hitung arus efektif (I) dan arus sesaat (i)
- Hitung arus efektif I_c dan arus sesaat (i_c)

Solusi :

- Menghitung arus efektif dan arus sesaat $i(t)$.

$v(t) = 5 \sin(3t)$ volt, maka : $V_m = 5$, $\omega = 3$



$$\begin{aligned} Z_1 &= -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} \\ &= -j \frac{1}{3 \times 1/9} \\ &= -j3 \Omega \\ Z_2 &= 3 + j\omega L = 3 + j3 \times 1 \\ &= 3 + j3 \\ Z_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{-j3 \times (3 + j3)}{-j3 + 3 + j3} \\ &= \frac{9 - j9}{3} = 3 - j3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= Z_{ab} + Z_3 \\ &= 3 - j3 + 1 = 4 - j3 \\ Z &= 5 \angle -36,9^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{5 \angle 0^\circ}{5 \angle -36,9^\circ} \\ I &= 1 \angle 0 - (-36,9) \\ I &= 1 \angle 36,90^\circ \end{aligned}$$

Arus efektif : $I_{ef} = 0,707 I_m = 0,707 \times 1 = 0,707$ A

Arus sesaat : $i(t) = 1 \cdot \sin(3t + 36,90^\circ)$
 $i(t) = \sin(3t + 36,90^\circ) \text{ A}$

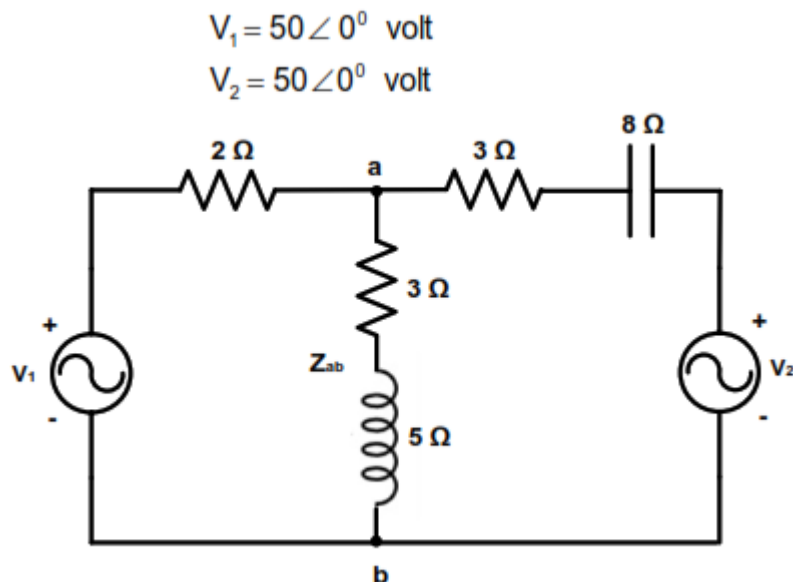
- Menghitung arus efektif I_c dan arus sesaat (i_c)

$$\begin{aligned} V_{ab} &= Z_{ab} I = (3 - j3) \times 1 \angle 36,90^\circ \\ &= 4,25 \angle -45^\circ \times 1 \angle 36,90^\circ \\ &= 4,25 \angle -8,10^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{V_{ab}}{Z_1} = \frac{4,25 \angle -8,10^\circ}{-j3} \\ &= \frac{4,25 \angle -8,10^\circ}{3 \angle -90^\circ} \\ &= 1,41 \angle 81,90^\circ \end{aligned}$$

Jadi arus sesaat : $i_c(t) = 1,41 \sin(3t + 81,90^\circ) \text{ A}$

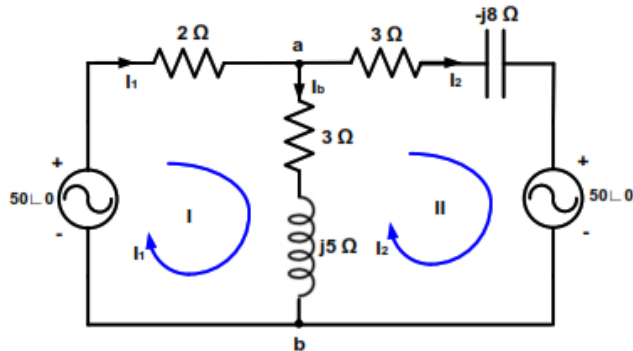
3. Pada rangkaian elektrik, diketahui sumber tegangan dengan tegangan efektif :



- Hitung tegangan pada impedansi Z_{ab} dengan metode arus mesh
- Hitung tegangan pada impedansi Z_{ab} dengan metode tegangan node
- Hitung tegangan pada impedansi Z_{ab} dengan teorema thevenin

Solusi :

a. Metode Arus Mesh



Tegangan pada impedansi Z_{ab} :

$$V_{ab} = Z_{ab} I_b$$

$$I_b = I_1 - I_2$$

Dengan metode Arus mesh.

$$\text{Mesh I : } Z_{11} I_1 - Z_{12} I_2 = V_1$$

$$(2 + 3 + j5) I_1 - (3 + j5) I_2 = 50 \angle 0^\circ$$

$$(5 + j5) I_1 - (3 + j5) I_2 = 50 \angle 0^\circ \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Mesh II : } -Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = V_2$$

$$-(3 + j5) I_1 + (3 + 3 + j5 - j8) I_2 = 50 \angle 0^\circ$$

$$-(3 + j5) I_1 + (6 - j3) I_2 = -50 \angle 0^\circ \quad \dots\dots\dots (2)$$

Persamaan arus mesh :

$$(5 + j5) I_1 - (3 + j5) I_2 = 50 \angle 0^\circ$$

$$-(3 + j5) I_1 + (6 - j3) I_2 = -50 \angle 0^\circ$$

Persamaan (1) dan (2), dihitung dengan determinan

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 \angle 0^\circ & -(3 + j5) \\ -50 \angle 0^\circ & (6 - j3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -(3 + j5) \\ -(3 + j5) & (6 - j3) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{50(6 - j3) - 50(3 + j5)}{(5 + j5)(6 - j3) - (3 + j5)(3 + j5)} = \frac{150 - j400}{61 - j15}$$

$$I_1 = \frac{427,20 \angle -69,44^\circ}{62,82 \angle -13,80^\circ}$$

$$I_1 = 6,80 \angle -55,64^\circ$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 50\angle 0^\circ \\ -(3+j5) & -50\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -(3+j5) \\ -(3+j5) & (6-j3) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-50(5+j5)+50(3+j5)}{(5+j5)(6-j3)-(3+j5)(3+j5)} = \frac{-100}{61-j15} \\ &= \frac{-100\angle 0^\circ}{62,82\angle -13,80^\circ} \\ I_2 &= -1,59\angle 13,80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_b &= I_1 - I_2 \\ &= 6,80\angle -55,64^\circ - (-1,59\angle 13,80^\circ) \\ &= 6,80\angle -55,64^\circ + 1,59\angle 13,80^\circ \\ &= 3,83 - j5,60 + 1,54 + j0,38 \\ &= 5,37 - j5,22 \\ I_b &= 7,49\angle -44,18^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= Z_{ab} I_b \\ &= (3+j5) \times 7,49\angle -44,18^\circ \\ &= 5,83\angle 59,03^\circ \times 7,49\angle -44,18^\circ \\ V_{ab} &= 43,66\angle 14,85^\circ \text{ volt} \end{aligned}$$

C. Daya Dalam Rangkaian Arus Bolak-Balik

Dalam rangkaian arus bolak-balik (gelombang sinusoida) terdapat 3 macam daya, yaitu :

1. Daya nyata/daya aktif (Daya rata-rata) .

Daya nyata dengan notasi P dengan satuan watt (W), dalam rangkaian merupakan daya yang diserap oleh resistansi.

2. Daya Reaktif (Daya buta)

Daya reaktif dengan notasi Q dengan satuan Volt Ampere Reaktif (VAR), merupakan daya yang diserap oleh reaktansi induktif atau reaktansi kapasitif

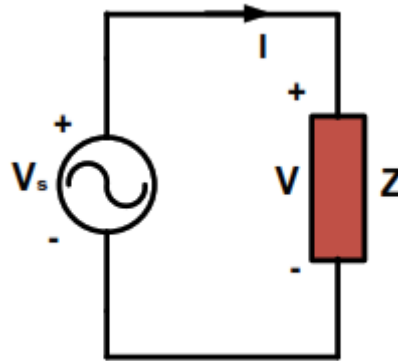
3. Daya Nampak (Daya kompleks)

Daya Nampak dengan notasi S dengan satuan Volt Ampere (VA), merupakan gabungan antara daya nyata dan daya reaktif

Dalam menghitung daya nyata dan daya reaktif dapat dilakukan dengan dua cara yaitu, dengan menghitung daya sesaat dari nilai tegangan dan arus sesaat atau dengan daya riil dan daya imajiner pada bidang kompleks.

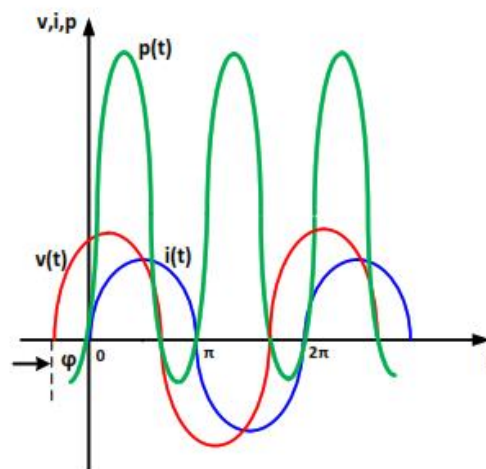
1. Daya Nyata

Dalam rangkaian elektrik yang diperlihatkan pada Gambar 6.4, tegangan dan arus adalah tegangan efektif dan arus efektif.



Gambar 6.4 Rangkaian dengan impedansi $Z = R + jX$

Gambar 6.5 memperlihatkan gelombang tegangan sesaat, arus sesaat dan daya sesaat



Gambar 6.5 Rangkaian dengan impedansi $Z = R + jX$

Daya sesaat :

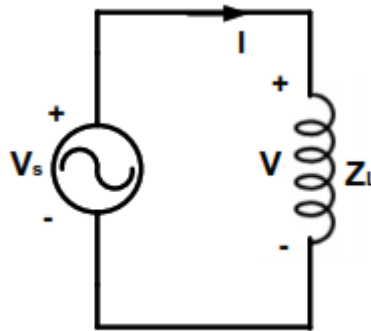
$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t) \cdot i(t) \\
 p(t) &= \sqrt{2} V \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2} I \sin(\omega t) \\
 &= 2VI [\sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t)] \\
 &= 2VI \left[\frac{1}{2} \{ \cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \varphi + \omega t) \} \right] \\
 &= VI [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]
 \end{aligned}$$

Daya rata-rata (daya nyata):

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T [V \cos \phi - V \cos(2\omega t + \phi)] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T V \cos \phi dt - \frac{1}{T} \int_0^T V \cos(2\omega t + \phi) dt \\
 &= \frac{1}{T} [V \cos \phi \cdot t]_0^T - 0 \\
 &= \frac{1}{T} [V \cos \phi (T - 0)] \\
 P &= V \cos \phi
 \end{aligned}$$

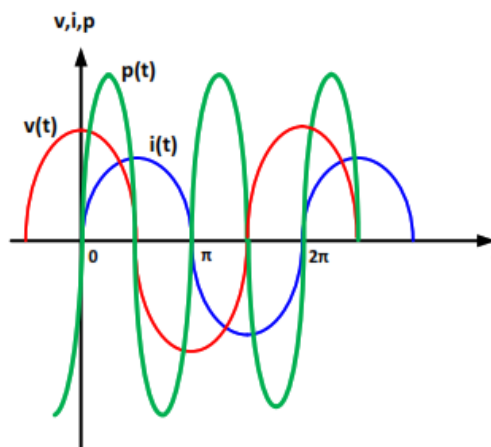
2. Daya Reaktif

a) Daya yang diserap oleh Reaktansi induktif (X_L)



Gambar 6.5 Rangkaian dengan impedansi $Z = jX_L$

Gambar 6.6 memperlihatkan gelombang tegangan sesaat, arus sesaat dan daya sesaat pada rangkaian induktif murni



Gambar 6.6 Gambar Gelombang Daya Sesaat pada induktansi

Daya sesaat :

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = i(t) \cdot L \frac{di(t)}{dt}$$

$$p(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t) \times L \omega \sqrt{2}I \cos(\omega t)$$

$$p(t) = I^2 \omega L 2 \sin(\omega t) \times \cos(\omega t)$$

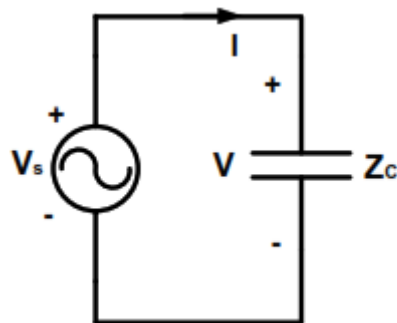
$$p(t) = I^2 \omega L \sin(2\omega t)$$

$$p(t) = I^2 X_L \sin(2\omega t)$$

Daya reaktif adalah daya maksimum dari daya sesaat pada induktor

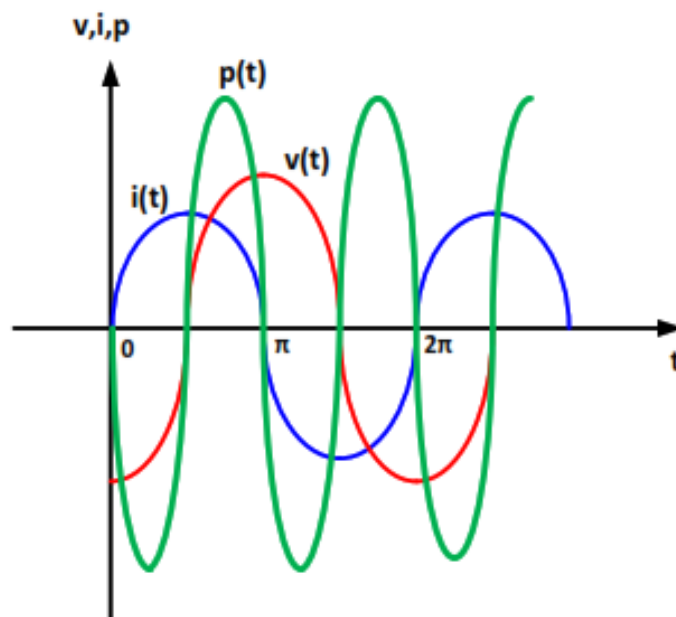
$$Q_L = I^2 X_L$$

b) Daya yang diserap oleh Reaktansi Kapasitif (X_C)



Gambar 6.7 Rangkaian dengan impedansi $Z = -j X_C$

Gambar 6.8 memperlihatkan gelombang tegangan sesaat, arus sesaat dan daya sesaat pada rangkaian kapasitif murni.



Gambar 6.8 Gambar Gelombang Daya Sesaat pada Kapasitansi

Daya sesaat :

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = i(t) \cdot \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt$$

$$p(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t) \times \frac{1}{\omega C} \sqrt{2} I \{-\cos(\omega t)\}$$

$$p(t) = I^2 \frac{1}{\omega C} \cdot -2 \sin(\omega t) \times \cos(\omega t)$$

$$p(t) = -I^2 \frac{1}{\omega C} \sin(2\omega t)$$

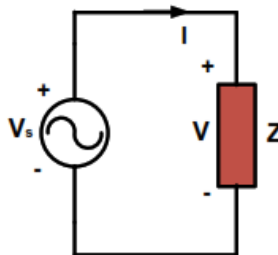
$$p(t) = -I^2 X_C \sin(2\omega t)$$

Daya reaktif adalah daya maksimum dari daya sesaat pada kapasitor

$$Q_C = -I^2 X_C$$

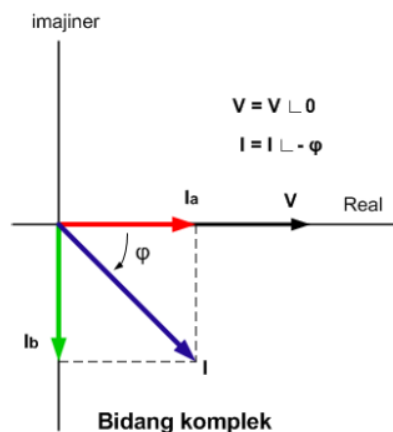
D. Perhitungan Daya dalam Bilangan Kompleks

Menghitung daya nyata (Riel) dan daya buta (imajiner) pada bidang kompleks.



Gambar 6.9 Rangkaian dengan impedansi $Z = R + jX$

Apabila fasor tegangan dan fasor arus digambarkan dalam bidang kompleks, terlihat pada gambar 6.10



Gambar 6.10 Tegangan dan Arus pada Bidang Komplek

$$\cos \varphi = \frac{I_a}{I} \quad \text{maka : } I_a = I \cos \varphi$$
$$\sin \varphi = \frac{I_b}{I} \quad \text{maka : } I_b = I \sin \varphi$$

1. Daya Nyata

Daya nyata dapat dihitung dari daya pada sumbu riil, yang besarnya sebagai berikut :

$$P = V I_a$$

$$P = VI \cos \varphi \text{ (W)}$$

V : Tegangan efektif

I : Arus efektif

Cos φ : faktor daya (power factor)

φ : beda fasa antara tegangan V dan arus I

2. Daya Reaktif (imajiner)

Daya reaktif dapat dihitung dari daya pada sumbu imajiner, yang besarnya sebagai berikut :

$$P = V I_b$$

$$P = VI \sin \varphi \text{ (VAR)}$$

V : Tegangan efektif

I : Arus efektif

φ : beda fasa antara tegangan V dan arus I

Q (+) : Rangkaian bersifat induktif

Q (-) : Rangkaian bersifat kapasitif

3. Daya Semu

Daya semu merupakan gabungan antara daya nyata dan daya reaktif

Daya Komplek :

$$S = P + jQ$$

$$S = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi$$

Besarnya daya komplek :

$$S^2 = (VI \cos \varphi)^2 + (VI \sin \varphi)^2$$

$$= (VI)^2 \times (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

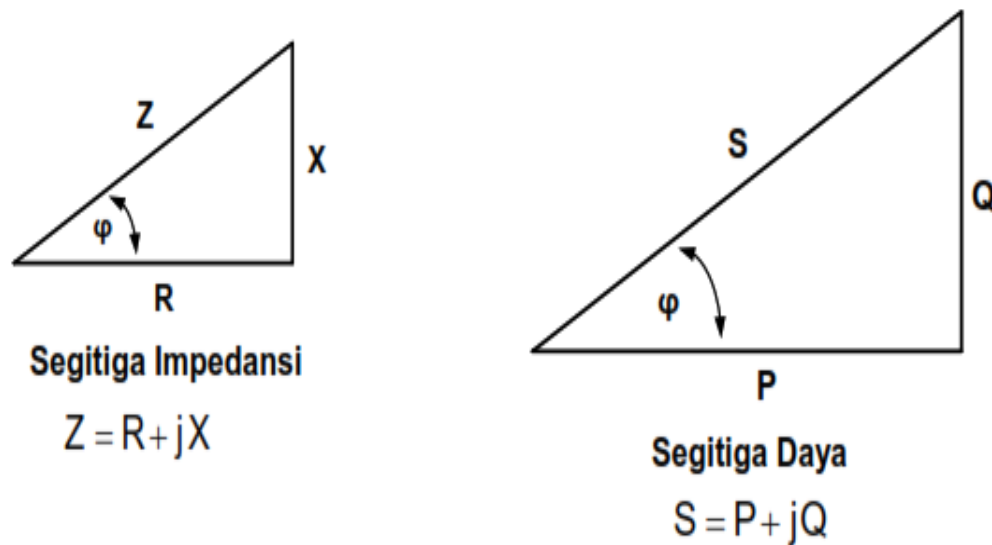
$$S^2 = (VI)^2$$

$$S = VI \text{ (VA)}$$

Besarnya daya kompleks disebut daya semu , jadi daya semu dapat dituliskan :

$$S = V I \text{ (VA)}$$

Dalam menghitung daya dalam rangkaian arus bolak-balik dapat diturunkan dari segitiga impedansi ke segitiga daya, seperti tertera pada gambar 6.11



Gambar 6.11 Segitiga Impedansi dan Segitiga Daya

$$\begin{aligned} S &= I^2 Z \\ &= I^2 (R + jX) \\ &= I^2 R + jI^2 X \\ S &= P + jQ \end{aligned}$$

Daya nyata :

$$P = I^2 R$$

Daya reaktif :

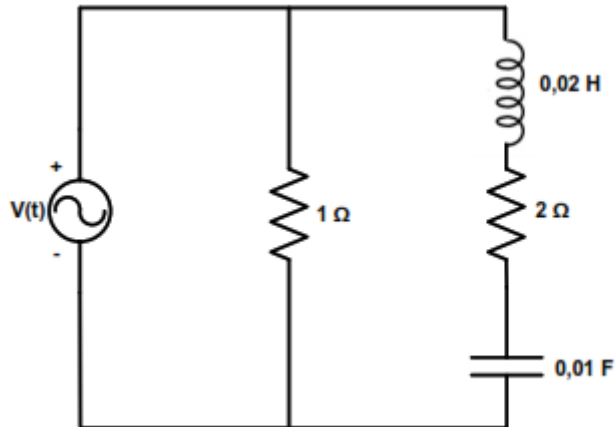
$$Q = I^2 X$$

Daya reaktif positif $Q (+)$, apabila $X = X_L$ (reaktansi induktif), artinya menyerap daya reaktif sedangkan daya reaktif negatif $Q (-)$, apabila $X = X_C$ (reaktansi kapasitif), artinya memberikan daya reaktif.

Contoh Soal :

1. Rangkaian elektrik, dengan sumber tegangan sinusoida :

$$v(t) = 20\cos(100t + 30^\circ)$$



Hitung daya nyata, daya reaktif dan daya semu yang diserap oleh unsur rangkaian.

Solusi :

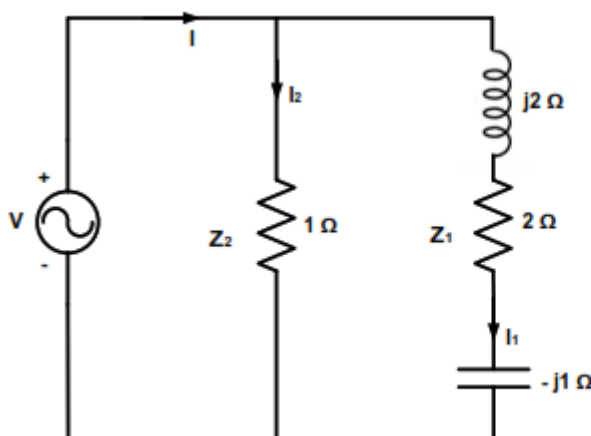
$$v(t) = 20\cos(100t + 30^\circ), \text{ maka fasor tegangan : } V_m = 20 \angle 30^\circ \text{ volt}$$

$$\omega = 100$$

$$Z_L = j\omega L = j100 \times 0,02 = j.2 \Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{100 \times 0,01} = -j.1 \Omega$$

Rangkaian daerah frekuensi :



$$Z_1 = j.2 + 2 + (-j.1) = 2 + j1$$

$$Z_1 = 2,23 \angle 26,56^\circ$$

$$Z_2 = 1$$

Fasor tegangan efektif :

$$V_m = 20 \angle 30^\circ$$

$$V = 0,707 \times 20 \angle 30^\circ$$

$$V = 14,14 \angle 30^\circ \text{ V}$$

Besar arus yang mengalir :

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{14,14 \angle 30^\circ}{2,23 \angle 26,56^\circ} = 6,34 \angle 3,44^\circ$$
$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{14,14 \angle 30^\circ}{1} = 14,14 \angle 30^\circ$$

Daya reaktif :

(daya yang diserap oleh unsur reaktansi)

$$\begin{aligned} Q &= Q(X_L) + Q(X_C) \\ &= (I_1)^2 X_L + [-(I_1)^2 X_C] \\ &= (6,34)^2 \times 2 - (14,14)^2 \times 1 \\ &= 80,40 - 40,20 \\ Q &= 40,20 \text{ VAR} \end{aligned}$$

Daya semu :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \sqrt{280,40^2 + 40,20^2} \\ S &= 282,80 \text{ VA} \end{aligned}$$

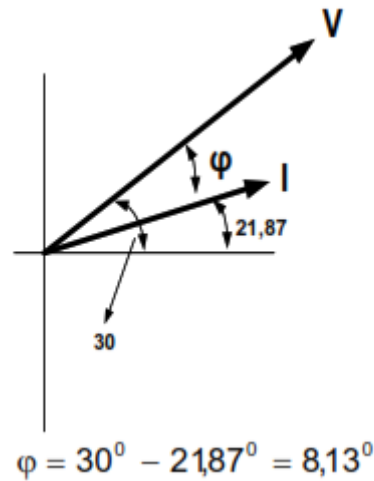
Cara lain:

Impedansi Total (Z)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(2 + j1) \times 1}{2 + j1 + 1} \\ &= \frac{2 + j1}{3 + j1} = \frac{2,23 \angle 26,56^\circ}{3,16 \angle 18,40^\circ} \\ &= 0,707 \angle 8,13^\circ \end{aligned}$$

Besar arus yang diberikan oleh sumber tegangan :

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{14,14 \angle 30^\circ}{0,707 \angle 8,13^\circ} \\ I &= 20 \angle 21,87^\circ \\ P &= VI \cos \phi = 14,14 \times 20 \times \cos 8,13^\circ \\ P &= 280 \text{ watt} \\ Q &= VI \sin \phi = 14,14 \times 20 \times \sin 8,13^\circ \\ Q &= 40 \text{ VAR} \\ S &= VI = 14,14 \times 20 = 282,80 \text{ VA} \end{aligned}$$



2. Lampu TL Neon

Daya : 20 W

Tegangan : 220 V

Frekuensi : 50 Hz.

$\cos \phi$: 0,35

Tentukan beban lampu TL dalam bentuk impedansi, serta gambar rangkaiannya.

Solusi :

Pada lampu TL terdapat induktor, sehingga merupakan rangkaian yang bersifat induktif, jadi impedansinya :

$$Z = R + j X_L$$

$$P = VI \cos \phi, \text{ maka:}$$

$$I = \frac{P}{V \cos \phi} = \frac{20}{220 \times 0,35} = 0,259 \text{ A}$$

$$V = 220 \angle 0^\circ$$

$$I = 0,259 \angle -\cos^{-1} 0,35$$

$$I = 0,259 \angle -69,50^\circ$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220 \angle 0^\circ}{0,259 \angle -69,50^\circ}$$

$$Z = 849,42 \angle 69,50^\circ$$

$$Z = 297,40 + j795,60 \ \Omega$$

Dihitung dengan cara lain :

Daya nyata :

$$P = I^2 R, \text{ maka:}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{20}{(0,259)^2}$$

$$R = 298,10$$

Daya reaktif :

$$Q = V i \sin \phi = 220 \times 0,259 \times \sin 69,50^\circ$$

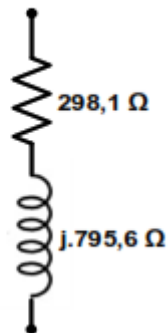
$$Q = 53,37 \text{ VAR}$$

$$Q = I^2 X_L, \text{ maka:}$$

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{53,37}{(0,259)^2}$$

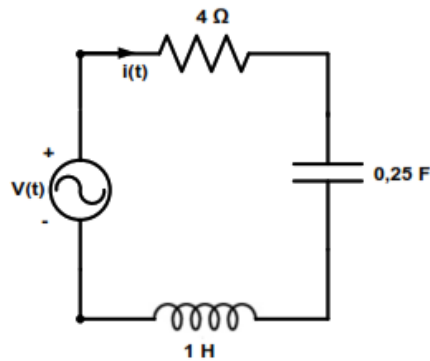
$$X_L = 795,60$$

$$Z = 298,10 + j795,60 \text{ } \Omega$$



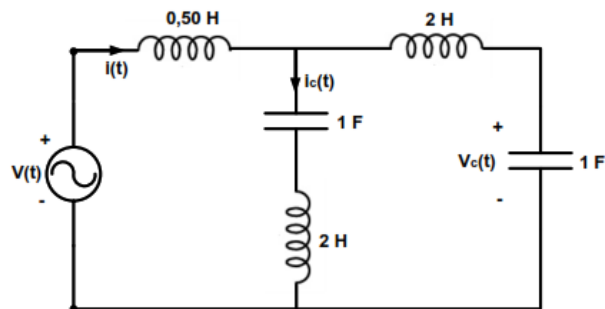
EVALUASI

1. Pada rangkaian elektrik berikut, diketahui sumber tegangan $V(t) = 5 \cos 20t$ V, hitung arus sesaat $i(t)$:



2. Dalam rangkaian berikut diketahui sumber tegangan

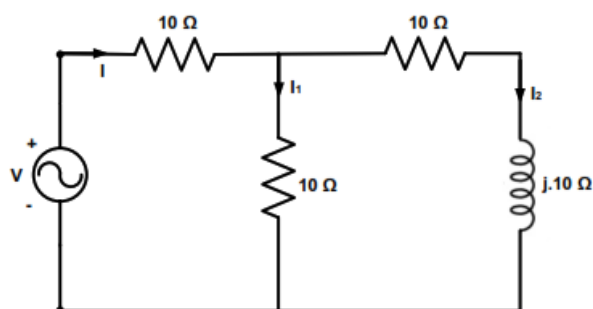
$$v(t) = 50 \cos(10t - 30^\circ) \text{ V}$$



- a. Hitung arus efektif dan arus sesaat (i dan i_c)
 - b. Hitung tegangan sesaat $v_c(t)$
3. Pada rangkaian elektrik, diketahui tegangan efektif dari sumber tegangan :

$$V = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Hitung arus efektif : I , I_1 , dan I_2



Topik 7

LIMIT DAN TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar limit dan turunan pada fungsi kompleks
2. Mahasiswa mampu memahami teorema dan tahapan dalam menyelesaikan permasalahan limit dan turunan pada fungsi kompleks
3. Mahasiswa memahami konsep dasar persamaan Cauchy Riemann.
4. Mahasiswa mampu menggunakan persamaan Cauchy Riemann dalam menyelesaikan permasalahan turunan dari fungsi kompleks

A. Fungsi dengan Variabel Kompleks

Misalkan S himpunan bilangan kompleks. Fungsi kompleks f pada S adalah aturan yang mengawankan setiap $z \in S$ dengan bilangan kompleks w . Dan dinotasikan dengan $w = f(z)$. Dalam hal ini, S disebut domain dari f dan z dinamakan peubah/variabel kompleks.

Peubah Kompleks z ialah suatu titik umum dari himpunan tertentu pada bidang datar. Fungsi Peubah kompleks secara formal didefinisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan kompleks (z, w) yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Hal ini berarti ada proses pemadanan yang mengawankan setiap nilai peubah z ke nilai w yang tunggal. Misalkan $w = u + iv$ adalah nilai fungsi f di $z = x + iy$, sehingga :

$$u + iv = f(x + iy)$$

Masing-masing bilangan riil u dan v bergantung pada variabel riil x dan y sehingga $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel riil x dan y , yaitu

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Jika koordinat polar r dan θ pada x dan y digunakan, maka

$$u + iv = f(re^{i\theta})$$

dimana $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$. Sehingga $f(z)$ dapat ditulis menjadi

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

Contoh Soal

Misalkan $w = f(z) = z^2 + 3z$

Tentukan u dan v serta hitung nilai dari f pada $z = 1 + 3i$. Nyatakan juga u dan v dalam bentuk polar.

Penyelesaian :

Misal $z = x + iy$, sehingga

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 + 3(x + iy) = x^2 + 3x - y^2 + i(2xy + 3y)$$

Jadi $u = x^2 + 3x - y^2$ dan $v = 2xy + 3y$.

Untuk $z = 1 + 3i$ maka $f(z) = f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = -5 + 15i$.

Jadi $u(1,3) = -5$ dan $v(1,3) = 15$.

Jika koordinat polar digunakan dimana $z = re^{i\theta}$, maka

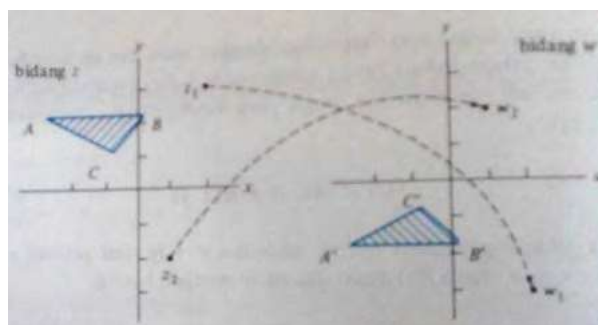
$$\begin{aligned} f(z) &= f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 + 3(re^{i\theta}) = r^2 e^{2i\theta} + 3re^{i\theta} \\ &= r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta + 3r \cos \theta + 3ir \sin \theta \\ &= r^2 \cos 2\theta + 3r \cos \theta + i(r^2 \sin 2\theta + 3r \sin \theta) \end{aligned}$$

Jadi $u = r^2 \cos 2\theta + 3r \cos \theta$ dan $v = r^2 \sin 2\theta + 3r \sin \theta$.

B. Geometri Bilangan Kompleks

Misalkan sebuah fungsi kompleks $w = f(z)$. Menurut definisi, setiap nilai peubah bebas $z = x + iy$ (dalam domain f) akan menghasilkan nilai tunggal $w = uu + iv$ sebagai peubah tak bebas. Masing-masing peubah mempunyai dua dimensi, sehingga gabungan dari keduanya akan menghasilkan besaran empat dimensi yang sulit untuk digambarkan.

Oleh karena itu grafik fungsi kompleks diwakili oleh dua bidang kompleks yang sering disebut dengan bidang z dan bidang w . Artinya jika diketahui $w = f(z)$ untuk setiap $z = x + iy$ dalam domainnya bidang z , dihitung padanannya $w = uu + iv$ dan ditempatkan di bidang w . Proses yang sama diulang untuk setiap nilai z dalam himpunan S dalam domain f akan menghasilkan “bayangan S dibawah f ” pada bidang w .



Gambar 7.1 Grafik Fungsi Bilangan Kompleks

Gambar diatas adalah gambar fungsi $w = z$. Untuk setiap nilai dari peubah bebas yaitu $z = x + iy$ diperoleh $w = x - iy$. Misalkan $z_1 = 2 + 3i$ akan menghasilkan $w_1 = 2 - 3i$ kemudian $z_2 = 1 - 2i$ akan menghasilkan $w_2 = 1 + 2i$.

C. Limit Fungsi Kompleks

Secara umum definisi limit dalam kompleks sama dengan definisi limit pada bilangan riil dalam kalkulus. Kalau pada bilangan riil bila x mendekati x_0 hanya mendekati sepanjang garis riil sedangkan pada bilangan kompleks bila z mendekati z_0 akan mendekati dari semua arah dalam bidang kompleks.

Definisi Limit Fungsi Kompleks

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ dibaca “limit $f(z)$ untuk z menuju z_0 sama dengan w_0 ”,

dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta$$

berlaku $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Secara geometri definisi di atas mengatakan bahwa untuk setiap lingkungan- ε dari w_0 , yaitu $|w - w_0| < \varepsilon$ ada suatu lingkungan- δ dari z_0 , yaitu $0 < |z - z_0| < \delta$ sedemikian sehingga setiap titik z pada image w berada pada lingkungan- ε .

Dalam hal ini

- Jika limit tersebut ada, maka limitnya tunggal
- z mendekati z_0 dari berbagai arah atau lintasan
- Jika untuk lintasan yang berbeda, nilai $f(z)$ untuk z menuju z_0 berbeda maka $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ tidak ada
- $f(z)$ tidak disyaratkan terdefinisi di $z = z_0$

Contoh Soal

Misalkan $f(z) = \frac{z}{z}$. Buktikan $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ tidak ada.

Bukti :

Akan ditunjukkan nilai limit dengan lintasan yang berbeda.

- Pendekatan sepanjang sb- x positif, dalam hal ini $y = 0$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy} = \lim_{(x,0)} \frac{x + i.0}{x - i.0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

- Pendekatan sepanjang sb- y positif, dalam hal ini $x = 0$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0+iy}{0-iy} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1.$$

- Pendekatan sepanjang garis $y = x$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+ix}{x-ix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+i)}{x(1-i)} = \frac{1+i}{1-i}.$$

Karena pendekatan sepanjang arah yang berbeda menghasilkan nilai yang tidak sama maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{z}{z}$ tidak ada.

Teorema Limit Kompleks

1. Diberikan fungsi kompleks f dan g yang terdefinisi pada daerah $S \subset \mathbb{C}$ dengan $z_0 \in S'$

Jika $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ dan $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$, maka

a) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = L + M$

b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - g(z)) = L - M$

c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = L \cdot M$

d) $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{L}{M}$

e) $\lim_{z \rightarrow z_0} k \cdot f(z) = k \cdot L, k \in \mathbb{C}$

f) $\lim_{z \rightarrow z_0} k = k, k : \text{konstanta}$

2. Diberikan $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ terdefinisi pada daerah $S \subset \mathbb{C}$ dengan $z_0 = (x + yi) \in S'$

Maka: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A + Bi$ jika dan hanya jika $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x,y) = A$ dan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x,y) = B$$

atau

Misalkan $z = x+yi$ dan $f(z) = u + vi$ dengan domain $S \subset \mathbb{C}$. Titik $z_0 = (x_0 + y_0 i) \in S' \subset \mathbb{C}$

Maka $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = x_0 + y_0 i$ Jika dan hanya jika $\lim_{z \rightarrow z_0} u(x,y) = x_0$ dan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} v(x,y) = y_0.$$

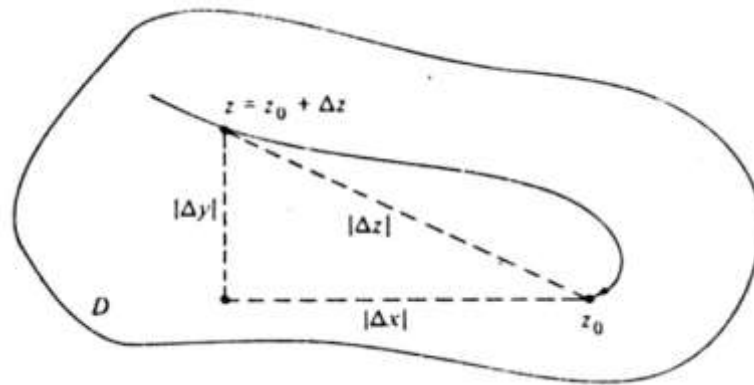
Contoh Soal

Hitung $\lim_{z \rightarrow (1+i)} (z^2 - 5z + 10)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow (1+i)} (z^2 - 5z + 10) &= \lim_{x \rightarrow (x+i)} z^2 - \lim_{x \rightarrow (x+i)} 5z + \lim_{x \rightarrow (x+i)} 10 \\ &= (1+i)^2 - 5(1+i) + 10 \\ &= 1+2i-1-5-5i+10 \\ &= 5-3i\end{aligned}$$

D. Turunan Fungsi Kompleks



Gambar 7.2 Turunan Fungsi Bilangan Kompleks

Dari gambar diatas, misalkan fungsi kompleks $w = f(z)$, titik z_0 berada dalam domain D bagi f . Andaikan

$$z = z_0 + \Delta z \qquad \Delta z = \Delta x + \Delta yi$$

Adalah suatu titik di dalam D , kemudian dibentuk hasil beda

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jika limit hasil bagi ini ada untuk $z \rightarrow z_0$, maka dikatakan $w = f(z)$ dapat dideferensialkan di z_0 , limitnya dinamakan turunan f di z_0 dan dinotasikan dengan $w'(z)$ atau $f'(z)$.

Dari penjelasan diatas, $w = f(z)$ dikatakan terdeferensialkan di z_0 asalkan limit dari $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ada. Hal ini bisa dituliskan dengan

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Perhatikan bahwa $f'(z)$ adalah bilangan kompleks. Jika titik khusus z_0 tidak perlu di sebutkan, turunan seringkali dinotasikan dengan

$$\frac{df}{dz} \quad \text{atau} \quad \frac{dw}{dz}$$

Ada dua bentuk yang sering digunakan dalam mendefinisikan turunan dari $w = f(z)$ yaitu

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Dan

$$w'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

Turunan dapat diperoleh dengan cara langsung menerapkan definisi. Cara seperti ini sama dengan yang digunakan pada kalkulus. Ada cara-cara yang lebih cepat dalam menghitung turunan suatu fungsi. Cara-cara tersebut diturunkan dari definisi turunan dan sering disebut sebagai teknik turunan.

Contoh Soal :

Dengan menggunakan definisi, dapatkan turunan dari $f(z) = z^2 + 3z$

Penyelesaian

Substitusikan fungsi yang akan diturunkan ke dalam definisi turunan

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 + 3(z + \Delta z) - (z^2 + 3z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 + 3z + 3\Delta z - z^2 - 3z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2 + 3\Delta z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z + \Delta z + 3 \\ &= 2z + 3 \end{aligned}$$

Teknik Turunan

Jika setiap menghitung turunan digunakan definisi, maka waktu yang diperlukan waktu yang cukup lama untuk menyelesaikan beberapa turunan. Oleh karena itu dikembangkan apa yang disebut teknik turunan yang dikembangkan dari definisi turunan. Dengan menggunakan teknik turunan ini waktu yang digunakan dalam menghitung turunan suatu fungsi kompleks lebih singkat. Tidak semua teknik diberikan bukti generalisasinya dari definisi turunan, beberapa teknik bisa digeneralisasikan sendiri dari definisi turunan sebagai latihan. Teknik-teknik tersebut meliputi:

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta z} \\&= 0\end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{d}{dz}(z) = 1$$

Bukti :

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(c + \Delta z) - c}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} \\&= 1\end{aligned}$$

$$3. \quad \frac{d}{dz}[c(f(z))] = cf'(z)$$

$$4. \quad \frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}$$

Bukti :

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-1}z_0 + \dots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\&= \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-1}z_0 + \dots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\&= nz_0^{n-1}\end{aligned}$$

Teorema

Andaikan bahwa f dan g dapat diturunkan pada setiap titik z dalam himpunan S dan bahwa f dapat diturunkan pada $g(z)$ untuk setiap z dalam S , maka

5. $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$
6. $\frac{d}{dz}[f(z) - g(z)] = f'(z) - g'(z)$
7. $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

Contoh Soal :

Tentukan Fungsi turunan berikut

$$f(z) = (2z^2 + i)^5$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan persamaan teorema (3) dan aturan rantai diperoleh :

$$\frac{d}{dz}[c(f(z))] = cf'(z)$$

$$f'(z) = 5(2z^2 + i)^4 \cdot 4z = 20z(2z^2 + i)^4$$

Contoh Soal :

Tentukan Fungsi turunan berikut

$$f(z) = \frac{(z-i)}{z+i} \text{ pada } i$$

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan turunan (8) diperoleh

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

$$f'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} = \frac{1(z+i) - (z-i)1}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

Sehingga untuk $z = i$ diperoleh

$$f'(i) = \frac{2i}{(i+i)^2} = \frac{2i}{4i^2} = -\frac{1}{2}i.$$

Aturan Mata Rantai

Misalkan f mempunyai turunan di z_0 , dan g mempunyai turunan di $f(z_0)$. Maka fungsi $F(z) = g[f(z)]$ mempunyai turunan di z_0 , dan turunannya adalah

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)] \cdot f'(z_0).$$

Dengan kata lain, jika $w = f(z)$ dan $W = g(w) = F(z)$, maka menurut aturan rantai

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \frac{dw}{dz}.$$

Contoh Soal :

Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = (2z^2 + i)^5$ dengan menggunakan aturan rantai!

Penyelesaian

Misalkan $w = 2z^2 + i$ dan $W = w^5$. Maka menurut aturan rantai

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \frac{dw}{dz} = (5w^4)(4z) = 20z(2z^2 + i)^4$$

E. Persamaan Cauchy Riemann

Persamaan Cauchy – Riemann merupakan persamaan yang sangat penting pada analisis kompleks karena persamaan ini digunakan untuk menguji keanalitikan suatu fungsi kompleks dengan nilai $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Pada pasal ini akan mengembangkan syarat perlu dan cukup agar suatu fungsi yang diberikan mempunyai turunan. Hal ini dicapai melalui dua teorema. Teorema pertama memberikan rumus untuk turunan asal turunan itu ada. Sedangkan teorema kedua memuat syarat cukup yakni jika dipenuhi oleh fungsi yang diberikan akan menjamin adanya turunan fungsi dan teorema ini menyatakan lokasi dimana turunan itu berada.

Sebelum membahas kedua teorema tersebut perhatikan gejala berikut.

Misalkan diberikan $f(z) = z^2$, dengan menggunakan definisi turunan diperoleh:

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{w^2 - z^2}{w - z} = 2z$$

Misalkan $z = x + iy$, diperoleh

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

Jadi, $u(x,y) = x^2 - y^2$ dan $v(x,y) = 2xy$

Turunan parsial pertama dari u dan v adalah

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = -2y, \quad v_x(x, y) = 2y, \quad \text{dan } v_y(x, y) = 2x$$

Fungsi u , v , u_x , u_y , v_x dan v_y semuanya kontinu pada $\mathbb{R}^2$, karena masing-masing merupakan fungsi polinom. Dari turunan parsial pertama dapat dibentuk hubungan berikut

$$u_x = v_y = 2x \quad \text{dan} \quad u_y = -v_x = -2y$$

Dari persamaan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa jika $f'(z) = 2z$, diperoleh

$$f'(z) = 2(x + iy) = 2x + 2iy = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Dengan melihat gejala tersebut di atas diturunkan suatu teorema yang disajikan di bawah ini yang disebut dengan persamaan Cauchy Reimann.

PERSAMAAN CAUCHY REIMANN

1. Definisi

Fungsi f dikatakan analitik pada domain D jika dan hanya jika turunan parsial pertama dari u dan v memenuhi persamaan Cauchy – Riemann, yaitu

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

$$\text{dengan } u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. Teorema

Teorema 1

Diberikan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdefinisi pada region $D \subseteq \mathbb{C}$ dan

$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Jika $f'(z_0)$ ada, maka

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

sehingga persamaan Cauchy Reimann berlaku yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Bukti :

Karena $f'(z_0)$ ada, maka sepanjang $\Delta y = 0$ diperoleh :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)]}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Dengan memilih kurva $\Delta x = 0$, secara sama akan diperoleh bahwa

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Teorema kedua memuat syarat cukup yakni jika dipenuhi oleh fungsi yang diberikan akan menjamin adanya turunan fungsi dan teorema ini menyatakan lokasi dimana turunan itu berada.

Teorema 2

Diberikan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdefinisi pada region $D \subseteq C$ dan $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.

Jika

- (1) fungsi $u(x, y)$, $v(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $v_x(x, y)$, dan $v_y(x, y)$, semuanya kontinu di titik $z_0 = (x_0, y_0)$
- (2) memenuhi persamaan Cauchy Reimann
 $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ dan $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$
maka $f'(z_0)$ ada dan
 $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$

Bukti:

Misalkan $f'(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, maka untuk sebarang titik $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ pada $N(z_0, r)$ diperoleh

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

$$\text{dengan } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ dan } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Selain itu, diperoleh

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \gamma(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \delta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

$$\text{Dengan } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \gamma(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ dan } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \delta(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Menurut hipotesis (2), dua relasi diatas menjadi:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y \dots \dots \dots (i)$$

dan

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \gamma (\Delta x, \Delta y) \Delta x + \delta (\Delta x, \Delta y) \Delta y \dots \dots \dots (ii)$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] \\ &= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] \\ &= \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

Menurut (i) dan (ii), persamaan itu menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{\Delta z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\Delta y}{\Delta z} i + (\alpha + i\gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{\Delta y}{\Delta z} i \right) + (\alpha + i\gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\alpha + i\gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \dots \dots \dots (iii) \end{aligned}$$

Berdasarkan relasi (iii), diambil limitnya untuk $\Delta z \rightarrow 0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + (\alpha + i\gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \\ f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + (\alpha + i\gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \end{aligned}$$

karena $\Delta z \rightarrow 0$ maka $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta y \rightarrow 0$ serta semua $\alpha, \beta, \gamma, \delta \rightarrow 0$, sehingga diperoleh $\alpha + i\gamma \rightarrow 0$ dan $\beta + i\delta \rightarrow 0$.

Karena $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1$ dan $\left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1$, diperoleh

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dengan cara sama, diperoleh

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Catatan:

- (a) Pada teorema 2 terdapat beberapa hal penting untuk diperhatikan, yaitu
 - konvers dari teorema tersebut salah
 - dapat terjadi persamaan Cauchy Reimann dipenuhi, tetapi $f'(z_0)$.
 - syarat (2) yaitu persamaan cauchy reimann merupakan syarat perlu tetapi tidak cukup untuk eksistensi $f'(z_0)$
- (b) Teorema 2 menyatakan sebagai konverse dari teorema 1, yaitu jika $f'(z_0)$ ada, maka persamaan Cauchy Reimann dipenuhi. Tetapi terdapat suatu fungsi yang mempunyai turunan tetapi fungsi komponennya u dan v serta turunan parsial tidak semuanya kontinu.

Bentuk Polar Persamaan Cauchy-Reimann

Misalkan terdapat suatu fungsi kompleks $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ dengan

$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, dimana $u = u(r, \theta) = r \cos \theta$ dan $v = r \sin \theta$. Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \cos \theta & \text{dan} & \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \sin \theta & \text{dan} & \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \sin \theta \end{aligned}$$

maka

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Contoh Soal :

Diberikan fungsi $f(z) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Perlihatkan bahwa $f'(0)$ ada tetapi $\frac{\partial u}{\partial x}$ tak kontinu di $(0, 0)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Penyelesaian :

Misalkan $u(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Dan $v(x, y) = 0$, untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Diperoleh : } \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$f(u) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{Misal } \rightarrow x^2 = p \quad p' = 2x$$

$$\sin \frac{1}{x} = p \quad q' = \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$q' = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p'q + pq' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\text{Sehingga diperoleh } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin \frac{1}{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{1}{x} \\ &= 0 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{1}{x} \\ &= - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{1}{x} \text{ tidak ada} \end{aligned}$$

Karena $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$, maka $\frac{\partial u}{\partial x}$ tak kontinu di $(0,0)$

$$\begin{aligned} \text{Tetapi, } f'(0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\Delta z)^2 \sin \frac{1}{\Delta z}}{\Delta z} \\ f'(0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \sin \frac{1}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 0 \sin \frac{1}{\Delta z} = 0 \end{aligned}$$

Contoh Soal

Gunakan persamaan Cauchy-Riemann untuk membuktikan bahwa turunan $f(z) = z^2$ ada untuk semua z dan bahwa $f'(z) = 2z$.

Penyelesaian :

Dengan menuliskan f dalam bentuk $u + iv$ diperoleh

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Jadi

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 & v(x,y) &= 2xy \\ u_x &= 2x & v_x &= 2y \\ u_y &= -2y & v_y &= 2x \end{aligned}$$

Enam fungsi diatas jelas kontinu pada setiap titik $z = (x,y)$ pada bidang datar, kemudian

$$u_x = v_y = 2x \quad \text{dan} \quad v_x = 2y = -u_y$$

Untuk semua (x,y) . Ini berarti teorema 5.1 terpenuhi, artinya $f'(z)$ ada untuk semua z . Hal ini berimplikasi pada terpenuhinya teorema 5.2 untuk semua z .

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2yi = 2(x + iy) = 2z$$

Contoh Soal

Tentukan titik-titik yang membuat $f(z) = x^2 - iy^2$ mempunyai turunan. Jika $f'(z)$ nya ada tentukan nilainya

Penyelesaian :

Untuk $f(z) = x^2 - iy^2$ maka

$$\begin{aligned}u(x, y) &= x^2 & v(x, y) &= -y^2 \\u_x &= 2x & v_x &= 0 \\u_y &= 0 & v_y &= -2y\end{aligned}$$

Enam fungsi diatas jelas kontinu pada setiap titik $z = (x, y)$ pada bidang datar, kemudian

$$u_x = v_y = 2x = -2y \quad \text{dan} \quad v_x = -u_y = 0$$

Persamaan Cauchy-Riemann akan terpenuhi jika $2x = -2y$, dan hal akan terpenuhi jika $y = -x$. Jadi menurut Teorema 5.1 f' ada hanya pada titik-titik pada garis $y = -x$. Selanjutnya dengan teorema 5.2 diperoleh bahwa

$$f' = u_x + iv_x = 2x \quad \text{atau} \quad f' = v_y - iu_y = -2y$$



EVALUASI

1. Tentukan fungsi turunan berikut :
 - a. $(2z^4 + i)^3$
 - b. $(4z^2 + i)^5$

2. Tentukan nilai dari :
 - a. $\lim_{z \rightarrow (1+i)} (z^4 - 3z + 15)$
 - b. $\lim_{z \rightarrow (1+i)} (z^5 + 5z + 20)$

3. Gunakan persamaan Cauchy Riemann untuk menyelesaikan permasalahan dibawah ini :
 - a. $f(z) = x + iy^2$
 - b. $f(z) = 4x^2 + 2y^2 - 2xyi$

Modul 8

Integral Fungsi Kompleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar integral fungsi kompleks
2. Mahasiswa mampu memahami teorema eksistensi integral pada fungsi kompleks
3. Mahasiswa memahami sifat-sifat dasar fungsi kompleks.
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan matematis menggunakan integral kompleks

A. Lintasan Bidang Kompleks

Definisi Kurva:

Kurva C di bidang kompleks dapat dinyatakan secara parametrik sebagai daerah hasil fungsi dari suatu selang di $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{C}$, yaitu

$$\begin{aligned}\rho &: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z(t) = x(t) + iy(t),\end{aligned}$$

Kurva C disebut kurva mulus (*smooth curve*) jika $x'(t)$ dan $y'(t)$ ada dan kontinu dari $\forall t \in [a, b]$. Pada definisi tersebut, $\rho(a)$ disebut titik awal (*initial point*) dan $\rho(b)$ adalah titik akhir (*terminal point*).

Contoh :

1. Persamaan lingkaran di bidang kompleks yang dinyatakan sebagai :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

dapat dinyatakan dalam beberapa persamaan kurva terparametrisasi berikut ini.

$$C1 : x = r \cos t + a; y = r \sin t + b; t \in [0; 2\pi] \text{ atau}$$

$$C2 : x = r \cos t + a; y = r \sin t + b; t \in [-\pi; \pi] \text{ atau}$$

$$C3 : x = r \cos 2t + a; y = r \sin 2t + b; t \in [0; \pi].$$

Dengan demikian, persamaan lingkaran di bidang kompleks dapat dinyatakan secara parametrik sebagai

$$\begin{aligned}z &= x + iy = (r \cos t + a) + i(r \sin t + b) = r(\cos t + i \sin t) + (a + ib) \\ &= re^{it} + z_0 = re^{it} + z_0,\end{aligned}$$

Atau $z - z_0 = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

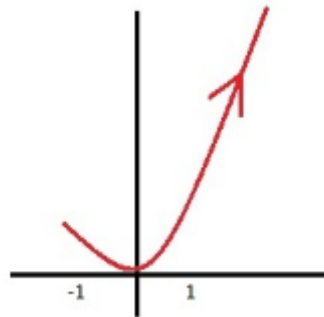
Selain itu, persamaan lingkaran di bidang kompleks dapat pula ditulis sebagai

$$\|z - z_0\| = r,$$

atau dengan perkataan lain z merupakan titik-titik di bidang kompleks yang berjarak r dari z_0 .

2. Parametrisasi kurva berbentuk parabola $y = x^2$ dari titik $(-1,1)$ ke $(2,4)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\rho(t) = x(t) + iy(t) = t + it^2, \quad t \in [-1, 2].$$

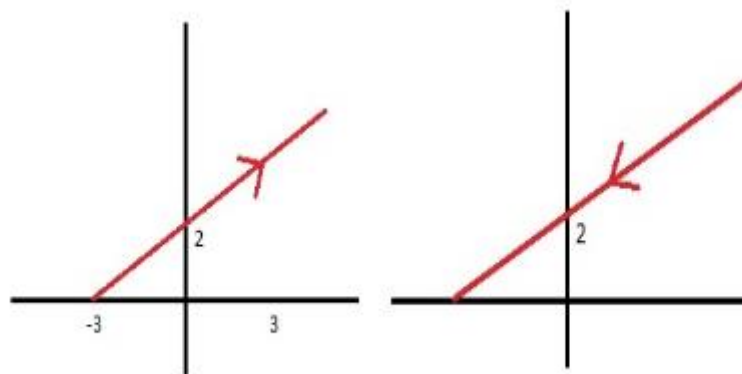


3. Kurva C yang merupakan ruas garis yang menghubungkan $z = -3$ dan $z = 3 + 2i$ merupakan bagian dari garis yang memiliki persamaan

$$y = \frac{1}{3}x + 1,$$

Sehingga secara parametrik kurva tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$C : x(t) = t, y(t) = \frac{1}{3}t + 1, \quad t \in [-3, 3].$$



4. Sebaliknya, ruas garis yang berasal dari $z = 3 + 2i$ dan berakhir di $z = -3$ dapat dinyatakan secara parametrik sebagai

$$C : x(t) = -t, y(t) = \frac{1}{3}t + 1; t \in [3; 3].$$

Jika C adalah kurva dengan parameterisasi $\rho(t) = x(t) + iy(t)$ di mana $t \in [a, b]$, maka panjang kurva C adalah :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

B. Lintasan Kompleks

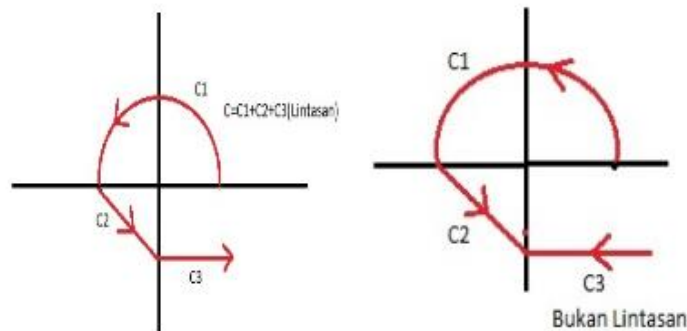
Suatu kurva C disebut lintasan (path) jika C dapat dinyatakan sebagai sejumlah berhingga kurva mulus yang sambung menyambung, yaitu

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n;$$

sedemikian sehingga titik awal dari C_{k+1} sama dengan titik akhir dari C_k . Titik awal lintasan C adalah titik awal dari C_1 , sedangkan titik akhir dari C adalah titik akhir dari C_n .

Lintasan dapat dibedakan menjadi lintasan terbuka dan lintasan tertutup.

1. Lintasan C disebut lintasan terbuka jika titik awal lintasan tidak berimpit dengan titik akhir lintasan.

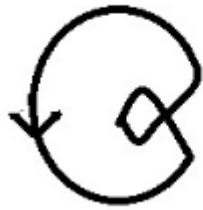


2. Lintasan C disebut lintasan tertutup jika titik awal lintasan berimpit dengan titik akhir lintasan.

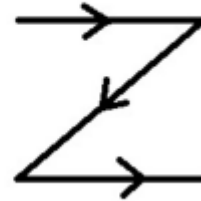
Selain itu, lintasan dibedakan pula menjadi lintasan sederhana dan lintasan berganda.

- a. Lintasan C disebut lintasan sederhana (simple) jika C tidak pernah memotong dirinya sendiri.
- b. Lintasan C disebut lintasan berganda (multiple) jika C memotong dirinya sendiri.

Agar terminologi-terminologi tersebut mudah dipahami, pada Gambar 8.1 diberikan contoh lintasan mulus yang tertutup dan berganda dan lintasan terbuka yang sederhana namun tidak mulus.



(a)



(b)

Gambar 8.1 (a) Lintasan Tertutup, Berganda, Smooth; (b) Lintasan terbuka, simple, tidak smooth

C. Integral Fungsi Kompleks sebagai Integral Garis

Misalkan C adalah lintasan di bidang kompleks dan fungsi $f(z) = u(z) + i v(z)$ terdefinisi di lintasan C . Akan ditentukan $\int_C f(z) dz$ dan sifat-sifatnya.

Definisi Integral Fungsi Kompleks:

Pendefinisian integral fungsi kompleks serupa dengan pendefinisian integral fungsi real, yaitu dengan mengganti selang pengintegralan oleh suatu lintasan. Misalkan C adalah lintasan yang menghubungkan z_0 dan z^* dan $f(z)$ terdefinisi di C . Integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan C didefinisikan sebagai

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

Dengan μ menyatakan panjang maksimum dari busur $Z_k - Z_{k-1}$ dari partisi yang didefinisikan pada C , yaitu $z_0; z_1; z_2 \dots, z_n = z^*$, dan ζ_k adalah sebarang bilangan kompleks yang terletak pada busur $Z_k - Z_{k-1}$.

Jika limit tersebut ada, maka dikatakan nilai $f(z)$ terintegralkan sepanjang lintasan pengintegralan C . Teorema berikut menyatakan syarat yang harus dipenuhi oleh $f(z)$ agar terintegralkan dan bagaimana cara menghitung nilai integralnya.

D. Teorema Eksistensi Integral Fungsi Kompleks

Jika $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ kontinu di setiap titik pada kurva mulus $C : x = \psi(t), y(t) = \xi(t), t \in [a, b]$ maka $\int_C f(z) dz$ ada dan $\int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i \int_C u dy + i \int_C v dx = \int_a^b (ux' - vy' + i(vx' + uy'))dt$

E. Sifat-Sifat Integral Kompleks

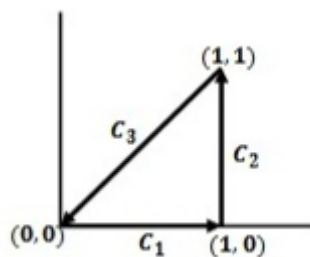
Misalkan k adalah sebarang konstanta kompleks, $C + K$ adalah lintasan yang terdiri dari dua kurva mulus C dan K , dan $f(z)$ maupun $g(z)$ terintegralkan sepanjang kurva C dan K . Maka dapat dituliskan sebagai berikut :

1. $\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz$
2. $\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$
3. $\int_{C+K} f(z) dz = \int_C f(z) dz + \int_K f(z) dz$
4. $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$
5. Jika $f(z)$ terbatas di C , yaitu terdapat $M \in \mathbb{R}$ sehingga $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$ dan jika panjang lintasan C adalah L maka

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

Contoh Soal

Hitung $\int_C f(z) dz$ jika $f(z) = x$, dan $C = C_1 + C_2 + C_3$, dengan C_1 adalah ruas C garis dari $(0, 0)$ ke $(1, 0)$, C_2 adalah ruas garis dari $(1, 0)$ ke $(1, 1)$, dan C_3 adalah ruas garis dari $(1, 1)$ ke $(0, 0)$ seperti diberikan pada Gambar 8.2.



Gambar 8.2 Lintasan C

Jawaban :

Berdasarkan cara merumuskan lintasan C, soal ini dapat dikerjakan dengan beberapa cara. Pada pembahasan sini diberikan tiga cara yang menghasilkan nilai yang sama.

Cara 1

$$C_1 : x = t, y = 0, t \in [0, 1] \Rightarrow x' = 1, y' = 0$$

$$C_2 : x = 1, y = t, t \in [0, 1] \Rightarrow x' = 0, y' = 1$$

$$C_3 : x = -t, y = -t, t \in [-1, 0] \Rightarrow x' = -1, y' = -1$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz \\ &= \int_0^1 x (x' + iy') dt + \int_0^1 x (x' + iy') dt + \int_{-1}^0 x (x' + iy') dt \\ &= \int_0^1 t (1 + 0) dt + \int_0^1 1(0 + i) dt + \int_{-1}^0 -t (-1 - i) dt \\ &= \int_0^1 (t + i) dt + (1 + i) \int_{-1}^0 t dt \\ &= \left(\frac{1}{2} t^2 + i t \right) \Big|_0^1 + \left((1 + i) \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{2} + i - \left(\frac{1 + i}{2} \right) = \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Cara 2

$$C_1 : x = t, y = 0, t \in [0, 1]$$

$$C_2 : x = 1, y = t, t \in [0, 1]$$

$$C_3 : x = 1 - t, y = 1 - t, t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz \\ &= \int_0^1 x (x' + iy') dt + \int_0^1 x (x' + iy') dt + \int_0^1 x (x' + iy') dt \\ &= \int_0^1 t (1 + 0) dt + \int_0^1 1(0 + i) dt + \int_0^1 (1 - t) (-1 - i) dt \\ &= \int_0^1 (t + i) dt - \int_0^1 (1 - t) (1 + i) dt \\ &= \left(\frac{1}{2} t^2 + i t \right) \Big|_0^1 - (1 + i) \int_0^1 (1 - t) dt \\ &= \left(\frac{1}{2} + i \right) - (1 + i) \left[t - \frac{1}{2} t^2 \right] \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} + i \right) - (1 + i) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + i \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i = \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Cara 3

$$C_1 : y = 0, x \in [0, 1]$$

$$C_2 : x = 1, y \in [0, 1]$$

$$-C_3 : y = x, x \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz - \int_{-C_3} f(z) dz \\&= \int_0^1 x (x' + iy') dt + \int_0^1 1 (x' + iy') dt - \int_0^1 x (x' + iy') dt \\&= \int_0^1 x (dx + i \cdot 0 dt) + \int_0^1 1 (0 dt + i dy) - \int_0^1 x (dx + i dx) \\&= \int_0^1 x dx + i \int_0^1 dy - \int_0^1 x (1 + i) dx \\&= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + i \cdot y \Big|_0^1 - (1 + i) \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \\&= \left(\frac{1}{2} + i\right) - \left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{i}{2}\end{aligned}$$

Contoh Soal 2

Jika C adalah lingkaran berpusat di z_0 berjari-jari r yang berorientasi positif. Hitunglah nilai dari $\int_C \frac{dz}{z - z_0}$

Cara 1

Parametrisasi : Misalkan $z_0 = a + ib$ maka $x = r \cos t + a, y = r \sin t + b, t \in [0, 2\pi]$.

Jadi

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{z - z_0} &= \int_0^{2\pi} \frac{(x' + iy')dt}{(r \cos t + a + (r \sin t + b)i) - (a + ib)} \\&= \int_0^{2\pi} \frac{(-r \sin t + ir \cos t)dt}{(r \cos t + ir \sin t)} \\&= \int_0^{2\pi} i \frac{(r \sin t + r \cos t)dt}{r \cos t + i r \sin t} \\&= \int_0^{2\pi} i dt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.\end{aligned}$$

Cara 2

Lintasan C dapat dinyatakan pula sebagai $C : z = z_0 + r e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

sehingga $z - z_0 = r e^{it}$ dan $dz = i r e^{it} dt$. Akibatnya

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = i t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Jadi, jika C adalah lingkaran berpusat di z_0 berorientasi positif (+), maka

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

EVALUASI

1. Gambarkanlah kurva yang diberikan sebagai persamaan parameter :

a. $x = t^2 - 1, y = t, -1 \leq t \leq 1$

b. $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

2. Gambarlah Lintasan $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ dengan

$$C_1 : x = -\sin t, y = \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$C_2 : x = t, y = -t - 1, t \in [-1, 0]$$

$$C_3 : x = 2t + 2, y = t, t \in [-1, 0]$$

$$C_4 : z = 1 + e^{it}, t \in [0, \pi]$$

3. Tentukan persamaan parametrik untuk lintasan berikut

a. ruas garis dari $z_1 = 1 + i$ ke $z = -3 - i$

b. lingkaran berjari-jari 2 berpusat di $1 + i$ berorientasi positif

Topik 9

Teorema Integral Cauchy

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar integral cauchy
2. Mahasiswa mampu memahami teorema integral cauchy
3. Mahasiswa memahami integrasi teorema cauchy
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan matematis menggunakan integral cauchy

A. Teorema Integral Cauchy

Misalkan D adalah daerah terhubung sederhana di bidang kompleks dan C adalah lintasan tertutup yang terletak seluruhnya di D . Jika $f(z)$ analitik di D maka :

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Bukti:

Misalkan $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ dan $f(z)$ analitik pada D . Jadi $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in D$ dan $f'(z) = u_x(x; y) + iv_x(x; y) = v_y(x; y) - iu_y(x; y)$: Menurut teorema Green

$$\int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) = \int \int_{Int(C)} (-v_x - u_y) dxdy + i \int \int_{Int(C)} (u_x - v_y) dxdy.$$

Karena $f(z)$ analitik di D maka $f(z)$ analitik di $Int(C)$ sehingga u dan v memenuhi persamaan Cauchy Riemann pada $Int(C)$. Akibatnya integral lipat dua di ruas kanan bernilai nol, sedangkan ruas kiri adalah rumus untuk $\int_C f(z)dz$ sehingga $\int_C f(z)dz = 0$.

B. Teorema Kebebasan Lintasan

Misalkan $D \subseteq \mathbb{C}$ adalah daerah terhubung sederhana, z_1 dan z_2 adalah dua titik di D . Jika $f(z)$ analitik di D maka

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \text{ dapat dihitung sebagai } \int_C f(z)dz,$$

dengan C adalah sebarang lintasan di D yang menghubungkan z_1 dan z_2

C. Teorema Pengintegralan Kompleks

Misalkan $D \subseteq \mathbb{C}$ adalah daerah terhubung sederhana, z_1 dan z_2 adalah dua titik di D . Jika $f(z)$ analitik di D dan $\phi(z)$ adalah fungsi primitif (anti turunan) dari $f(z)$ maka

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{z_1}^{\zeta} f(z) dz = f(\zeta), \forall \zeta \in D$$

Dan

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

D. Rumus Integrasi Cauchy

Sebelumnya telah diketahui bahwa $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, jika C adalah lingkaran berpusat di z_0 berorientasi positif (+). Rumus integrasi Cauchy memberikan sifat yang lebih umum, yaitu

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}$$

Diperuntukkan menjadi

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$$

dan lintasan C tidak harus berupa lingkaran berpusat di z_0

Rumus Integrasi Cauchy:

Jika C adalah lintasan tertutup sederhana berorientasi positif, $g(z)$ analitik di C dan di $\text{Int}(C)$, dan $z_0 \in \text{Int}(C)$ maka:

$$\int_C \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(z_0),$$

Atau

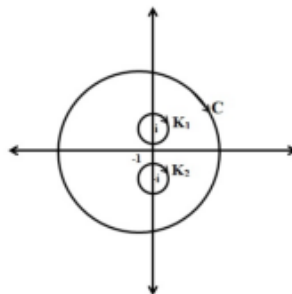
$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z-z_0} dz.$$

Contoh Soal :

Jika $C : |z + 1| = 6$ lintasan berorientasi negatif, hitunglah $\int_C \frac{2iz^3}{z^2+1} dz$

Jawab :

Soal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan dua cara. Cara pertama tidak menggunakan rumus integrasi Cauchy, sedangkan cara ke dua menggunakan rumus integrasi Cauchy. edua cara tersebut memanfaatkan teorema annulus ganda sebab $f(z)$ tidak analitik di $z = i$ dan $z = -i$ seperti diilustrasikan pada Gambar 9.1 Jika dibentuk annulus ganda $Ann(C; K_1; K_2)$, dengan $K_1 : |z - 1| < \frac{1}{2}$ dan $K_2 : |z+1| < \frac{1}{2}$ keduanya berorientasi negatif, maka $f(z)$ analitik di annulus tersebut.



Gambar 9.1 Lintasan C Dilengkapi Annulus Berganda

Cara 1 :

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{2iz^3}{z^2+1} dz &= 2i \int_C \frac{z^3 + z - z}{z^2+1} dz \\
 &= 2i \int_C z \frac{z^2+1-1}{z^2+1} dz \\
 &= 2i \int_C z \left(1 - \frac{1}{z^2+1} \right) dz \\
 &= 2i \int_C \left(z - \frac{z}{(z-i)(z+i)} \right) dz \\
 &= 2i \left(\int_C z dz - \int_C \left(\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z+i)} \right) dz \right) \\
 &= 2i \left(0 - \left(\int_{K_1} \left(\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z+i)} \right) dz + \int_{K_2} \left(\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z+i)} \right) dz \right) \right) \\
 &= 2i \left(0 - \left(\left(-\frac{1}{2} 2\pi i + 0 \right) + \left(0 - \frac{1}{2} 2\pi i \right) \right) \right) = -4\pi
 \end{aligned}$$

Cara 2 :

$$\begin{aligned}\int_C \frac{2iz^3}{z^2+1} dz &= 2i \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz \\&= 2i \int_C \frac{z^3}{(z+i)(z-i)} dz \\&= 2i \left(\int_{K_1} \frac{z^3}{(z+i)(z-i)} dz + \int_{K_2} \frac{z^3}{(z+i)(z-i)} dz \right) \\&= 2i \left(\int_{K_1} \frac{\frac{z^3}{z+i}}{z-i} dz + \int_{K_2} \frac{\frac{z^3}{z-i}}{z+i} dz \right) \\&= 2i \left(-2\pi i \frac{z^3}{z+i} \Big|_{z=i} + (-2\pi i) \frac{z^3}{z-i} \Big|_{z=-i} \right) \\&= 2i \left(-2\pi i \frac{i^3}{i+i} + (-2\pi i) \frac{(-i)^3}{-i-i} \right) \\&= 2i \left(-2\pi i \frac{i^3}{2i} + (-2\pi i) \frac{(-i)^3}{-2i} \right) \\&= 2i(\pi i + \pi i) = -4\pi\end{aligned}$$

E. Rumus Integrasi Cauchy Yang Diperumum

Jika C lintasan tertutup sederhana berorientasi (+), $g(z)$ analitik di C dan di $\text{Int}(C)$ dan $z_0 \in \text{Int}(C)$ maka:

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

Atau

$$\int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Contoh soal :

ika C : $|z+1| = 6$ adalah lintasan berorientasi negatif, hitunglah $\int_C \frac{2iz^3}{(z^2+1)^2} dz$

Jawab :

$$\int_C \frac{2iz^3}{(z^2+1)^2} dz = 2i \int_C \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$$

Seperti pada soal sebelumnya, soal ini dapat diselesaikan menggunakan teorema annulus berganda dengan $K_1 : |z-1| = 0.5$ dan $K_2 : |z+1| = 0.5$ dimana K_1 dan K_2 berorientasi negatif.

Namun di sini digunakan Rumus Integrasi Cauchy yang Diperumum karena pangkat penyebut lebih dari 1, sehingga dalam rumus integrasi Cauchy di sini $n = 1$; $z_0 = i$; dan $z_0 = -i$.

$$\begin{aligned} 2i \int_C \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz &= 2i \left(\int_{K_1} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz + \int_{K_2} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz \right) \\ &= 2i \left(\int_{K_1} \frac{\frac{z^3}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz + \int_{K_2} \frac{\frac{z^3}{(z-i)^2}}{(z+i)^2} dz \right) \\ &= 2i \left((-2\pi i) \frac{\frac{3z^2(z+i)^2 - 2z^3(z+i)}{(z+i)^4}}{1!} \Big|_{z=i} + (-2\pi i) \frac{\frac{3z^2(z-i)^2 - 2z^3(z-i)}{(z-i)^4}}{1!} \Big|_{z=-i} \right) \\ &= 2i \left((-2\pi i) \frac{-3(-4) - (-i)(4i)}{16 \cdot 1} + (-2\pi i) \frac{-3(-4) - (-i)(-4i)}{16 \cdot 1} \right) \\ &= 2i \left((-2\pi i) \frac{12-4}{16} - 2\pi i \frac{12+4}{16} \right) \\ &= 2i(-2\pi i) \left(\frac{8}{16} + \frac{16}{16} \right) \\ &= 6\pi \end{aligned}$$



EVALUASI

Hitunglah $\int_C f(z)dz$ jika $f(z)$ dan C diberikan sebagai berikut.

1. $f(z) = z^3 - 1$, $C : |z - 1| = 1$, orientasi positif.
2. $f(z) = z^3 - iz + 3i$, $C : |z + i| = 2$, orientasi negatif
3. $f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$, $C : |z - 1| = \frac{1}{2}$, orientasi negatif.

Topik 10

Deret Bilangan Kompleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar deret pada bilangan kompleks
2. Mahasiswa mampu memahami konsep konvergensi deret pada bilangan kompleks
3. Mahasiswa memahami uji konvergensi pada deret bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan matematis terkait deret pada bilangan kompleks.

A. Deret Bilangan Kompleks

Definisi

Deret bilangan kompleks merupakan penjumlahan suku-suku pada barisan bilangan kompleks.

Deret bilangan kompleks dinotasikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

dengan suku-suku deret yaitu $z_1, z_2, z_3, \dots$

Misalkan,

$S_1 = z_1$ merupakan jumlah suku pertama

$S_2 = z_1 + z_2$ merupakan jumlah dua suku pertama

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$ merupakan jumlah tiga suku pertama

$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ merupakan jumlah n suku pertama

Jika barisan (S_n) mempunyai limit diperoleh jumlah tak berhingga

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

Jadi dalam symbol dituliskan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

1. Deret konvergen

Kekonvergenan suatu deret ditentukan oleh ada atau tidak adanya limit barisan jumlah bagiannya. Kekonvergenan deret tersebut disajikan berikut ini :

Definisi 1 :

- Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$
- Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ tidak ada.

Contoh :

Dari barisan $\left(\frac{5i}{2^n}\right) = \frac{5i}{2}, \frac{5i}{4}, \frac{5i}{8}, \dots$ dibentuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5i}{2^n}$. Tentukanlah apakah deret tersebut konvergen atau divergen!

Penyelesaian :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5i}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5i \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$$

Bagian ruas kanan yang didalam kurung merupakan deret geometri dengan suku pertama

$$a = \frac{1}{2} \text{ dan } r = \frac{1}{2} \text{ dan jumlah tak hingganya adalah } \frac{a}{1-r} = 1.$$

Maka diperoleh limit $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 5i$. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5i}{2^n}$ konvergen ke $5i$.

2. Uji Konvergensi Pada Deret Bilangan Kompleks

a. Teorema konvergensi

TEOREMA 6.2.2

Diberikan deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dengan $z_n = x_n + iy_n$; $x_n, y_n \in \mathbf{R}$

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen.
- (b) jika $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.
- (c) jika $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen mutlak, maka $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, artinya jika $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

Bukti (a):

($\Rightarrow$) Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen ke $a + ib$, sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + ib$.

Akan ditunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke a dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen ke b .

Menurut definisi diperoleh,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k) = a + ib \text{ Akibatnya diperoleh,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = a \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k = b$$

Karena $\sum_{k=1}^n x_k$ dan $\sum_{k=1}^n y_k$ berturut-turut merupakan jumlah bagian dari $\sum_{n=1}^n x_n$ dan $\sum_{n=1}^n y_n$, maka $\sum_{n=1}^n x_n$ dan $\sum_{n=1}^n y_n$ konvergen.

($\Leftarrow$) Misalkan $\sum_{n=1}^n x_n$ konvergen ke a dan $\sum_{n=1}^n y_n$ konvergen ke b .

Akan ditunjukkan $\sum_{n=1}^n z_n$ konvergen ke $a + ib$.

$$\text{Karena } S_n = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k,$$

Menurut teorema diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a + ib$. Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$,

diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + ib$.

Jadi terbukti bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

Bukti (b):

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang.

Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$,

Berarti terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n > n_0$ berlaku $|z_n| < \varepsilon$.

Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, berarti terdapat bilangan kompleks z sehingga berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z$

Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n > n_0$ berlaku $|S_{n-1} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|S_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$

Menurut ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned} |z_n| &= |S_{n-1} - S_n| = |(S_{n-1} - z) + (z - S_n)| \\ &\leq |S_{n-1} - z| + |z - S_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

b. Uji Rasio

Teorema 6.2.4 (Uji Ratio):

Diberikan deret dengan suku-suku tak negative $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = L$.

(a) Jika $L < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ konvergen

(b) Jika $L > 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ divergen

(c) Jika $L = 1$, maka pengujian gagal (deret dapat konvergen atau divergen)

Bukti:

(a) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena $|Z_n| \geq 0$ untuk setiap n , maka $L \geq 0$.

Diketahui $L < 1$.

Dipilih bilangan real r sehingga $L < r < 1$.

Kemudian diambil $\varepsilon = r - L < 1$.

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = L$, terdapat bilangan asli n_0 Sehingga jika $n > n_0$ berlaku

$$\left| \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| - L \right| < \varepsilon$$

Diperoleh jika $n > n_0$ berlaku

$$\left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| < \varepsilon + L = r - L + L = r \text{ atau}$$

$$|Z_{n+1}| < r|Z_n| \dots\dots\dots (*)$$

Diambil $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ sehingga dari (*) diperoleh

$$|Z_{n_0+1}| < r|Z_{n_0}|$$

$$|Z_{n_0+2}| < r^2|Z_{n_0}|$$

$$|Z_{n_0+3}| < r^3|Z_{n_0}|$$

.....

$$|Z_{n_0+k}| < r^k|Z_{n_0}|, k \in \mathbb{N} \dots\dots\dots (**)$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} r^k|Z_{n_0}|$ adalah deret konvergen, karena merupakan deret geometri dengan ratio $r < 1$.

Dari (**) dan menggunakan uji banding, diperoleh bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} |Z_{n_0+k}|$ konvergen.

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} |Z_{n_0+k}|$ berbeda dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} |Z_n|$ dalam n_0 suku pertama.

Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} |Z_n|$ konvergen sehingga deret yang diberikan konvergen mutlak.

(b) Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = L$, dan $L > 1$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = +\infty$.

Hal ini berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga jika

$n > n_0$ berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa $1 < \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $|Z_n| < |Z_{n+1}| < \varepsilon$

Diambil $n = n_0, n_{0+1}, n_{0+2}, \dots$, sehingga diperoleh

$$|Z_{n_0}| < |Z_{n_0+1}|$$

$$|Z_{n_0}| < |Z_{n_0+1}| < |Z_{n_0+2}|$$

.....

Jadi jika $n > n_0$, berlaku $|Z_n| > |Z_{n_0}|$.

Akibatnya $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq 0$.

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq 0$, diperoleh deret $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ divergen.

(c) Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^p}{(n+1)^p} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \right| = 1 \end{aligned}$$

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$ dan divergen untuk $p \leq 1$.

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ dapat konvergen dan dapat juga divergen, sedangkan yang

divergen memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = 1$.

Contoh :

Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+2i)^n}{n!}$ konvergen dengan menggunakan uji ratio.

Penyelesaian:

Misalkan $Z_n = \frac{(2+2i)^n}{n!}$, maka $Z_{n+1} = \frac{(2+2i)^{n+1}}{(n+1)!}$

Diperoleh,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2+2i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2+2i)^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2+2i}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8}}{n+1} = 0$$

Jadi menurut uji ratio, diperoleh bahwa deret tersebut konvergen mutlak.

c. Uji Akar

Diberikan deret dengan suku-suku tak negative $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L \quad \begin{cases} L < 1, \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konvergen mutlak} \\ L > 1, \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ divergen} \\ L = 1, \text{ uji gagal} \end{cases}$$

Contoh :

Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n}$ konvergen dengan menggunakan uji akar .

Penyelesaian :

Berikut akan dipaparkan menggunakan uji akar. Kesimpulan dari uji akar ini sama dengan uji rasio.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Perhatikan bentuk $\frac{n+1}{n}$ di atas,

jika $n \rightarrow \infty$ maka $\frac{n+1}{n} = 1$.

Perhatikan juga bentuk $\frac{1}{n}$.

Jika $n \rightarrow \infty$ maka $\frac{1}{n} = 0$, sehingga limit diatas memiliki bentuk :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \times 1^0 = \frac{1}{2}$$

Karena nilai limitnya < 1 , maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n}$ konvergen.

d. Uji Integral

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ adalah deret suku-suku tak negative dan andaikan bahwa fungsi $y = f(x)$ didapat dari pengganti n pada suku umum deret dengan peubah kontinu x , maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ akan konvergen jika hanya jika $\int_1^{\infty} f(x)dx$ juga konvergen.

Dari kalkulus :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Apa bila limit pada ruas kanan bernilai terhingga, maka integral tak wajar tersebut konvergen dan memiliki nilai yang sama dengan limit tadi. Jika tidak maka integral tersebut divergen.

Contoh :

Tunjukkanlah bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ merupakan deret konvergen dengan melakukan uji integral.

Penyelesaian :

Coba lakukan pengujian dengan uji rasio, maka akan diperoleh hasil perhitungan $L=1$, dengan demikian kita tidak dapat menentukan apakah deret tersebut konvergen atau divergen dengan uji rasio. Inilah saatnya menggunakan uji integral. Lihat penjelasan teori diatas mengenai uji integral.

Kita ubah notasi n menjadi peubah kontinu x sehingga diperoleh $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Kita lakukan pengintegralan terhadap fungsi kontinu ini

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1$$

Integral fungsi ini bersifat konvergen (ada hasilnya) dengan demikian deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen

e. Uji Deret Berganti Tanda

Diketahui suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n$, dengan $z_n \geq 0$

Andaikan : $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, $z_{n+1} \leq z_n$

Untuk setiap n yang lebih besar dari suatu bilangan bulat M tertentu, maka deret yang diketahui tersebut konvergen.

Contoh:

Tunjukkanlah bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 + i}$ merupakan deret konvergen dengan melakukan uji deret berganti tanda.

Penyelesaian :

Kita lakukan uji rasio pada deret diatas

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)^2 + i} \times \frac{n^2 + i}{i^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(n^2 + i)}{(n+1)^2 + i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in^2 - 1}{n^2 + 2n + 1 + i} = i$$

Berarti $L = |i| = 1$. Karena $L = 1$,

maka kita tidak dapat mengetahui apakah deret tersebut konvergen atau divergen.

Dengan demikian kita harus menggunakan uji lain.

Kita uji dengan pembandingan sekali lagi, syaratnya harus hati-hati dalam memilih deret pembandingan.

- Untuk kasus ini kita pilih $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ sebagai deret pembandingan.

Namun bagaimana kita menguji deret ini ? coba kita uraikan deret ini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} = \frac{i}{1} + \frac{-1}{4} + \frac{-i}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Tempat pada bagian pembilang berubah tanda dari $i, -1, -i, 1$.

Dengan demikian uji deret berganti tanda merupakan uji yang paling tepat untuk deret ini.

Lihat lagi teorema untuk deret berganti tanda.

Pada deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ yang membuat berganti tanda adalah i^n , dengan demikian pemeriksaan dilakukan terhadap bagian $\frac{1}{n^2}$.

Ternyata $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ dan $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ konvergen.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ konvergen, sementara $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 + i} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 + i}$ juga konvergen.

f. Uji Banding

TEOREMA 6.2.3

Diberikan $|z_n| \leq |w_n|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

- (a) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen (mutlak)
- (b) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ divergen.

Bukti:

- (a) Diketahui $|z_n| \leq |w_n|$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ konvergen.

Akan dibuktikan $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen mutlak.

Misalkan $\{S_n\}$ adalah barisan jumlah bagian untuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ dan $\{T_n\}$ adalah barisan jumlah bagian untuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ konvergen, berarti terdapat bilangan real M sehingga $|T_n| \leq M$.

Karena $|z_n| \leq |w_n|$, diperoleh $S_n \leq T_n \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Karena barisan $\{S_n\}$ sebagai jumlah bagian dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, sehingga berlaku $|S_n| \leq M$ untuk suatu bilangan real M .

Akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen.

- (b) Diketahui $|z_n| \leq |w_n|$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergen.

Akan dibuktikan $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ divergen.

Andaikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ konvergen.

Karena $|z_n| \leq |w_n|$ sehingga dari (a) diperoleh barisan deret $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen.

Hal ini bertentangan dengan hipotesis yang diketahui jadi pengandaian di atas salah, haruslah deret $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ divergen.

Contoh :

Ujilah kekonvergenan deret $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$ dengan menggunakan uji banding.

Penyelesaian:

Diketahui:

Bentuk umum deret di atas adalah $\frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+1} = z_n$

Kita buat fungsi pembandingnya yaitu $\frac{1}{n^2} = w_n$

Sehingga berdasarkan definisi adalah $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$.

Kemudian deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

Bukti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$

gunakan integral, maka:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} x^{-2} dx$$

$$= -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= -(0 - 1) = 1 \quad (\text{terbukti})$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka berdasarkan uji banding diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ juga konvergen

EVALUASI

A. Latihan Soal

Tentukanlah apakah deret bilangan kompleks dibawah ini konvergen atau divergen :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{(n-1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$

B. Kunci Jawaban

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n!}$

Kita lakukan uji rasio dari deret diatas

$$z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n!} \text{ dan } z_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2i)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{(1+2i)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2i)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(1+2i)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2i)(1+2i)^n}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{(1+2i)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2i)}{(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

Karena nilai $L = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n!}$ adalah deret konvergen

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Kita lakukan uji banding dari deret diatas

Diketahui $z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Karena memakai uji banding, kita cari $|w_n|$ dimana

$$|z_n| < |w_n|$$

Dalam hal ini di dapat $|w_n| = \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$

Kita cari nilai deret $|w_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad (\text{konvergen})$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka sesuai teorema uji banding $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ juga konvergen. Sebab $|z_n| \leq |w_n|$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!}$

Kita lakukan uji ratio untuk menyelesaikan soal di atas

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(3+i)^{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}(3+i)^2}{(3+i)^{2n}} \times \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+i)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9+6i-1}{4n^2+6n+2} = 0 \end{aligned}$$

$L = 0$, berarti $L < 1$ dan maka deret tersebut konvergen.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{(n-1)}$

Kita lakukan uji konvergen mutlak

$$z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^{(n-1)} \rightarrow |z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$$

$$\text{Deret } \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

Deret di atas merupakan deret ukur yang konvergen ke $\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{(n-1)}$ konvergen.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Menurut teorema deret bilangan real yang berayun dengan $a_n = \frac{1}{n}$ monoton turun, maka deret tersebut konvergen.

Jika ditinjau lebih lanjut deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^{2n}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Merupakan deret bilangan real yang divergen.

Jadi menurut definisi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$ konvergen bersyarat.

Topik 11

Deret Pangkat Bilangan Kompleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar deret pangkat pada bilangan kompleks
2. Mahasiswa mampu memahami konsep konvergensi deret pangkat pada bilangan kompleks
3. Mahasiswa memahami uji konvergensi pada deret pangkat bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan matematis terkait deret pangkat pada bilangan kompleks.

A. Deret Pangkat

1. Definisi Deret Pangkat

Definisi

Deret pangkat adalah suatu deret tak berhingga yang berbentuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n = a_0 + a_1 (z - c) + a_2 (z - c)^2 + \dots + a_n (z - c)^n + \dots$$

Dimana a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) konstanta kompleks, z variabel kompleks dan c pusat deret.

Kekonvergenan deret pangkat pada suatu titik berhubungan dengan kekonvergenan deret bilangan kompleks. Hal ini disajikan pada definisi berikut.

Definisi

Deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ konvergen pada titik z_0 jika dan hanya jika

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - c)^n$ merupakan deret bilangan kompleks yang konvergen

Jika deret bilangan kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - c)^n$ divergen, maka deret pangkat

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ divergen pada z_0 .

Jika deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ konvergen pada setiap titik himpunan S , maka dikatakan deret pangkat tersebut konvergen pada S . Tetapi jika deret pangkat

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ divergen pada setiap titik di S, dikatakan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ divergen pada S.

Jika pusat deret pangkat $c = 0$, maka deret pangkat berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Deret pangkat

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen di suatu titik mengakibatkan konvergen mutlak di setiap bilangan kompleks dengan syarat tertentu. Situasi ini disajikan pada teorema berikut.

2. Teorema Deret Pangkat

Teorema

Jika deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen di z_0 ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen) dengan $z_0 \neq 0$, maka Deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen mutlak disetiap nilai z dengan $|z| < |z_0|$.

Bukti :

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$. Hal ini berarti terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n > n_0$ berlaku $|a_n z_0^n| < \varepsilon$.

Untuk setiap bilangan kompleks z , berlaku $0 \leq |z| < |z_0|$ dan akibatnya adalah $0 \leq \left| \frac{z}{z_0} \right| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$. Oleh karena itu, diperoleh

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$, terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku $|a_n z_0^n| < M$. Jadi diperoleh

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

Karena $0 \leq \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$ dan $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ suatu deret ukur, maka deret $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ konvergen.

Karena $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ konvergen, maka $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n z^n|$ konvergen. Akibatnya deret

$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n$ konvergen. Jadi terbukti bahwa deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen.

Teorema

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergen untuk z_1 ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ divergen), maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergen untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| > |z_1|$.

Bukti:

Karena deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ divergen, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_1^n$ tidak ada. Karena $|z| > |z_1|$, diperoleh

$\left| \frac{z}{z_1} \right| > 1$. Akibatnya

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n z_1^n \cdot \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$$

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$ merupakan deret ukur yang divergen, sebab $\left| \frac{z}{z_1} \right| > 1$. Jadi deret $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$

divergen. Akibatnya deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergen.

3. Jari-Jari Kekonvergenan Deret Pangkat

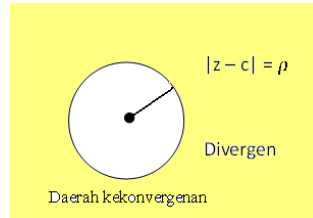
Setiap deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ terdapat bilangan tunggal ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$ yang dinamakan jari-jari kekonvergenan deret yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

- (1) Jika $\rho = 0$, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ konvergen di $z = c$ dan divergen di $z \neq c$.
- (2) Jika $0 < \rho < \infty$, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ konvergen mutlak untuk setiap z dengan $|z - c| < \rho$ dan divergen untuk setiap z dengan $|z - c| > \rho$.
- (3) Jika $\rho = \infty$, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ konvergen mutlak untuk setiap z .

Bilangan ρ dinamakan jari-jari kekonvergenan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, sedangkan $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \rho\}$ dinamakan daerah kekonvergenan dan $|z - c| = \rho$ disebut lingkaran

kekonvergen. Kekonvergenan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ untuk z dengan $|z-c| = \rho$ silahkan periksa sendiri. Daerah kekonvergenan

deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ digambarkan seperti berikut ini.



Masalah penentuan daerah kekonvergenan deret pangkat kompleks diperoleh dengan mencari jari-jari kekonvergenan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, yaitu:

$$(a) \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$(b) \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

C. Contoh Soal

1. Tentukan daerah kovergensi dari deret pangkat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

Penyelesaian:

Misalkan $a_n = \frac{1}{n}$, maka $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ dan $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n}{1/(n+1)} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right|$$

$$= 1$$

Kekonvergenannya adalah $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergen pada $|z| > 1$.

Bila $z = 1$, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ merupakan deret harmonis.

Karena itu deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ divergen.

2. Tentukan daerah kovergensi dari deret pangkat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 \cdot 4^n}$$

Penyelesaian :

Misalkan $a_n = \frac{1}{(n+1)^3 \cdot 4^{n+1}}$ dan jari-jari kekonvergenannya adalah

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)^3 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)^3 \cdot 4^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+2)^3}{(n+1)^3} = 4\end{aligned}$$

Jadi daerah kekonvergenannya adalah $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 \cdot 4^n}$ konvergen pada $|z+2| < 4$ dan divergen pada $|z+2| > 4$. Sedangkan deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 \cdot 4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^3}$ konvergen pada lingkaran $|z+2| = 4$

EVALUASI

1. Tentukan jari-jari kekonvergenan dari setiap deret pangkat berikut :

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} e^n (z + 2)^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z + \pi i)^n}{2^n}$

2. Tentukan daerah kekonvergenan deret berikut :

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^{2n}}{n^2}$

Solusi :

Jawaban latihan soal

1. Menentukan jari-jari :

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \times z^n$

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/2^n}{1/2^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \times 2}{2^n} \right|$$

$$= 2$$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} e^n (z + 2)^n$

$$\begin{aligned}a_n &= e^n, \quad a_{n+1} = e^{n+1} \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^n}{e^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^n}{e^n \times e} \right| = e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z + \pi i)^n}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \times (Z + \pi i)^n \\ a_n &= \frac{1}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/2^n}{1/2^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \times 2}{2^n} \right| = 2\end{aligned}$$

2. Menentukan daerah kekonvergenan deret pangkat

$$\begin{aligned}a. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} \times z^n \\ a_n &= \frac{1}{3^n + 1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1} + 1} \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/3^n + 1}{1/3^{n+1} + 1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} + 1}{3^n + 1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \times 3 + 1}{3^n + 1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4}{1} \right| = 4\end{aligned}$$

Jadi daerah kekonvergenannya adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$$

Konvergen pada $|z| < 4$ dan divergen pada $|z| > 4$

$$b. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \times (z-i)^{2n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi daerah kekonvergenannya adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2}$$

Konvergen pada $|z-i| < 1$ dan divergen pada $|z-i| > 1$

Topik 12

Deret Taylor dan Maclaurin

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar deret taylor
2. Mahasiswa mampu memahami konsep dasar dari deret maclaurin
3. Mahasiswa memahami fungsi matematis dari deret taylor dan maclaurin
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan matematis terkait deret taylor dan maclaurin pada bilangan kompleks.

A. Pendahuluan

Polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \dots (*)$ adalah bentuk sederhana yang menarik untuk diteliti. Salah satunya adalah menyatakan fungsi yang sama kedalam turunan-turunannya, sebab harga koefaktor $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ dapat di hitung dari nilai fungsi turunan-turunannya:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ maka : } f(0) = a_0 \dots\dots\dots (1)$$

$$f^1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}, \text{ maka } f^1(0) = a_1 \dots\dots\dots (2)$$

$$f^{11}(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}, \text{ maka } f^{11}(0) = 2a_2 \dots\dots (3)$$

$$f^{(3)}(x) = 6a_3 + 24a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}, \text{ maka } f^{(3)}(0) = 6a_3 \dots(4)$$

..... dan seterusnya

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1a_n + \dots, \text{ maka}$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1.a_n \dots (n)$$

Dari persamaan terakhir ini diperoleh kenyataan bahwa $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ berlaku pada persamaan sebelumnya: ke-(1),(2),...(n-1).

Oleh karenanya polinomial (*) dapat dinyatakan dalam bentuk lain :

$$f(x) = f(0) + \frac{f^1(0)}{1!}x + \frac{f^{11}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \dots\dots(**)$$

Gagasan ini berkembang tidak hanya merubah polinomial kedalam suku-suku yang mengandung turunan-turunannya, tapi boleh jadi sembarang fungsi dapat diperlakukan sama. Temuan ini sudah barang tentu dengan anggapan bahwa $f(x)$ kontinu

dalam interval $[a,b]$ dan dapat di differensialkan sampai tingkat ke n dalam (a,b) pada $x = 0$ atau $f^{(n)}(0) = ada$, tepatnya berlaku pada interval dimana $f(x)$ konvergen.

Karena rumusan tersebut ditemukan oleh Mac Laurin (1698-1746) maka :

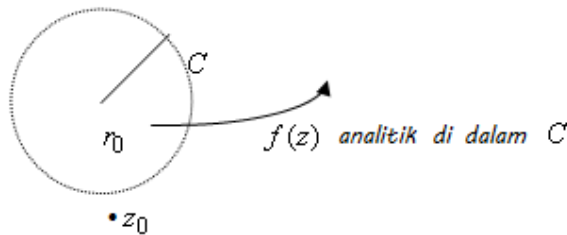
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

disebut **deret Mac Laurin**.

Sebenarnya deret Mac Laurin ini kejadian khusus dari deret yang dikembangkan Brook Taylor (1685-1731) - salah seorang murid Newton.

B. Deret Taylor Dan Deret Maclaurin

Suatu fungsi $f(z)$ tidak dapat direpresentasikan dalam dua deret pangkat dengan pusat deret yang sama. Apabila $f(z)$ dapat dinyatakan dalam deret pangkat dengan pusat z_0 , maka deret tersebut tunggal. Setiap fungsi analitik dapat disajikan dalam deret pangkat. Apabila $f(z)$ analitik di dalam lingkaran C maka $f(z)$ dapat disajikan dalam deret Taylor atau deret MacLaurin bergantung pada pusat deretnya.



Gambar 12.1 Lingkaran C dengan pusat deret z_0

1. Deret Taylor

a. Pengertian

Deret Taylor adalah Deret pangkat $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ yang analitik pada daerah $D = \{z: |z - z_0| < r\}$

b. Teorema

Teorema Taylor

Jika fungsi f analitik pada daerah terbuka $D = \{z: |z - z_0| < r\}$, maka $f(z)$ untuk setiap $z \in D$ dapat dinyatakan ke dalam deret pangkat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ dengan } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$
$$= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Bukti :

Diambil lintasan

$$C = \{t \in D: |t - z_0| = r\}; z \in \text{Int}(C), \text{ dan } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= \frac{1}{(t-z_0) - (z-z_0)} \\ &= \frac{1}{(t-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{t-z_0} \left[1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^{n-1}} + \frac{(z-z_0)^n}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} \right] \\ &= \frac{1}{t-z_0} + \frac{z-z_0}{(t-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n} + \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n(t-z)} \end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0} dt + (z-z_0) \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^2} dt + (z-z_0)^2 \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^3} dt + \cdots + \right. \\ &\quad \left. (z-z_0)^{n-1} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^n} dt \right] + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^n(t-z)} dt \end{aligned}$$

Menurut pengintegralan Cauchy, jika f analitik pada $C \cup \text{Int}(C)$ dan $z_0 \in \text{Int}(C)$, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z_0} dt \text{ dan } f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + R_n$$

$$\text{dengan } R_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(t) \left(\frac{z - z_0}{t - z_0} \right)^n \frac{dt}{t - z} \dots \dots \dots (1)$$

Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Dari persamaan (1), diperoleh

$$|R_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(t) \left(\frac{z - z_0}{t - z_0} \right)^n \frac{dt}{t - z} \right|$$

Karena f analitik pada $C \cup \text{Int}(C)$, maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in C \cup \text{Int } C$

Oleh karena itu diperoleh $\left| \frac{z - z_0}{t - z_0} \right| < 1$ untuk setiap $t \in C$

Sedangkan untuk setiap $t \in C$ berlaku

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t - z} \right) &= \frac{1}{|t - z|} \\ &= \frac{1}{|(t - z_0) - (z - z_0)|} \leq \frac{1}{|t - z_0| - |z - z_0|} = \frac{1}{r - |z - z_0|} \end{aligned}$$

Menurut teorema bahwa

$$\left| \oint_C f(t) dt \right| \leq Ml(C), \text{ dengan } M = \max |f(z)|$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} 0 \leq |R_n| &\leq \frac{1}{2\pi} M \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \cdot \frac{1}{r - |z - z_0|} \cdot 2\pi r \\ &= Mr \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \cdot \frac{1}{r - |z - z_0|} \\ &= k \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \text{ dengan } k = \frac{Mr}{r - |z - z_0|} \end{aligned}$$

Karena $\frac{|z - z_0|}{r} < 1$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n = 0$.

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \dots \dots \dots (2)$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} = \\ &= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

2. Deret Maclaurin

a. Pengertian

Deret Maclaurin merupakan deret Taylor pada saat $Z_0 = 0$

b. Teorema

Teorema

$$(a) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

$$(b) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \quad |z| < \infty$$

$$(c) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad |z| < \infty$$

$$(d) \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

$$(e) \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

$$(f) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$(g) \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

Bukti (a) :

Fungsi $f(z) = e^z$ adalah fungsi utuh, analitik pada C . Jadi jari-jari kekonvergenan deret MacLaurinnya adalah $\rho = \infty$. Karena $f(z) = e^z$ analitik pada C , diperoleh $f(0) = 1$ dan $f^n(z) = e^z$ untuk setiap $n \in N$. Jadi $f^n(0) = 1$.

Dengan demikian deret McLaurin dari $f(z) = e^z$ adalah

$$\begin{aligned} f(z) = e^z &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n, \quad |z| < \infty \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

Bukti (b) :

$$f(z) = \sin z, f(0) = 0$$

$$f'(z) = \frac{z - z_0}{1} (\cos z_0), f'(0) = \frac{z - 0}{1} (\cos 0)$$

$$f''(z) = \frac{(z - z_0)^2}{2!} (-\sin z_0), f''(0) = \frac{(z - 0)^2}{2!} (-\sin 0)$$

$$f'''(z) = \frac{(z - z_0)^3}{3!} (-\cos z_0), f'''(0) = \frac{(z - 0)^3}{3!} (-\cos 0)$$

.....

Sehingga

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, |z| < \infty$$

Bukti (c) :

$$f(z) = \cos z, f(0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{z - z_0}{1} (-\sin z_0), f'(0) = \frac{z - 0}{1} (-\sin 0)$$

$$f''(z) = \frac{(z - z_0)^2}{2!} (-\cos z_0), f''(0) = \frac{(z - 0)^2}{2!} (-\cos 0)$$

$$f'''(z) = \frac{(z - z_0)^3}{3!} (\sin z_0), f'''(0) = \frac{(z - 0)^3}{3!} (\sin 0)$$

.....

Sehingga

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, |z| < \infty$$

Bukti (d) :

$$f(z) = \sinh z, f(0) = 0$$

$$f'(z) = \frac{z - z_0}{1} (\cosh z_0), f'(0) = \frac{z - 0}{1} (\cosh 0)$$

$$f''(z) = \frac{(z - z_0)^2}{2!} (\sinh z_0), f''(0) = \frac{(z - 0)^2}{2!} (\sinh 0)$$

$$f'''(z) = \frac{(z - z_0)^3}{3!} (\cosh z_0), f'''(0) = \frac{(z - 0)^3}{3!} (\cosh 0)$$

.....

Sehingga

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, |z| < \infty$$

Bukti (e) :

$$f(z) = \cosh z, f(0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{z - z_0}{1} (\sinh z_0), f'(0) = \frac{z - 0}{1} (\sinh 0)$$

$$f''(z) = \frac{(z - z_0)^2}{2!} (\cosh z_0), f''(0) = \frac{(z - 0)^2}{2!} (\cosh 0)$$

$$f'''(z) = \frac{(z - z_0)^3}{3!} (\sinh z_0), f'''(0) = \frac{(z - 0)^3}{3!} (\sinh 0)$$

.....

$$\text{Sehingga } \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, |z| < \infty$$

Bukti (f) :

Misalkan $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Titik singular dari fungsi f adalah $z = 1$.

Jadi jari-jari kekonvergenan deret MacLaurin f adalah

ρ = jarak dari 0 ke titik singular yang terdekat = 1

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, f(0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, f'(0) = 1$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}, f''(0) = 2$$

$$f'''(z) = \frac{6}{(1-z)^4}, f'''(0) = 6$$

.....

$$f^n(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, f^n(0) = n!$$

Dengan demikian deret MacLaurin dari $f(z) = \frac{1}{1-z}$ adalah

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

Bukti (g) :

Misalkan $f(z) = \frac{1}{1+z}$.

Titik singular dari fungsi f adalah $z = -1$.

Jadi jari-jari kekonvergenan deret MacLaurin f adalah

$\rho =$ jarak dari 0 ke titik singular yang terdekat $= 1$

$$f(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f(0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad f'(0) = -1$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad f''(0) = 2$$

$$f'''(z) = \frac{-6}{(1+z)^4}, \quad f'''(0) = -6$$

.....

$$f^n(z) = \frac{n!}{(1+z)^{n+1}}, \quad f^n(0) = n!$$

Dengan demikian deret MacLaurin dari $f(z) = \frac{1}{1+z}$ adalah

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1+z} &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n, \quad |z| < 1 \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Jadi terbukti bahwa

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1$$

C. Contoh Soal

1. Tentukan deret Taylor dari $f(z) = \frac{1}{1+z}$ disekitar $z = i$!

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z}, & f(i) &= \frac{1}{1+i} \\ f'(z) &= \frac{-1}{(1+z)^2}, & f'(i) &= \frac{-1}{(1+i)^2} \\ f''(z) &= \frac{2}{(1+z)^3}, & f''(i) &= \frac{2}{(1+i)^3} \\ f'''(z) &= \frac{-6}{(1+z)^4}, & f'''(i) &= \frac{-1}{(1+i)^4} \\ f^n(z) &= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+z)^{n+1}}, & f^n(i) &= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+i)^{n+1}} \end{aligned}$$

Jadi deret Taylor dari $f(z) = \frac{1}{1+z}$ disekitar $z = i$ adalah

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} \\ &= f(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!} (z - i)^n \\ &= \frac{1}{1+i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z - i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z - i)^n \end{aligned}$$

2. Uraikan $f(z) = \frac{1-z}{1+2z}$ disekitar $z = 1$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{3}{2} + (z-1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{z-1}{3/2} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{3/2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (z-1)^n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1-z}{1+2z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (z-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (z-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

3. Hitunglah $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} z ((-1)^n n z^{n-1}) \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dz} (z^n) \\ &= z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n) \\ &= z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+z} \right) \\ &= z \left(\frac{-1}{(1+z)^2} \right) \\ &= \frac{-z}{(1+z)^2} \end{aligned}$$

D. Latihan Soal

1. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{(z-i)^n}{i^{n+2}}, \quad |z-i| < 1$$

2. Tentukan deret Taylor dari $f(z) = e^z$ disekitar $z = 1$

E. Kunci Jawaban

$$\begin{aligned} 1. \quad f(z) &= \frac{1}{z^2} & , f(i) &= \frac{1}{i^2} \\ f'(z) &= -2z^{-3} = \frac{-2}{z^3} & , f'(i) &= \frac{-2}{i^3} \\ f''(z) &= 6z^{-4} = \frac{6}{z^4} & , f''(i) &= \frac{6}{i^4} \\ f'''(z) &= -24z^{-5} = \frac{-24}{z^5} & , f'''(i) &= \frac{-24}{i^5} \\ f^n(z) &= \frac{(-1)^n (n+1)n!}{z^{n+1}} & , f^n(i) &= \frac{(-1)^n (n+1)n!}{i^{n+1}} \end{aligned}$$

Jadi deret Taylor dari $f(z) = \frac{1}{z^2}$ disekitar $z = i$ adalah

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} = f(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!} (z-i)^n \\ &= \frac{1}{i^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)n!}{i^{n+1} n!} (z-i)^n \\ &= \frac{1}{i^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{i^{n+1}} (z-i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{i^{n+1}} (z-i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{(z-i)^n}{i^{n+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(z) &= e^z & , f(1) &= e \\ f'(z) &= e^z & , f'(1) &= e \\ f''(z) &= e^z & , f''(1) &= e \\ f'''(z) &= e^z & , f'''(1) &= e \\ f^n(z) &= e^z & , f^n(1) &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z - 1)^n \\ &= e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!} (z - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (z - 1)^n \end{aligned}$$

Topik 13

Deret Laurent

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami konsep dasar deret laurent
2. Mahasiswa mampu memahami konsep dasar lema dari deret laurent
3. Mahasiswa memahami fungsi matematis dari deret laurent
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan matematis terkait deret laurent pada bilangan kompleks.

A. Pendahuluan

Misal fungsi $f(z)$ analitik pada $|z - z_0| < R_0$ (lingkaran dengan pusat di z_0 dan jari-jari R_0). Maka untuk setiap titik z pada lingkaran itu, $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \dots\dots\dots (|z - z_0| < R_0)$$

$$\text{dengan } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \dots\dots\dots (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Atau dituliskan,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots\dots\dots (|z - z_0| < R_0).$$

Deret diatas disebut **Deret Taylor** di titik z_0 dan daerah $|z - z_0| < R_0$ disebut **daerah kekonvergenan** atau **keanalitikan** deret. Bila $f(z)$ fungsi entire maka daerah keanalitikan deret yaitu : $|z - z_0| < R$

Bila fungsi $f(z)$ tidak analitik di $z = z_0$ maka $f(z)$ tidak dapat diperderetkan dalam deret Taylor di $z = z_0$. Agar $f(z)$ dapat diperderetkan di $z = z_0$ maka dilakukan dengan cara membuang titik singular $z = z_0$ dari daerah $|z - z_0| < R$ sehingga didapatkan daerah $R_1 < |z - z_0| < R_2$ (cincin / anulus) yang merupakan daerah keanalitikan fungsi $f(z)$. Hal ini telah dilakukan oleh Laurent karena Dalam memperderetkan fungsi ke dalam deret Laurent kita tidak menggunakan rumusan di atas, karena kita ingin menghindari perhitungan integral lintasan. Untuk itu dilakukan dengan menggunakan bantuan deret Taylor maupun deret Mac Laurin yang sudah kita pelajari.

B. Deret Laurent

1. Sejarah Deret Laurent

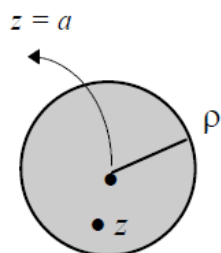


Dalam matematika, Deret Laurent dari fungsi f kompleks (z) merupakan representasi dari fungsi yang sebagai rangkaian listrik yang meliputi segi derajat negatif. Ini dapat digunakan untuk mengekspresikan fungsi kompleks dalam kasus di mana ekspansi deret Taylor tidak dapat diterapkan. Deret Laurent dinamai dan pertama kali diterbitkan oleh Pierre Alphonse Laurent pada tahun 1843. Karl Weierstrass mungkin telah menemukan pertama kali pada tahun 1841 tetapi tidak mempublikasikannya pada saat itu.

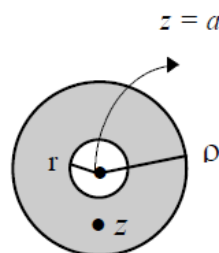
2. Definisi

Bagaimana penderetannya bila $f(z)$ fungsi meromorfik yang gagal analitik di sebuah kutub $z = a$ di dalam daerah konvergensinya? Di dalam sebuah anulus berpusatkan di $z = a$ fungsi $f(z)$ menjadi analitik, karena $z = a$ sudah berada di luar kontur. Daerah konvergensinya menjadi : $r < |z-a| < \rho$. Di dalam daerah penderetan yang berupa anulus ini, deret fungsi yang dihasilkan tidak hanya berupa deret Taylor (4.2) di atas, tetapi menjadi lebih umum dengan bentuk:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$



Daerah konvergensi
Deret Taylor



Daerah konvergensi
Deret Laurent

Suku pertama di ruas kanan tidak lain adalah deret Taylor, dan suku keduanya yang berupa polinomial berpangkat negatif disebut sebagai *bagian utama dari deret* Laurent. Jadi secara umum deret Laurent terdiri dari dua bagian : deret Taylor dan bagian utamanya.

Jadi secara umum deret Laurent terdiri dari dua bagian : deret Taylor dan bagian utamanya.

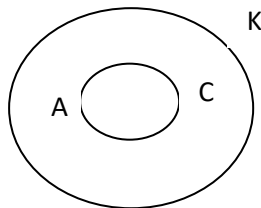
3. Lema Deret Laurent

Diberikan C, K dua lintasan tertutup sederhana $\text{Int}(C) \subseteq \text{Int}(K)$, $A = \text{Ann}(C, K)$. Jika f analitik pada A , maka untuk setiap $z \in A$, berlaku :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t - z_0} dt$$

Bukti :

Diambil lintasan tertutup sederhana L , Sehingga $z \in \text{Int}(L) \subseteq A$. Menurut teorema perluasan Annulus diperoleh:



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t - z_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t - z_0} dt$$

Sedangkan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t - z_0} dt$$

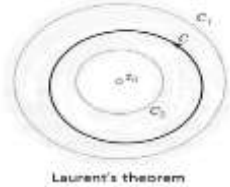
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t - z_0} dt$$

Terbukti bahwa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t - z_0} dt$$

4. Teorema Deret Laurent

Diberikan C,L dua lintasan tertutup sederhana dengan $C=\{t: |t-z_0|=r\}$ dan $K = \{t: |t-z_0|=R\}$, dan $A = \text{Ann}(C,K) = \{t : r \leq |t-z_0| \leq R\}$. Jika f analitik pada A , maka untuk setiap $z \in A$ berlaku :



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dan

Bukti :

Menurut lema 6.5.1 untuk setiap $z \in A$ berlaku :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t - z_0} dt \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{-n+1}} dt$$

Pada deret Taylor, diperoleh

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ dengan}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

akan dicari

$$\frac{-1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \frac{-1}{(t - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)(1 - \frac{t - z_0}{z - z_0})}$$

$$= \frac{-1}{z - z_0} \left(1 + \frac{t - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{t - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{t - z_0}{z - z_0} \right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{t - z_0}{z - z_0} \right)^n}{1 - \left(\frac{t - z_0}{z - z_0} \right)} \right)$$

Oleh karena itu, diperoleh :

$$\frac{-f(t)}{t - z} = \frac{f(t)}{z - z_0} + \frac{f(t)(t - z_0)}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{f(t)(t - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} + \frac{f(t)\left(\frac{t - z_0}{z - z_0}\right)^n}{(t - z)}$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)\left(\frac{t - z_0}{z - z_0}\right)^n}{t - z} dt = 0$$

akibatnya diperoleh

$$\frac{-1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}, \text{ dengan}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(t)(t-z_0)^{n-1} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n-1}} dt$$

Terbukti bahwa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \quad \text{dan} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{-n+1}}$$

Misal $f(z)$ tidak analitik di $z=z_0$ tetapi analitik pada annulus, $R_1 < |z-z_0| < R_2$. Maka fungsi $f(z)$ dapat diperderetkan di $z=z_0$ menjadi bentuk deret (deret Laurent) sebagai berikut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \dots\dots\dots (R_1 < |z-z_0| < R_2)$$

$$\text{dengan } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n=0,1,2,\dots \text{ dan } b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz,$$

$n=1,2,3,\dots$ Lintasan C merupakan lintasan tertutup sederhana yang terletak di dalam annulus yang melingkupi z_0 .

Notasi lain yang biasa digunakan untuk menyatakan bentuk deret Laurent yaitu :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \dots\dots\dots (R_1 < |z-z_0| < R_2), \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

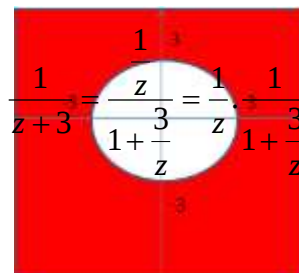
$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

C. Contoh Soal

1. Buatlah menjadi deret laurent, jika diketahui :

$$f(z) = \frac{1}{z+3}, \quad |z| > 3 > - > \left| \frac{3}{z} \right| < 1$$

Penyelesaian:



$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{z} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{z^{n+1}}$$

2. Buatlah menjadi deret laurent, jika diketahui :

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}, 1 < |z-2| < 4$$

Penyelesaian:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1) + B(z+2)}{(z+2)(z-1)}$$

Untuk $z=1$, diperoleh $1=3A$, $A=1/3$

Untuk $z=-2$, diperoleh $1=3B$, $B=1/3$

Maka diperoleh,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right)$$
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-2}}$$

$$= \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{z-2}$$

$$= \frac{1}{z-2+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{4} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{4^{n+1}}$$

jadi uraian deret Laurent dari fungsi analitik $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$ pada

$1 < |z-2| < 4$ adalah

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(z-2)^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n (1-4^n)}{(z-2)^{n+1}}, |z-2| > 4$$

$$f(z) = \frac{e^z - (z+1)}{z^3}, 0 < |z| < \infty$$

Karna $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ dan $e^z - (z+1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
maka uraian deret Laurent dari fungsi analitik $f(z) = \frac{e^z - (z+1)}{z^3}$,
pada $0 < |z| < \infty$ adalah

$$f(z) = \frac{e^z - (z+1)}{z^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n+2)!}$$

D. Latihan Soal

1. Tentukan deret laurent, jika diketahui:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

a. Deret Laurent untuk $1 < |z| < 2$

b. Deret Laurent untuk $|z| > 2$

E. Kunci Jawaban

Penyelesaian Latihan Soal

1. a. $f(z) = 1 < |z| < 2$

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \left[\frac{1}{1 - 1/z} \right] = -\frac{1}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \right], \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - z/2} \right] = -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n \right], \quad \left| \frac{z}{2} \right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2$$

Jadi,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2. \end{aligned}$$

- b. $f(z) = |z| > 2$

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right] = -\frac{1}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \right] \quad , \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad , \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \right] = -\frac{1}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n \right] \quad , \quad \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad , \quad |z| > 2$$

Jadi,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad , \quad |z| > 2.$$



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Dedy, E. and Sumiaty, E., 2001. Fungsi Variabel Kompleks. Bumi Aksara.
- [2] Carrier, G.F., Krook, M. and Pearson, C.E., 2005. Functions of a complex variable: theory and technique. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [3] Markushevich AI. Theory of functions of a complex variable. American Mathematical Soc.; 2013.
- [4] Conway, J.B., 2012. Functions of one complex variable II (Vol. 159). Springer Science & Business Media.
- [5] Sudirham, S., 2002. Analisis Rangkaian Listrik. Bandung: Penerbit ITB.
- [6] Bird, J., 2003. Electrical circuit theory and technology. Routledge.