Buku ajar dengan judul "Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3" merupakan lanjutan dari buku ajar Integral Fungsi Satu Variabel dan Penerapannya yang sudah terbit sebelumnya. Buku ini disusun menggunakan referensi dari berbagai literatur buku dan E-book . Materi di buku ini dijelaskan secara rinci sehingga mudah dipelajari juga disertakan contoh-contoh soal dengan penyelesaiannya yang lebih memudahkan untuk dipahami.

Topik-topik yang dibahas dalam buku ini adalah : Integral Lipat Dua dalam Koordinat Cartesian dan Koordinat Polar serta aplikasinya, Integral Lipat Tiga dalam Koordinat Cartesian dan Koordinat Sileinder serta aplikasinya, Kalkulus Vektor yang membahas perkalian scalar dan Cross, Intergal Garis yang meliputi Teorema Green, Ketaktergantungan Lintasan, aplikasinya menentukan Fluks dan Divergensi dan materi terakhir membahas Integral Permukaan serta aplikasinya untuk menentukan Fluks dan Divergensi. Materi ini disusun dan disesuaikan dengan Rancangan Pembelajaran Pokok (RPP) dan Rencana Pembelajaran Semester (RPS) yang digunakan di Prodi Teknik Perminyakan Universitas Trisakti.

Pada Program Studi Teknik Perminyakan Universitas Trisakti materi-materi pada buku ini terdapat pada matakuliah Matematika 3 yang disajikan di semester 3 dimana sebelumnya sudah lulus matakuliah Matematika 1 dan Matematika 2. Buku ini juga dapat digunakan untuk mahasiswa teknik Sipil, Elektro, Mesin dan Informatika.

ISBN 978-602-0750-16-3

9 786020 750163

MATEMATIKA Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

Dra. Lisa Samura, MT
Dra. Mustamina Maulani, MT
Cahaya Rosyidan, S.Si, M.Sc

MATEMATIKA
Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

PENERBIT UNIVERSITAS TRISAKTI, JAKARTA

MATEMATIKA

Integral Dalam Ruang Dimensi 2 Dan 3

Dra. Lisa Samura, MT
Dra. Mustamina Maulani, MT
Cahaya Rosyidan, S.Si, MSc

MATEMATIKA

Integral Dalam Ruang Dimensi 2 Dan 3

Penerbit Universitas Tri-

Judul Buku : Matematika integral dalam ruang dimensi 2 dan 3

Penulis : Lisa Samura, Mustamina Maulani, Cahaya Rosyidan

Diterbitkan Oleh : Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta

Cetakan Pertama :

ISBN : 978-602-0750-16-3

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, rezeki dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar Matematika dengan judul “Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3 yang menjadi referensi untuk mata kuliah Matematika 3”. Buku ini merupakan lanjutan dari buku Integral Fungsi Satu Variabel dan Penerapannya yang sudah diterbitkan sebelumnya dan dilengkapi dengan contoh-contoh soal dengan penyelesaian yang runut sehingga lebih mudah dimengerti. Harapan penulis buku ini dapat membantu mahasiswa lebih mudah memahami teori dan aplikasi Matematika 3.

Materi buku ajar ini terdiri dari : Integral Lipat Dua dan aplikasinya, Integral Lipat Tiga dan aplikasinya, Kalkulus Vektor, Integral Garis dan Integral Permukaan. Buku ini ditulis dengan bahasa yang mudah dimengerti dan dipahami oleh mahasiswa dan pembaca pada umumnya. Selain itu, diharapkan juga buku ini dapat menambah khazanah keilmuan pada bidang matematika.

Buku ini dapat tersusun dengan baik karena bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Afiat Anugrahadi, MS, Dr. Ir. Muhammad Burhannudinnur, MSc dan Dr. Ir. M. Ali Jambak, MT. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rosyida Permatasari, Ph.D dan Dr. M. Supriadi, MT

sebagai *reviewer* dan Maman Djumantara, ST, MT yang telah membantu penulis untuk mengoreksi buku ajar ini.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan buku ajar ini karena penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini masih belum sempurna. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi kita semua.

Jakarta, 15 November 2019

DAFTAR ISI

BAB 1
INTEGRAL LIPAT DUA

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami konsep Integral lipat dua Koordinat Cartesian dan mampu menyelesaikan integralnya.
2. Memahami konsep Integral lipat dua Koordinat Polar dan mampu menyelesaikan integralnya.
3. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi Integral lipat dua.

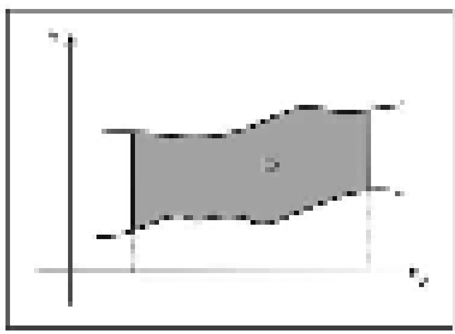
Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral lipat dua di R^2 yang merupakan lanjutan dari integral yang sudah dipelajari pada kalkulus dasar. Integral lipat dua terdiri dari integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian dan Koodinat Polar. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat dua untuk menentukan luas daerah, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda. (Lapidus, 1968)

1.1 Konsep Integral Lipat Dua

Jika D suatu daerah di bidang XY dan f(x,y) fungsi yang didefiniskan pada D maka konsep Integral lipat dua dari fungsi f(x,y) pada D adalah

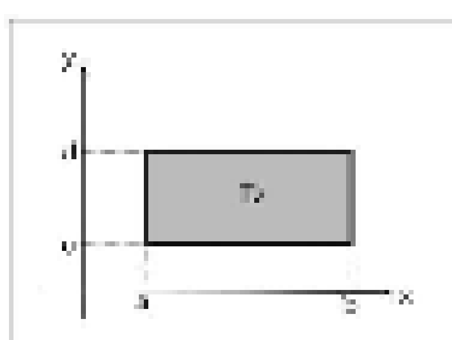
$\iint_D f(x,y)\, dA$ dimana dA adalah diferensial elemen luas (Kreyzig, Kreyzig, & Norminton, 2011) .



Gambar 1.1 Konsep Integral Lipat Dua

CONTOH 1.1

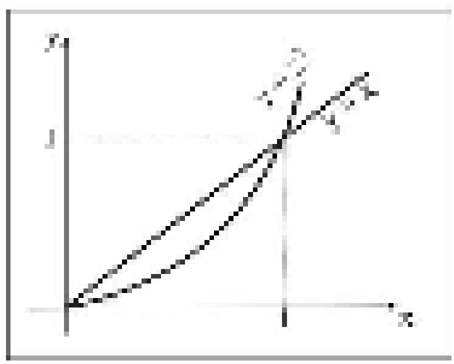
Jika diketahui D = {(x, y) : a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d) dan fungsi pada D adalah f(x,y) = x^2 + xy. Maka integral lipat dua dari f(x,y) pada D [illegible]



Gambar 1.2 Daerah D = {(x,y) : a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d)

CONTOH 1.2

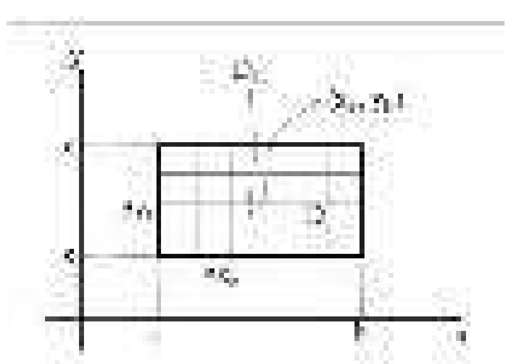
Jika diketahui D = {(x,y) : 0 ≤ x ≤ 1, x ≤ y ≤ x^2} dan fungsi pada D adalah f(x,y) = sin xy. Maka integral lipat dua dari f(x,y) pada D



Gambar 1.3. Daerah D = {(x,y) □0 ≤ x ≤ 1, x ≤ y ≤ x^2}

1.1.1 Definisi Integral Lipat Dua

Misalkan D = {(x,y) : a ≤ x ≤b, c ≤ y ≤ d} suatu daerah empat persegi panjang di bidang xy, seperti diilustrasikan pada gambar di bawah.



Gambar 1.4 Definisi Integral Lipat Dua (KREYSZIG et al., 2011)

Bagi empat persegi panjang D menjadi n buah persegi panjang kecil kecil $\mathbf{D_k}$. Misalkan $\Delta \mathbf{x_k}$ dan $\Delta \mathbf{y_k}$ adalah panjang sisi-sisi $\mathbf{D_k}$. Maka luas $\mathbf{D_k}$ adalah $\Delta \mathbf{A_k} = \Delta \mathbf{x_k} \Delta \mathbf{y_k}$. Selanjutnya ambil titik $\mathbf{(x_k, y_k)}$ di dalam $\mathbf{D_k}$ dan bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

Dimana f(x,y) suatu fungsi yang didefinisikan pada D.

Sebut |P| maksimum panjang diagonal D_k, k = 1,2,....,n dan |P| dikenal sebagai norm partisi P.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1.1.2 Eksistensi Integral Lipat Dua

Bila f didefinisikan dan terbatas pada empat persegi panjang D dan jika f kontinu pada D maka integral lipat dua (Thomas, Weir, & Hass, 2009)

$$\iint_D f(x,y)\,dA \quad \text{ada}$$

Harus diperhatikan syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya f masih bisa diskontinu pada sejumlah berhingga lengkungan-lengkungan licin yang mempunyai turunan. Selanjutnya dalam masalah ini hanya fokus pada fungsi f yang

CONTOH 1.3

Diketahui f(x,y) = sin xy dan D = {(x,y) : $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 4$}. Karena f kontinu dalam D maka $\iint_D \sin xy\, dA$ ada.

1.1.3 Sifat-sifat Integral Lipat Dua

Misalkan f(x,y) dan g(x,y) adalah fungsi-fungsi pada derah D dan c adalah kontanta bilangan Real. (Mathematics, n.d.)

Sifat penting yang dipenuhi oleh integral lipat dua

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]

CONTOH 1.4

$$\iint_D 15\,(x^2 + 3xy)\,dA = 15\iint_D x^2\,dA + 15\iint_D 3xy\,dA$$

CONTOH 1.5

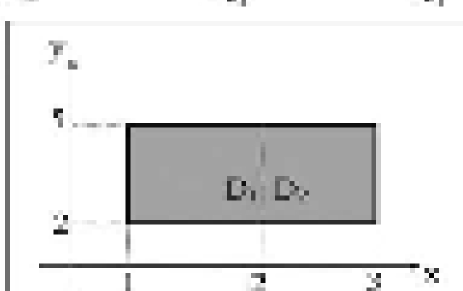
Jika diketahui D = {(x,y) :1 ≤ x ≤ 3, 2 ≤ y ≤ 5} .

Misalkan D_1 = {(x,y) : 1 ≤ x ≤ 2, 2 ≤ y ≤ 5}

dan D_2= {(x,y) : 2 ≤ x ≤ 3, 2 ≤ y ≤5} .

Maka

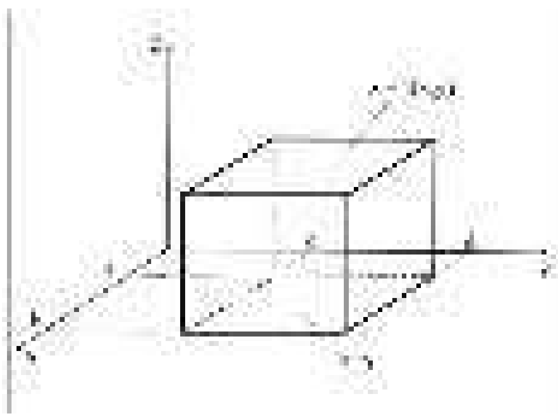
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$



Gambar 1.5 Daerah D = D$_1$ U D$_2$

1.1.4 Arti Geometris Integral Lipat Dua

Jika f(x,y) ≥ 0 dan f didefinisikan pada D = {(x,y) : a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d} maka $\iint_D f(x,y)dA$ ah volume benda pejal yang terletak di bawah permukaan z = f(x,y) dan di atas empat persegi panjang D. Empat persegi panjang D berada di atas bidang XOY yang juga merupakan proyeksi dari volume benda pejal terhadap bidang XOY. (Penerapannya,



Gambar 1.6 Arti geometris Integral Lipat Dua

1.2 Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

1.2.1 Tafsiran Integral Lipat Dua dalam Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D.

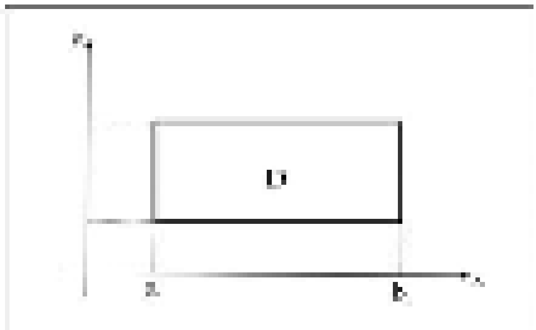
1. Jika D daerah yang dibatasi oleh a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d, maka integral lipat dua dapat dinyatakan

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)dy\,dx$$

Integral ruas kanan disebut juga integral berulang f terhadap y dahulu kemudian diintegralkan terhadap x.

Integral lipat dua di atas juga dapat ditulis dalam bentuk integral berulang f terhadap x dahulu kemudian diintegralkan terhadap y, dan dapat dinyatakan dalam bentuk

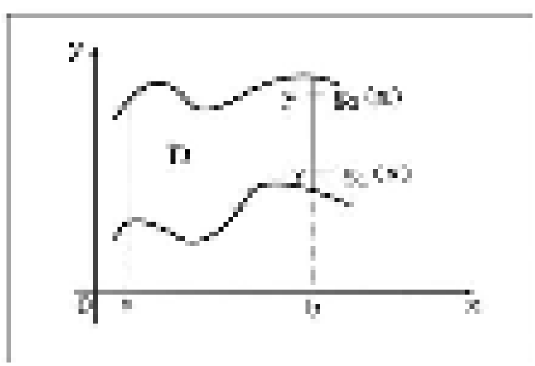
$$\iint_{D} f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy$$



Gambar 1.7 Tafsiran I Integral Lipat Dua

2. Jika D daerah yang dibatasi a ≤ x ≤ b, g_1 (x) ≤ y ≤ g_2 (x),

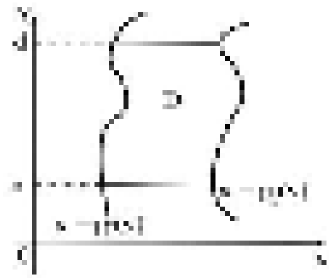
$$\iint_{D} f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



Gambar 1.8. Tafsiran II Integral Lipat Dua

3. Jika D daerah yang dibatasi $p_1(y) \leq x \leq p_2(y)$, $c \leq y \leq d$,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

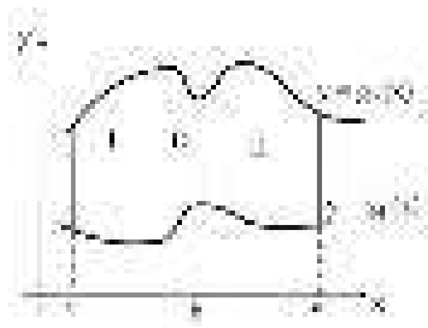


Gambar 1.9. Tafsiran III Integral Lipat Dua

4. Jika $D = D_1 \cup D_2$, dimana D_1 dibatasi $a \leq x \leq b$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ dan D_2 dibatasi oleh $b \leq x \leq c$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Misalkan f(x,y) fungsi yang bekerja pada D maka

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx + \int_b^c \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

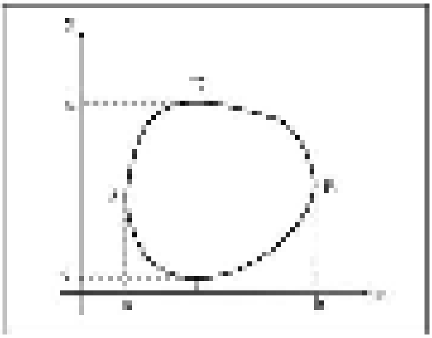


Gambar 1.10. Tafsiran IV Integral Lipat Dua

CONTOH 1.6

Tafsirkan $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\} =$
$\{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

Penyelesaian



Gambar 1.11 Daerah D dibatasi 4 lengkungan

Dari gambar di atas misalkan:

$y = g_1(x)$ adalah lengkungan ACB
$y = g_2(x)$ adalah lengkungan ADB
$x = h_1(y)$ adalah lengkungan CAD
$x = h_2(y)$ adalah lengkungan CBD

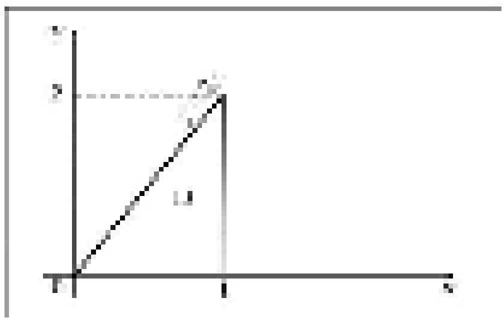
Maka tafsiran $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

atau $= \int_{y=c}^{d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

CONTOH 1.7

Tafsirkan $\iint_D f(x,y)dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh y = 2x, x = 1 dan sumbu x

Penyelesaian:



Gambar 1.12 Daerah D dibatasi y=2x, x=1 dan sumbu x

dengan mengganti $y = 2x$ menjadi $x = \frac{1}{2}y$

maka $\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$

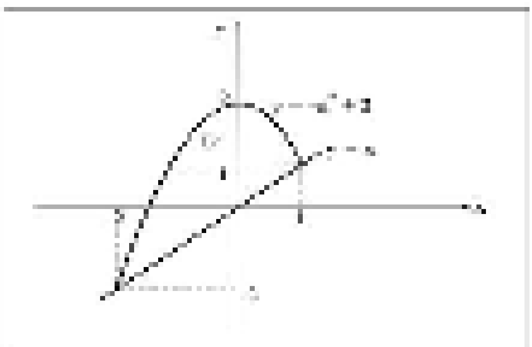
atau

$= \int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{1}{2}y}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$

CONTOH 1.8

Tafsirkan $\iint_D f(x,y)dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

Penyelesaian:



Gambar 1.13 Daerah D yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

Perpotongan $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

diperoleh $x = -x^2 + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

maka $x = 1$ dan $x = -2$

Dari persamaan $y = -x^2 + 2$ maka $x = \pm\sqrt{2 - y}$

Jadi $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{1}\int_{x}^{-x^2+2} f(x,y)\,dy\,dx$

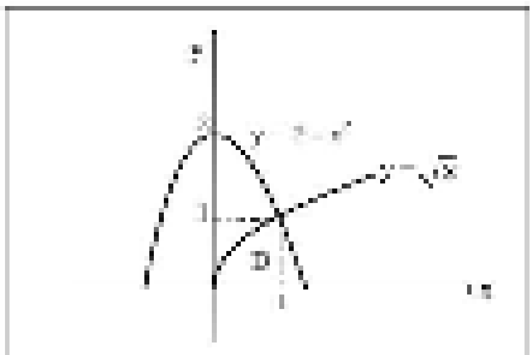
atau

$= $ [illegible]

CONTOH 1.9

Diketahui [illegible] Ubahlah batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Penyelesaian :



Gambar 1.14 Daerah D yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = \sqrt{x}$

[illegible]

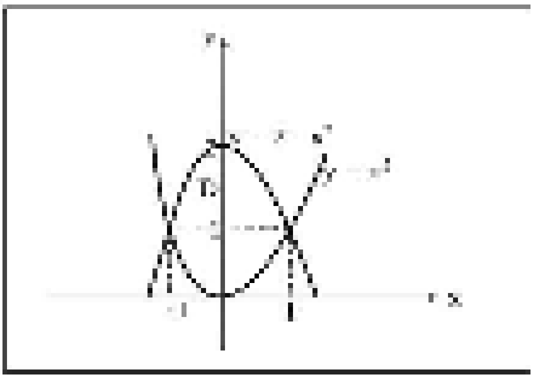
[illegible]

[illegible]

CONTOH 1.10

Diketahui [illegible] Ubahlah batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Penyelesaian:



Gambar 1.15 Daerah D yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

[illegible] $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

[illegible] $x^2 = -x^2 + 2$

$x^2 + x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 1$ maka $x = \pm 1$

Ubah persamaan lengkungan ke fungsi y, diperoleh

$y = 2 - x^2$ maka $x = \pm\sqrt{2 - y}$

$y = x^2$ maka $x = \pm\sqrt{y}$

[illegible]

I.3 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub (Polar)

Titik-titik di bidang dapat dinyatakan dalam koordinat Polar P(r,θ), dimana:

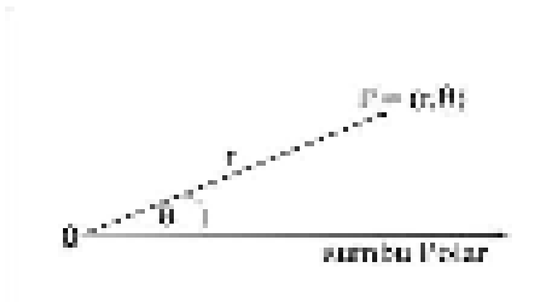
r = jarak titik O dengan P

θ = sudut antara sumbu polar dengan OP

Dengan batasan :

$r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ atau dengan arah negatif $-\pi \leq \theta \leq \pi$



Gambar 1.16 Koordinat Polar

Kaitan Koordinat Cartesian dan Koordinat Polar dijabarkan sebagai berikut. Dengan mengambil O sebagai titik polar dan sumbu x positif sebagai sumbu polar diperoleh hubungan (Samura & Pengantar, n.d.)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

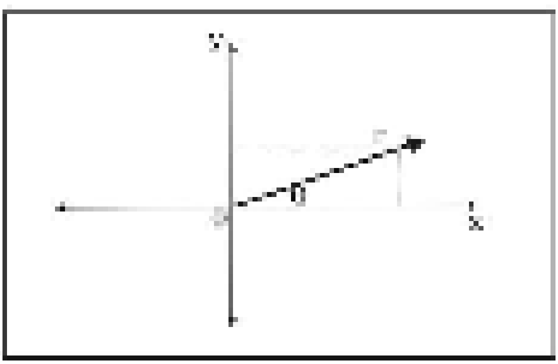
Dalam bentuk Matriks Jacobi

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

$$\text{Dan } dA = J\, dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ (arah θ berlawanan dengan arah jarum jam, $\theta = 0°$ adalah sumbu x positif)

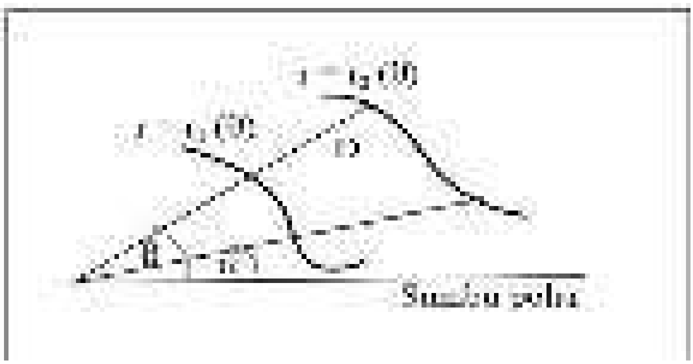


Gambar 1.17. Kaitan Koordinat Cartesian dengan Koordinat Polar

Definisi Integral Lipat Dua Koordinat Polar

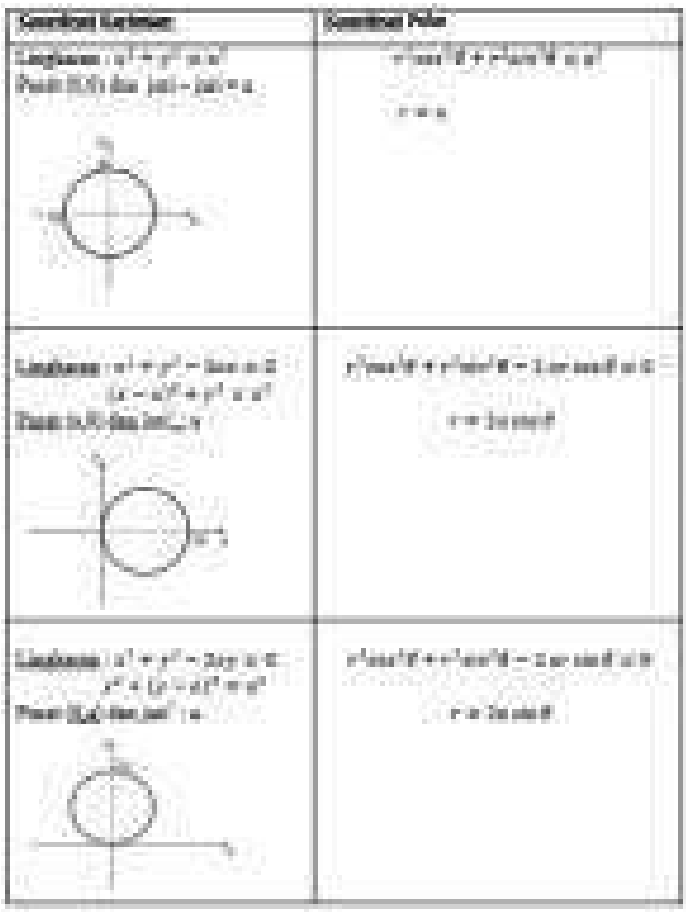
Jika D daerah yang dibatasi oleh $r = r_1(\theta)$ dan $r = r_2(\theta)$ dengan $\theta = \alpha$ sampai $\theta = \beta$, maka tafsiran Integral Lipat dua dalam koordinat Polar adalah

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



Gambar 1.18 Tafsiran Integral lipat dua Koordinat Polar (Wahyuni, 2017)

I.3.1 Beberapa Daerah D yang Berhubungan dengan Koordinat Polar

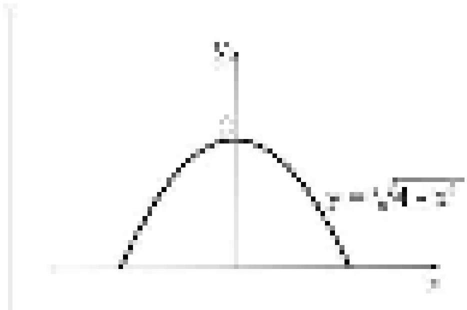


Gambar 1.19 Gambar-gambar yang berhubungan dengan koordinat Polar

CONTOH 1.11

Hitung $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan $y = 0$

Penyelesaian:



Gambar 1.20 Daerah D yang dibatasi oleh $y = \sqrt{(4 - x^2)}$ dan y = 0

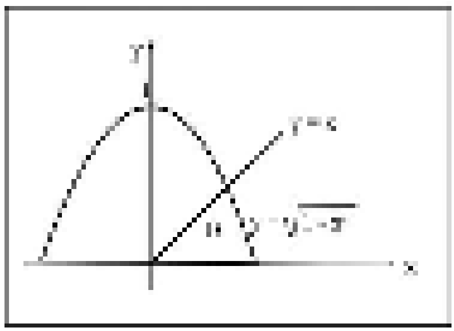
$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2} r \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2} r^2\, dr\, d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{8}{3}\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}
$$

CONTOH 1.12

Hitung $\iint_D xy\, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh

[illegible]

Penyelesaian :



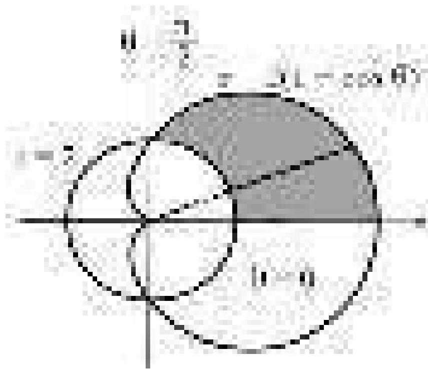
Gambar 1.21 Daerah D yang dibatasi $y = \sqrt{1 - x^2}$, y = x dan y = 0

[illegible]

CONTOH 1.13

Hitunglah $\iint_D 3y\,dA$ ika D daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran r = 2 dan di dalam kardioda r = 2(1 + cos θ)

Penyelesaian:



Gambar 1.22 D daerah di luar r = 2 dan di dalam r = 2(1 + cos θ)

Karena D adalah himpunan sederhana lingkaran r, sehingga soal di atas dapat ditulis sebagai integral lipat dua dengan koordinat polar dimana r sebagai peubah pengintegralan sebelah dalam dari r = 2 sampai r =

Maka $\iint_D 3y\,dA$ $= \int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} 3(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \left[r^3 \sin\theta\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$

$= 8\int_0^{\pi/2} \left[(1+\cos\theta)^3\sin\theta - \sin\theta\right] d\theta$

$= 8\left[-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 + \cos\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= 22$

I.4 Aplikasi Integral Lipat Dua

1. Jika D daerah pada bidang XY maka luas D adalah (Mauch, 2002):

   [illegible]

2. Titik Pusat Massa

   Jika D daerah pada bidang XY dan ρ(x,y) rapat massa disetiap titik pada D, maka :

   - [illegible]
   - [illegible]
     - [illegible]
     - [illegible]
   - [illegible]

     [illegible]

3. Momen Inersia adalah jarak kuadrat dari titik pusat massa ke sumbu

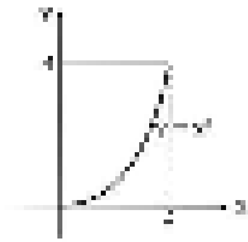
   - [illegible]
   - [illegible]
   - [illegible]

     [illegible]

CONTOH 1.14

Hitung luas daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 1.23 Daerah D dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran I.

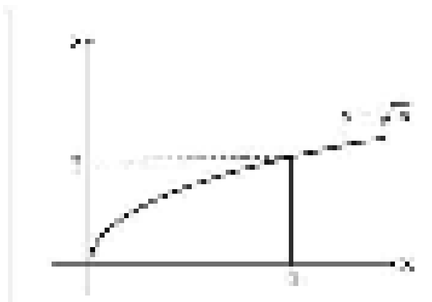
$$\text{Luas } D = \iint_D dA = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{4} dy\, dx$$
$$= \int_{x=0}^{2} [y]_{x^2}^{4}\, dx$$
$$= \int_{x=0}^{2} (4 - x^2)\, dx$$
$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ satuan luas}$$

CONTOH 1.15

Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, tentukan :

a. Massa lamina
b. Titik pusat massa
c. Momen Inersia I_x, I_y dan I_z

Penyelesaian :



Gambar 1.24 Daerah D dibatasi y= $\sqrt{x}$, y = 0 dan x = 4

a. Massa lamina = $m = \iint_D \rho(x,y)\, dA = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy\, dy\, dx$

$$= \int_{x=0}^{4} x \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x \left(\frac{1}{2} x\right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{2} x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{6} x^3\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3}$$

b. $M_y = \iint_S x\,\rho(x,y)\,dA$

$= \int_{x=0}^{[illegible]} \int_{y=0}^{[illegible]} x\,(xy)\,dy\,dx$

$= \int_{x=0}^{[illegible]} \int_{y=0}^{[illegible]} x^2 y\,dy\,dx$

$= \int_{x=0}^{[illegible]} x^2\,\frac{1}{2}y^2\Big]_0^{[illegible]}\,dx$

$= \int_{x=0}^{[illegible]} \frac{1}{2}x^2 x [illegible]\,dx$

$= \int_{[illegible]}^{[illegible]} \frac{1}{2}x^4\,dx$

$= \left[\frac{1}{[illegible]}x^{[illegible]}\right]_{[illegible]}^{[illegible]}$

$= [illegible]$

$M_x = \iint_S y\,\rho(x,y)\,dA$

$= \int_{[illegible]}^{[illegible]} \int_{[illegible]}^{[illegible]} y\,(xy)\,dy\,dx$

$= \int_{[illegible]}^{[illegible]} \int_{[illegible]}^{[illegible]} x\,y^2\,dy\,dx$

$= \int_{[illegible]}^{[illegible]} x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{[illegible]}^{[illegible]}\,dx$

$= \int_{[illegible]} \frac{1}{3}x^{[illegible]}\,dx$

$= \left[[illegible]\,x^{[illegible]}\right]_{[illegible]}^{[illegible]}$

$= \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = [illegible] = [illegible]$

$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = [illegible] = [illegible]$

[illegible] $(\bar{x}, \bar{y}) = ([illegible], [illegible])$

c. Momen inersia

- $I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dA$

$= \int_{[illegible]} \int_{[illegible]} y^2 (xy)\, dy\, dx$

$= \int_{[illegible]} \int_{[illegible]} x\, y^3\, dy\, dx$

$= \int_{[illegible]} x \left[\frac{1}{4} y^4\right]_{[illegible]} dx$

$= \int_{[illegible]} [illegible]\, x^{[illegible]}\, dx$

$= \left[[illegible]\right]_{[illegible]}$

$= 16$

- $I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dA$

$= \int_{[illegible]} \int_{[illegible]} x^2 (xy)\, dy\, dx$

$= \int_{[illegible]} \int_{[illegible]} x^3 y\, dy\, dx$

$= \int_{[illegible]} x^3 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{[illegible]} dx$

$= \int_{[illegible]} [illegible]\, x^{[illegible]}\, dx$

$= \left[[illegible]\right]_{[illegible]}$

$= \frac{512}{5}$

- $I_0 = I_x + I_y$

$= 16 + \frac{512}{5} = \frac{592}{5}$

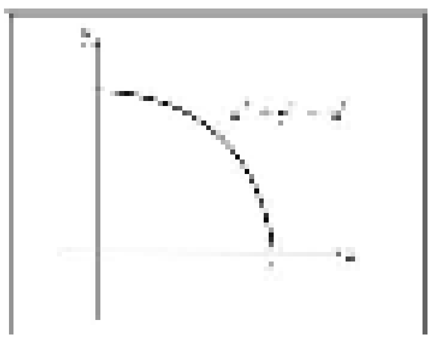
CONTOH 1.16

Jika D lamina yang berbentuk seperempat lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y)$ sebanding dengan jarak titik (x,y) ke pusat lingkaran.

Tentukan :

a. Massa lamina
b. Titik pusat massa
c. Momen Inersia I_x, I_y dan I_z

Penyelesaian:



Gambar 1.25 Daerah D dibatasi $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I

a. Rapat massa $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, k konstanta

Massa lamina $m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$

$= \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\, dA$, gunakan koordinat polar

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

b. $M_y = \iint_S x\,\delta(x,y)\,dA$

$= \iint_S x\,k\sqrt{x^2+y^2}\,dA$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$M_x = \iint_S y\,\delta(x,y)\,dA$

$= \iint_S y\,k\sqrt{x^2+y^2}\,dA$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} =$ [illegible]

$\bar{y} = \frac{M_x}{m} =$ [illegible]

Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) =$ [illegible]

c. Momen-momen Inersia

- $I_x = \iint_S y^2\, \delta(x,y)\, dA$

  $= \iint_S y^2\, k\sqrt{x^2+y^2}\, dA$

  [illegible]

  [illegible]

  [illegible]

  [illegible]

  $= \frac{1}{[illegible]}\, k\pi a^5$

- $I_y = \iint_S x^2\, \delta(x,y)\, dA$

  [illegible]

  [illegible]

  [illegible]

  [illegible]

  [illegible]

  $= \frac{1}{[illegible]}\, k\pi a^5$

- $I_z = I_x + I_y$

  $= \frac{1}{[illegible]}\, k\pi a^5 + \frac{1}{[illegible]}\, k\pi a^5$

  $= \frac{[illegible]}{[illegible]}\, k\pi a^5$

CONTOH 1.17

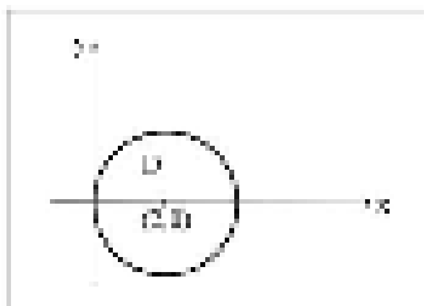
Jika D daerah yang dibatasi oleh lingkaran $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y) = k(x^2)$. Tentukan :

a. $\iint_D g(x,y)\, dA$ dimana $g(x,y) = 2y$

b. Massa lamina

c. Momen inersia I_y

Penyelesaian:



Gambar 1.26. Daerah D dibatasi $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

a. $\iint_D g(x,y)\, dA$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 2 dan pada pertemuan ke 3 diadakan Quiz di awal perkuliahan.

LATIHAN 1

1. [illegible]
   a. [illegible]
   b. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]
7. [illegible]
8. [illegible]
9. [illegible]
10. [illegible]
11. [illegible]
    a. [illegible]
    b. [illegible]

BAB 2
INTEGRAL LIPAT TIGA

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami benda-benda di ruang tiga dimensi
2. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat Cartesian
3. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat silinder
4. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi integral lipat tiga.

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari benda-benda di ruang dimensi tiga, pengertian dan definisi integral lipat tiga. Selanjutnya akan dipelajari integral lipat tiga dalam Koordinat Cartesian dan Koodinat Silinder. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat tiga untuk menentukan volume benda, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda.

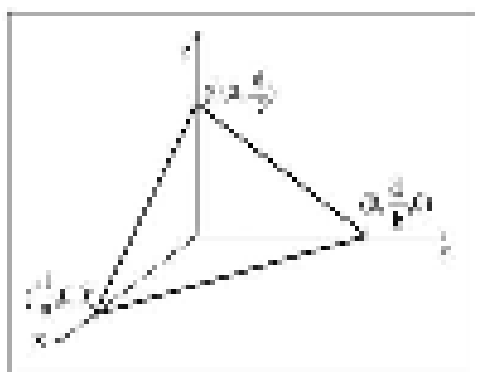
2.1 Gambar-gambar Bidang di Ruang Tiga Dimensi

Sebelum masuk ke pembahasan integral lipat tiga, kita harus mengetahui terlebih dahulu bentuk bidang yang digunakan dalam ruang berdimensi tiga. Beberapa bidang yang umumnya digunakan yaitu: (Wrede & Spiegel, n.d.)

1. Limas segitiga $ax + by + cz = d$, dimana a, b, c, d tidak sama dengan nol.

   Cara menggambar:

   - [illegible]
   - [illegible]
   - [illegible]



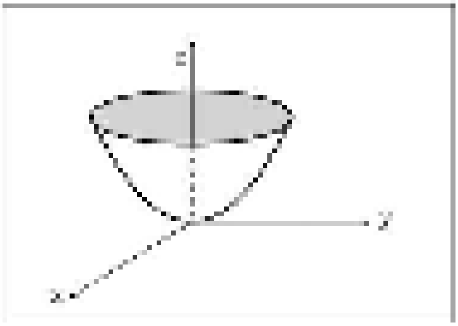
Gambar 2.1. Limas Segitiga

2. Paraboloida $z = x^2 + y^2$

   Cara menggambar:

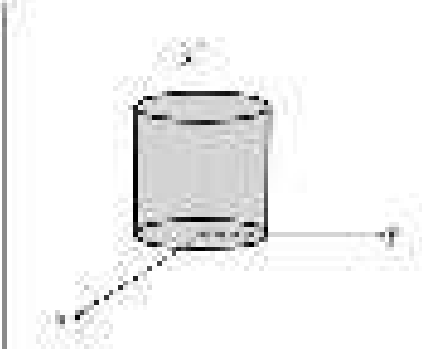
   Misal $x = 0 \rightarrow z = y^2$ (di bidang YOZ, berbentuk parabola)

   Misal $y = 0 \rightarrow z = x^2$ (di bidang XOZ, berbentuk parabola)



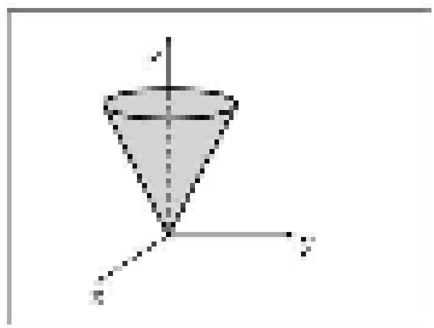
Gambar 2.2 Paraboloida

3. Silinder / Tabung $x^2 + y^2 = r^2$



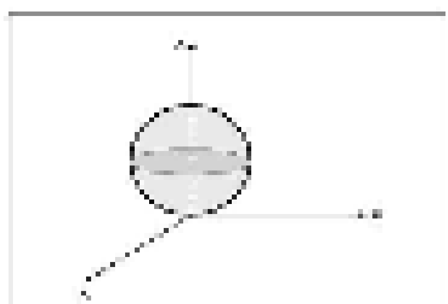
Gambar 2.3. Tabung / silinder

4. Kerucut Tegak $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Gambar 2.4. Kerucut tegak

5. Bola $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

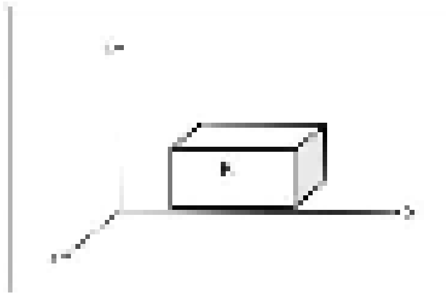


2.1.1 Konsep Integral Lipat Tiga

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan integral lipat dua dapat diperluas dengan cara yang alamiah menjadi integral lipat tiga atau bahkan menjadi integral lipat n.

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang dibatasi oleh beberapa permukaan. Jika f(x, y, z) suatu fungsi yang bekerja pada B maka integral lipat tiga dari fungsi f atas B ditulis

$\iiint_B f(x, y, z)\,dV$ [illegible]



Gambar 2.6 Konsep Integral Lipat Tiga

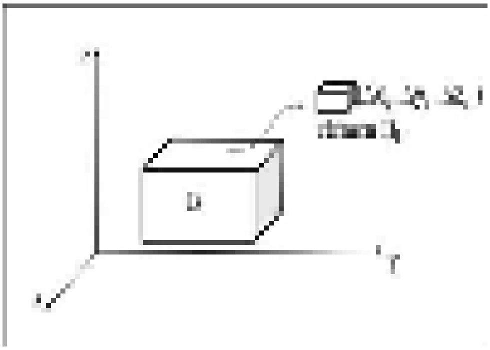
2.1.2 Definisi Integral Lipat Tiga

Bagi daerah B atas daerah-daerah kecil B_k, $k = 1, 2, 3, ..., n$ yang berbentuk paralelepipedium (kotak) yang sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu x, y dan z. Misalkan volume B_k adalah ΔV_k dan ambil titik (x_k, y_k, z_k) dalam B_k. Kemudian bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$$

Sebut |P| = panjang diagonal terpanjang dari semua B_k, $k = 1, 2, 3, ..., n$.

[illegible]



Gambar 2.7 Definisi Integral Lipat Tiga

2.1.3 Eksistensi Integral Lipat Tiga

Jika f kontinu dan terbatas pada B maka $\iiint_B f(x, y, z)dV$ ada.

Syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya fungsi f masih dapat diskontinu pada sejumlah berhingga permukaan licin sehingga dapat terdiferensial. Pembahasan selanjutnya hanya difokuskan pada f

CONTOH 2.1

Jika diketahui $f(x, y, z) = x^2 yz$ dan $B = \{(x, y, z) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 2\}$. Karena f kontinu pada B maka $\iiint_B x^2 yz\, dV$ ada.

2.1.4 Sifat-sifat Integral Lipat Tiga

Beberapa sifat penting yang dipenuhi integral lipat tiga yaitu:

1. $\iiint_B [f(x, y, z) + g(x, y, z)]\, dV = \iiint_B f(x, y, z)\, dV + \iiint_B g(x, y, z)\, dV$
2. $\iiint_B \alpha f(x, y, z)\, dV = \alpha \iiint_B f(x, y, z)\, dV$

3. Untuk B_1 dan B_2 yang memenuhi $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ permukaan, maka

   $\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \iiint_{B1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{B2} f(x, y, z)\, dV$

4. Jika $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap (x, y, z) anggota B, maka

   $\iiint_B f(x, y, z)\, dV \leq \iiint_B g(x, y, z)\, dV$

CONTOH 2.2

$$\iiint_B (4x^2 + 3y)dV = \iiint_B 4x^2\, dV + \iiint_B 3y dV$$

CONTOH 2.3

Jika $B = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 4\}$.

Misalkan $B_1 = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$ dan

$B_2 = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4\}$

Maka $\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \iiint_{B1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{B2} f(x, y, z)\, dV$

CONTOH 2.4

Jika $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ dan $B = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$. Karena $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap $(x, y, z) \in B$, maka $\iiint_B f(x, y, z)\, dV \leq \iiint_B g(x, y, z)\, dV$.

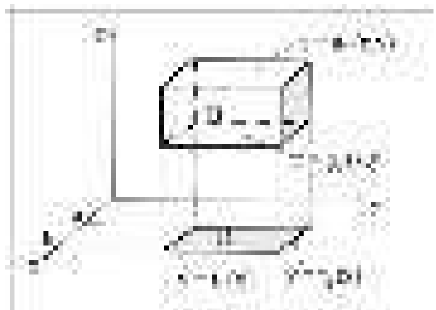
2.2 Integral Lipat Tiga Koordinat Kartesian

Misalkan B suatu daerah di ruang yang dibatasi di atas oleh permukaan $z = g_2(x, y)$ dan di bawah oleh $z = g_1(x, y)$. Misalkan D adalah proyeksi B pada bidang XY, maka

$\iiint_B f(x, y, z)\, dV$ dapat ditafsirkan sebagai berikut

$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left(\int_{z=g1(x,y)}^{z=g2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right) dA$

Integral di ruas kanan adalah integral berulang, dimana yang pertama diintegralkan terhadap z dan kemudian integral lipat dua seperti yang telah dipelajari pada bab I. Untuk selanjutnya tanda kurung dalam integral berulang dihapuskan dan integral yang paling dalam dikerjakan terlebih dahulu. (Kreyszig, 2014)



Gambar 2.8 Tafsiran Integral Lipat Tiga (Kreyszig, 2006)

Misalkan B daerah yang dibatasi oleh bidang-bidang $x = a$, $x = b$, $y = t_1(x)$, $y = t_2(x)$ dan permukaan $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$.

Jadi $B = \{(x, y, z) : a \le x \le b, t_1(x) \le y \le t_2(x), g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$ dan $D = \{(x, y) : a \le x \le b, t_1(x) \le y \le t_2(x)\}$ adalah proyeksi B terhadap bidang XY.

Maka tafsiran Integral lipat tiga

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{t_1(x)}^{t_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

CONTOH 2.5

Selesaikan integral berulang [illegible]

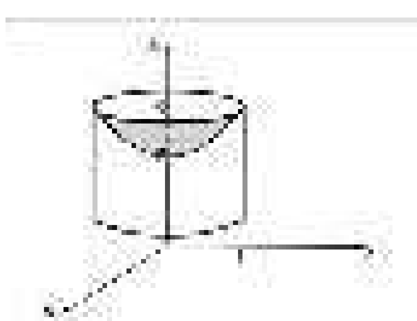
Penyelesaian :

[illegible]

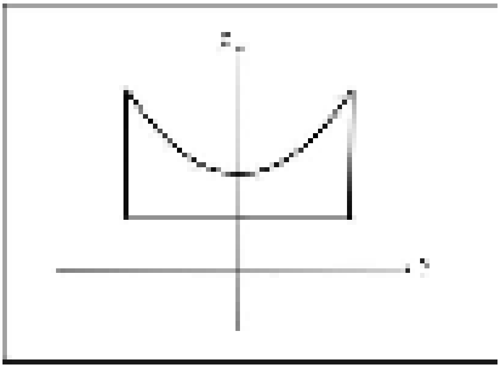
CONTOH 2.6

Tafsirkan $\iiint_B f(x, y, z)\ dV$ dimana B daerah yang dibatasi oleh $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$ dan $x^2 + y^2 = 1$

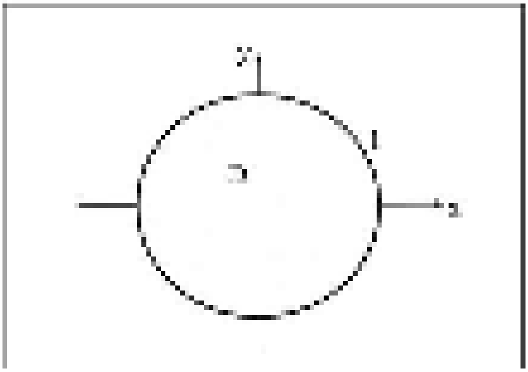
Penyelesaian:



Gambar 2.9 B dibatasi oleh $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$ **dan** $x^2 + y^2 = 1$



Gambar 2.10 Penampang di bidang YZ



Gambar 2.11 Proyeksi B terhadap bidang XY

$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}$

dan proyeksi B terhadap bidang XY adalah $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Jadi

[illegible]

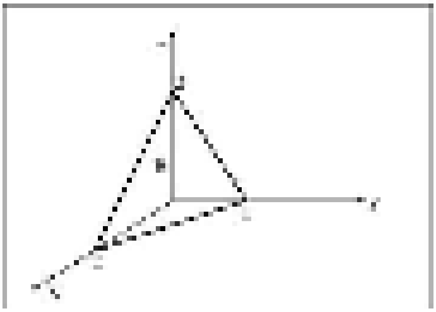
[illegible]

[illegible]

CONTOH 2.7

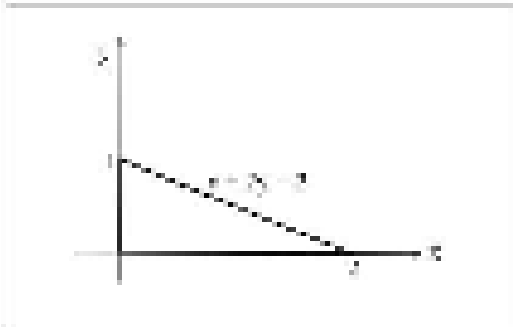
Tentukan $\iiint_B (2x)\, dV$ jika B daerah yang dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 2.12 B dibatasi $x + 2y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$.

Proyeksi B pada bidang XY adalah daerah D yang dibatasi oleh $x = 0, y = 0$ dan $x + 2y = 2$



Gambar 2.13 D dibatasi $x + 2y = 2, x = 0, y = 0$

Jadi

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

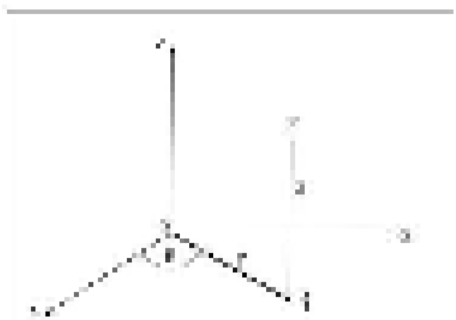
[illegible]

[illegible]

[illegible]

2.3 Integral Lipat Tiga Dalam Koordinat Silinder/ Tabung

Ketika sebuah benda B dalam ruang berdimensi tiga mempunyai sebuah sumbu simetri, maka perhitungan integral lipat tiga atas B sering dipermudah dengan menggunakan koordinat silinder. (Kreyszig, 2013)



Gambar 2.14 Koordinat Silinder

Jika P suatu titik di ruang dan P_1 proyeksi P pada bidang XY.

Sebut $OP_1 = r$ adalah jari-jari dan θ adalah sudut yang dibentuk OP_1 dengan sumbu x positif.

Maka koordinat silinder dari P adalah $P(r, \theta, z)$

Hubungan antara kordinat Kartesian dengan koordinat

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

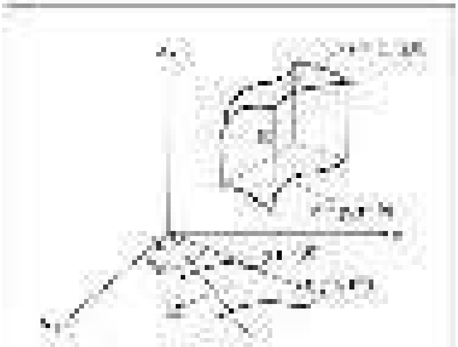
Dalam koordinat silinder $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Determinan Matriks Jacobi $|J| = \left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

Sehingga $\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \iiint_B f(r, \theta, z)\, |\, J\, |\, dz\, dr\, d\theta$
$= \iiint_B f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

Bila B daerah yang dibatasi di bawah oleh permukaan $z = g_1 (r, \theta)$, di atas oleh permukaan $z = g_2 (r, \theta)$, silinder-silinder r $= r_1 (\theta), r = r_2 (\theta)$ dan bidang-bidang $\theta = \theta_1$ *dan* $\theta = \theta_2$.



Gambar 2.15 Tafsiran Integral Lipat tiga Koordinat Silinder

Maka

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

CONTOH 2.8

Tentukan koordinat silinder dari titik $P\ (1, 1, 2)$

Penyelesaian:

$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$

$\theta = arc\ tg\ \frac{y}{x} = arc\ tg\ 1 \quad maka\ \theta = \frac{\pi}{4}$

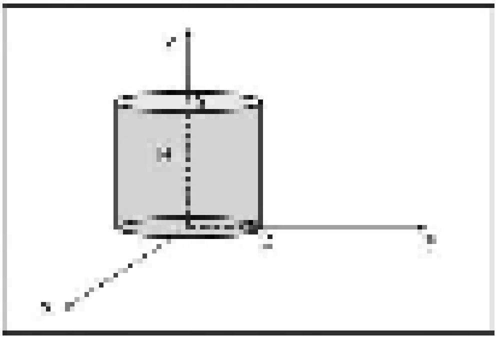
$z = 2$

Maka $P(r, \theta, z) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 2)$

CONTOH 2.9

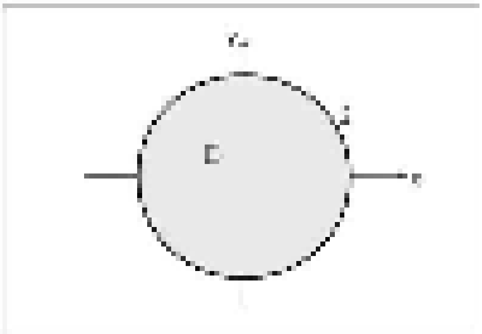
Tentukan $\iiint_B dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ bidang $z = 0, z = 6$

Penyelesaian:



Gambar 2.16 B dibatasi $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah



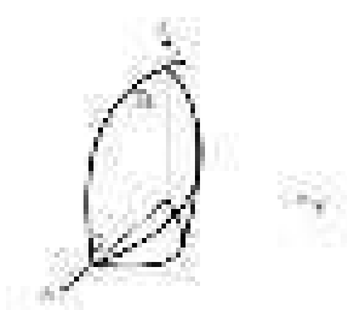
Gambar 2.17 D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$
\begin{aligned}
\iiint_B dV &= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{6} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2} [rz]_{z=0}^{6}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2} 6r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [3r^2]_{r=0}^{2}\,d\theta \\
&= 12\,(2\pi) \\
&= 24\pi
\end{aligned}
$$

CONTOH 2.10

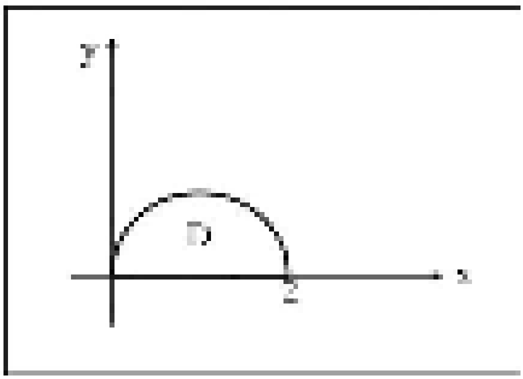
Tentukan $\iiint_B 2xy\,dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ dan $y = 0$ di oktan pertama.

Penyelesaian:



Gambar 2.18 B dibatasi $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ & $y = 0$ di oktan I.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.19 D dibatasi $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$ di kuadran I

Dari permukaan di atas diperoleh

$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow (x^2 - 2x) + y^2 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

maka $r = 2 \cos \theta$

Jadi

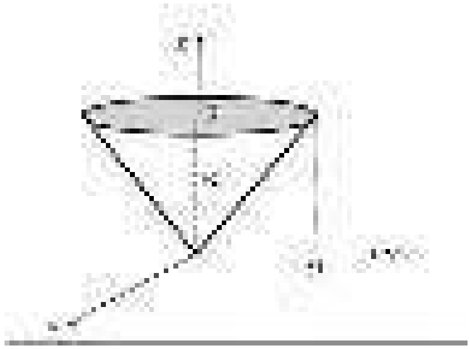
CONTOH 2.11

Tentukan $\iiint_B x^2 y \; dV$ jika B benda yang dibatasi oleh z = $\sqrt{(x^2+y^2)}$, dan $z = 9$.

Penyelesaian:

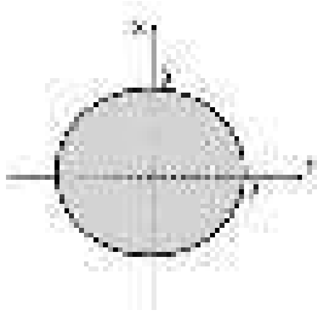
Perpotongan $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ dan $z = 9$

Diperoleh $r = 9$



Gambar 2.20 *B* dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$, dan $z = 9$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.21 *D* dibatasi oleh $\sqrt{(x^2+y^2)} = 9$

Maka

[illegible]

2.4 Aplikasi Integral Lipat Tiga

1. Volume daerah B adalah : $V = \iiint_B dV$
2. Titik Pusat Massa

   Misalkan $\rho\,(x, y, z)$ rapat massa disetiap titik pada B, maka :

   - Massa $B = m = \iiint_B \rho\, dV$
   - Momen massa (jarak linier titik pusat massa ke bidang).
     - Momen massa terhadap bidang xy ditulis $M_{xy} = \iiint_B \rho z$

dV 

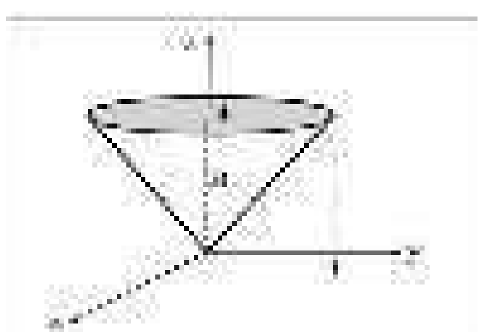
- Momen massa terhadap bidang yz ditulis $M_{yz} = \iiint_B \rho x \, dV$
- Momen massa terhadap bidang xz ditulis $M_{xz} = \iiint_B \rho y \, dV$

• Titik pusat massa =

CONTOH 2.12

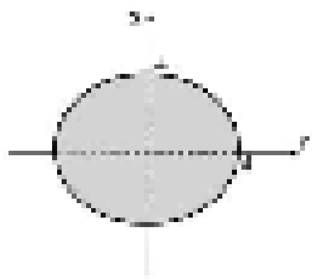
Jika B benda yang dibatasi oleh $z=\sqrt{(x^2 + y^2)}$ dan $z = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $3\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Tentukan :

a. Volume B
b. Titik pusat massa B
c. Momen inersia terhadap sumbu z



Gambar 2.22 B **yang dibatasi oleh** $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ **dan** $z = 4$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah.



Gambar 2.23. ***D*** **dibatasi lingkaran dengan** ***r = 4***

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Karena B simetri terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$, jadi cukup dicari momen massa terhadap bidang xy

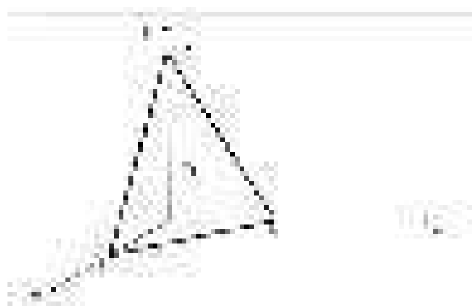
[illegible]

CONTOH 2.13

Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah k, k konstanta. Tentukan:

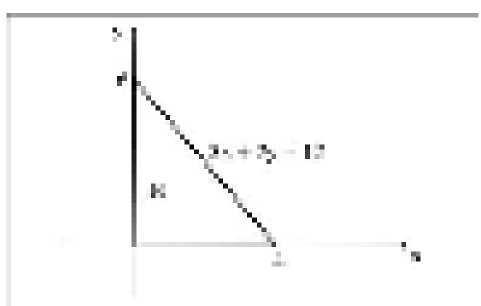
a. Volume B
b. Momen inersia terhadap sumbu y

Penyelesaian:



Gambar 2.24. $\boldsymbol{B}$ **dibatasi oleh** $\boldsymbol{3x + 2y + z = 12}$ **dan** $\boldsymbol{z = 0}$.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah D yang diberikan pada gambar di bawah



Gambar 2.25. $\boldsymbol{D}$ **dibatasi oleh** $\boldsymbol{3x + 2y = 12}$**, sumbu x dan sumbu y**

Untuk persamaan bidang $3x + 2y + z = 12$ maka $z = 12 - 3x - 2y$

Untuk bidang $z = 0$, $3x + 2y = 12$ maka $y = 6 - \frac{3}{2}x$

Volume benda $V = \iiint_S dV = \iiint_S dz\,dy\,dx$

$$= \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}x} \int_0^{12-3x-2y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}x} [z]_0^{12-3x-2y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}x} (12 - 3x - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 [12y - 3xy - y^2]_0^{6-\frac{3}{2}x}\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(12\left(6 - \frac{3}{2}x\right) - 3x\left(6 - \frac{3}{2}x\right) - \left(6 - \frac{3}{2}x\right)^2\right)dx$$

$$= \int_0^4 \left((72 - 18x) - \left(18x - \frac{9}{2}x^2\right) - \left(36 - 18x + \frac{9}{4}x^2\right)\right)dx$$

$$= \int_0^4 \left(72 - 18x - 18x + \frac{9}{2}x^2 - 36 + 18x - \frac{9}{4}x^2\right)dx$$

$$= \int_0^4 \left(36 - 18x + \frac{9}{4}x^2\right)dx$$

$$= \left[36x - 9x^2 + \frac{3}{4}x^3\right]_0^4$$

$$= 36 \cdot 4 - 9 \cdot 16 + \frac{3}{4} \cdot 64$$

$$= 48 \text{ satuan volume}$$

b. Momen inersia terhadap sumbu y

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

CONTOH 2.14

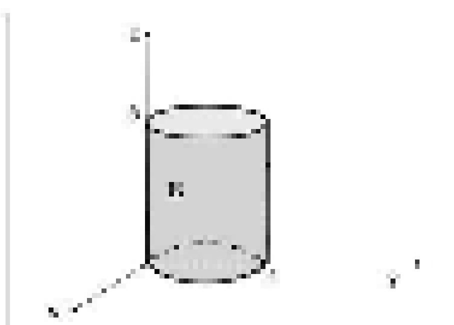
Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + (y - 2)^2 = 4, z = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
Tentukan:

a. Volume B

b. Massa B

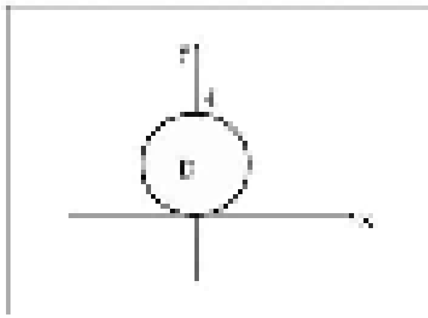
Penyelesaian:

Bidang $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ adalah silinder tegak dengan alas lingkaran yang berpusat di titik (0,2,0)



Gambar 2.26. ***B*** **dibatasi** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ **,** $z = 0$ **dan** $z = 6$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan gambar di bawah



Gambar 2.27 *D dibatasi $x^2 + (y - 2)^2 = 4$*

Jari-jari lingkaran D ditentukan dengan cara:

$x^2 + (y - 2)^2 = 4$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$x^2 + y^2 = 4y$

$r = 4 \sin \theta$

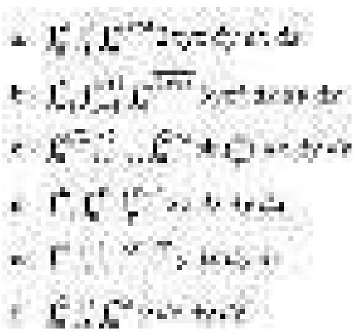
[illegible]

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 5 dan pada pertemuan ke 6 diadakan Quiz di awal pertemuan.

LATIHAN 2

1. Hitunglah integral berulang berikut:



2. Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah konstanta, tentukanlah:
   a. Gambar B
   b. Volume B
   c. Massa B
3. Jika B benda yang dibatasi oleh $z = 6 - (x^2 + y^2)$ dan $z = 2$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = 3\sqrt{x^2 + y^2})$, tentukanlah:
   a. Gambar B
   b. Proyeksi B terhadap bidang XY
   c. Titik pusat massa B

4. Jika B benda yang dibatasi oleh $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah [illegible] tentukanlah:
   a. Gambar B
   b. Proyeksi B terhadap bidang XY
   c. Momen inersia terhadap sumbu z. Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2)dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ dan $z = 2 - (x^2 + y^2)$.
5. Tentukan $\iiint_B (y^2)\ dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2) = 4$ dan $z = 6$.
6. Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2)^{3/2}\ dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$ dan $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$
7. Tentukan $\iiint_B xy\ dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2) - 2y = 0$ dan $z = 0$
8. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 12 - x^2 - y^2$ dan $z = 0$.

   Jika rapat massa $\rho = x^2 + y^2$, tentukan:
   a. Volume B
   b. Massa B
   c. Momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y
9. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$ dan $z = 8$. Jika rapat mass[illegible] , tentukan momen inersia terhadap sumbu z

BAB 3

KALKULUS VEKTOR

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu :

1. Memahami fungsi bernilai vector dan differensial vektor.
2. Memahami operasi fungsi vektor.
3. Memahami gradien, divergensi dan curl.

Deskripsi:

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari tentang fungsi vektor, diferensial vektor dan operasi fungsi vektor. Mahasiswa juga diajarkan bagaimana menentukan gradien sebuah fungsi, divergensi dan curl. (Penerapannya, n.d.)

3.1 Fungsi Bernilai Vektor

Jika D suatu himpunan di ruang R^n. Jika F suatu fungsi bernilai vektor di ruang R^m dengan daerah definisi D adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota x di B dengan satu dan hanya satu vektor y di R^m dan ditulis $y = F(x)$.

Selanjutnya vektor di R^m dapat ditulis $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$. (Volume, Sirovich, & Marsden, 2009)

CONTOH 3.1

Diberikan $y = f(x)$ fungsi dua variabel dengan nilai vektor di R^3 adalah

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan y di titik $(2, -1)$

Penyelesaian

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + (-1)^2 \\ 3(2)(-1) \\ -(2)(-1) + 2(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka y di titik $(2, -1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.2 Diferensial Vektor

Jika $F(u) = (F_1, F_2, F_3)$ adalah suatu fungsi vektor. Fungsi vektor tersebut dapat ditulis dalam bentuk $F(u) = F_1 (u)\, i + F_2 (u)\, j + F_3 (u)\, k$

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF_1}{du} i + \frac{dF_2}{du} j + \frac{dF_3}{du} k$$

Diferensial kedua vektor $F(u)$ adalah

$$\frac{d^2F}{du^2} = \frac{d^2F_1}{du^2} i + \frac{d^2F_2}{du^2} j + \frac{d^2F_3}{du^2} k$$

Perhatikan sebuah fungsi F yang menghubungkan sebuah vektor $F(p)$ dengan setiap titik p dalam ruang berdimensi n. Fungsi ini disebut medan vektor. (Wahyuni, 2017)

CONTOH 3.2

1. $F(x, y) = 2x\, i + \frac{1}{2} y\, j$, adalah ruang berdimensi 2
2. $F(x, y, z) = 3x\, i - y\, j + 4z\, k$, adalah ruang berdimensi 3

Secara umum medan vektor dalam ruang 3 dimensi ditulis $F(x, y, z) = P(x, y, z)\, i + Q(x, y, z)\, j + R(x, y, z)\, k$

3.3 Operasi Fungsi

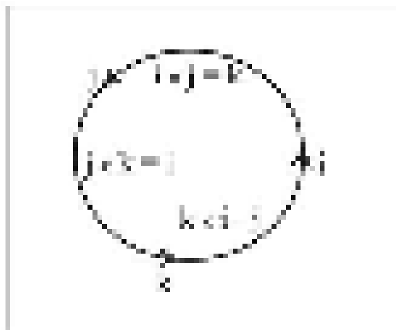
Jika F dan G dua fungsi vektor dimana (Mauch, 2002) $F = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k$ dan $G = G_1\, i + G_2\, j + G_3\, k$ maka berlaku:

a. $(F + G) = (F_1 + G_1)\, i + (F_2 + G_2)\, j + (F_3 + G_3)k$
b. Jika c suatu skalar maka $cF = cF_1\, i + cF_2\, j + cF_3\, k$
c. Perkalian skalar $F.G = (F_1.G_1) + (F_2.G_2) + (F_3.G_3)$, dimana $i.i = j.j = k.k = 1$

[illegible]

[illegible]

Berikut gambar untuk perkalian cross



Gambar 3.1 Perkalian cross

Perkalian cross menggunakan aturan tangan kanan, dimana (Pandey, 2010): $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$

Jika menggunakan tangan kiri, perkalian crossnya bernilai negatif.

CONTOH 3.3

Jika $F(x, y, z) = z \sin x\, i + 2y\, e^x\, j + 3z\, k$

dan $G(x, y, z) = 3xyz^2\, i - 4x\, j + \ln(xz)\, k$

Tentukanlah:

a. $(2F).G$

b. $F \times (-G)$

Penyelesaian:

a. $(2F).G = 2[z \sin x\, i + 2y\, e^x\, j + 3z\, k].[3xyz^2\, i - 4x\, j + \ln(xz)\, k]$

$= [2z \sin x\, i + 4y\, e^x\, j + 6z\, k].[3xyz^2\, i - 4x\, j + \ln(xz)\, k]$

$= 6xyz^3 \sin x - 16xy\, e^x + 6z\ln(xz)$

[illegible]

3.4 Gradien, Divergensi dan Curl

3.4.1 Operator Diferensial Nabla

Operator Nabla dinotasikan dengan lambang ∇. (Pandey, 2010)

[illegible]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

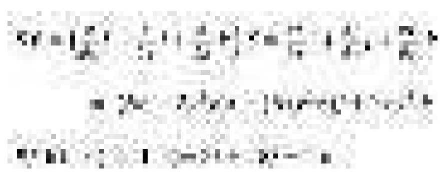
Operator Nabla dapat dipandang sebagai sebuah vektor.

3.4.2 Gradien

Operator Nabla jika dikenakan pada sebuah fungsi skalar $f(x, y, z)$ akan membentuk gradien dari $f(x, y, z)$

CONTOH 3.4

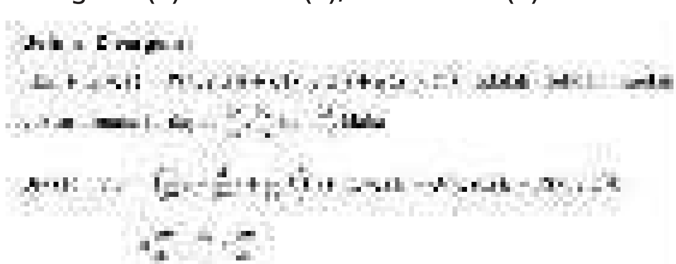
Jika $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy^3 z$. Tentukan gradien ∇f di titik (2, -1, 4)



3.4.3 Divergensi F / DivF

Divergensi adalah hasil operasi dot antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$, ditulis (Ash & Ash, 1998)

divergensi (F) atau div (F), dimana div (F) = ∇.F



Interpretasi fisis divergensi adalah, jika F melambangkan medan kecepatan dari suatu fluida maka div F di titik p mengukur kecendrungan fluida tersebut untuk menyebar meninggalkan p (div $F > 0$) atau mengumpul menuju p (div $F < 0$).

CONTOH 3.5

Jika $F(x, y, z) = 2x \sin z$ [illegible]. Tentukan $\nabla \cdot F$ di titik $\left(2, -1, \frac{\pi}{2}\right)$

Pembahasan

Diketahui $P = 2x \sin z$

$Q =$ [illegible]

$R =$ [illegible]

Maka

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot \left(P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= 2 \sin z + \text{[illegible]}$$

$$\nabla \cdot F\left(2, -1, \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \text{[illegible]}$$

$$= 6 + \text{[illegible]}$$

CONTOH 3.6

[illegible]

3.4.4. Curl F

Curl F adalah hasil operasi cross antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$ dimana Curl (F) =

[illegible]

Interpretasi fisis curl F menyatakan arah sumbu dimana fluida tersebut berotasi

(melingkar, curl) paling cepat.

$|Curl\ F\ |$ menyatakan laju rotasi. Arah rotasi ini mengikuti aturan tangan kanan.

CONTOH 3.7

[illegible]

Maka

[illegible]

CONTOH 3.8

Jika $F(x, y, z) = e^{2x} \cos y \, i - e^{2x} \sin y \, j + 9z \, k$ dan $f(x, y, z) = 3y + \sqrt{(x^2 + z^2)}$

Tentukan:

a. Curl (Curl F)

b. Grad (div F)

c. Grad (div(grad f))

Penyelesaian:

Diketahui $P = e^{2x} \cos y$

$Q = -e^{2x} \sin y$

$R = 9z$

a. Curl F = [illegible]

[illegible]

2. Karena

$P = e^{2x} \cos y$

$Q = -e^{2x} \sin y$

$R = 0$

Maka

$\frac{\partial P}{\partial x} = 2e^{2x} \cos y, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{2x} \sin y, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2e^{2x} \sin y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{2x} \cos y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (P(x,y,z) i + Q(x,y,z) j + R(x,y,z) k)$

$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$= 2e^{2x} \cos y - e^{2x} \cos y + 0$

$= e^{2x} \cos y$

$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times F$

$= \frac{\partial R}{\partial y} i + \frac{\partial P}{\partial z} j + \frac{\partial Q}{\partial x} k$

$= 2e^{2x} \cos y \, i - e^{2x} \sin y \, j$

3. $f(x,y,z) = 3y - \sqrt{x^2 + z^2}$

$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

$= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} i + 3j - \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} k$

[illegible]

CONTOH 3.9

[illegible]

[illegible]

CONTOH 3.10

Jika $F(x, y, z) = e^{2xz}i + e^{-2z} \cos y\, j + \sin^2 3z\, k$ dan $f(x, y, z) = 2xy^2z$

Tentukan:

a. $(\nabla^2 . F)(-f)$

b. $(\nabla^2 \times F).(2F)$

Penyelesaian:

Diketahui $P = e^{2xz}$

$Q = e^{-2z} \cos y$

$R = \sin^2 3z$

[illegible]

[illegible]

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

LATIHAN 3

1. Tentukan div.F dan curl F dari :
   a. $F(x, y, z) = x^3 yz\, i + 2xy^2\, j + 3xz\, k$
   b. $F(x, y, z) = e^x \cos x\, i + e^x \sin y\, j + z\, k$
2. Tentukan ∇f dari:
   a. $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz^2 + 3z$
   b. $f(x, y, z) =$ [illegible] $(x^3 + y^2 + z^2)$
3. Diketahui fungsi vektor $V(x, y, z) = 3x^3 y^2\, i + 4yz^3\, j - 2y\, z^5\, k$ dan fungsi skalar $\rho(x, y, z) = 3xz^3 y^2$. Tentukan :

   [illegible]

   [illegible]

   [illegible]
4. Diketahui fungsi vektor $V(x, y, z) = xy^3 z^2\, i + 2y^3 z^3\, j - (4xz^2 + 2z)\, k$ dan $F(x, y, z) = (-x^3 z^3)\, i - 3y^3 z^2\, j + z^3\, k$. Tentukan :

   [illegible]

   [illegible]

   [illegible]

5. Diketahui fungsi vector $V(x, y, z) = 2x^4 y^3\, i + 5y^2 z^3\, j - 2yz^2\, k$ dan fungsi skalar $\rho(x, y, z) = 3xz^3 y^2$. Tentukan :
   a. Curl Grad $3\rho(x, y, z)$
   b. [illegible]
   c. [illegible]

6. Diketahui fungsi vector $V(x, y, z) = 2x^2 y^3 z^2\, i + y^4 z^2\, j - (6xz^3 + 4z^2)\, k$ dan $F(x, y, z) = 3x^2 z^4\, i - 2y^4 z^2\, j + 5z^2\, k$ dan fungsi skalar $\rho(x, y, z) = 4x^3 y^2 z^4$.

   Tentukan :

   [illegible]

   [illegible]

   [illegible]

7. [illegible]

   [illegible]

   [illegible]

   [illegible]

8. [illegible]

   [illegible]

   [illegible]

   [illegible]

BAB 4

INTEGRAL GARIS

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami konsep integral garis secara langsung.
2. Memahami konsep Teorema Green, ketaktergantungan lintasan.

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral garis terhadap satu atau lebih lengkungan. Untuk lengkungan tertutup integral garis dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Green. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral garis untuk menghitung divergensi dan sirkulasi.

4.1 Integral Garis Medan Skalar

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di suatu ruang R^n dan $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ suatu fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada C. Maka integral garis dari fungsi f pada C dari titik A ke titik B ditulis (Ash & Ash, 1998)

$$\int_C f(x)dS \text{ , dimana } dS = \text{elemen diferensial busur}$$

Khusus untuk $n = 2$ maka $f = f(x, y)$ dan C lengkungan pada bidang xy.

4.2 Definisi Integral Garis

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B. Misalkan $X(t)$ persamaan parameter lengkungan C dengan $t \epsilon [a, b]$. Jadi $X(a) = A$, $X(b) = B$.

Ambil partisi dari $[a, b]$ dan $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ dengan $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ Sebut $X(t_i) = A_i$, $i = 0, 1, 2, .., n$. $X(t_0) = A_0 = A$; $X(t_n) = A_n = B$.

Bila C terorientasi positif (arah positif terhadap pertambahan nilai t) maka partisi dari [a, b] menghasilkan pembagian lengkungan C atas n busur-busur kecil.

Sebut Δs_i adalah panjang busur $A_{i-1} A_i$ dan $|P|$ adalah maksimal $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Sekarang ambil titik-titik X_i pada busur $A_{i-1} A_i$ dan bentuk jumlah Riemann (Goodwillie, 1991)

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\, \Delta s_i \text{ (jika ada)} = \int_C f(x)\, dS$$

4.3 Menghitung Integral Garis $\int_C f(x)\, dS$

Untuk $n = 2$. Jika $f = f(x, y)$ dan C lengkungan mulus dengan persamaan parameter $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$

Maka

$$\int_C f(x,y)\, dS = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Untuk $n = 3$. Jika $f = f(x, y, z)$ dan C lengkungan mulus di R^3 dengan persamaan parameter $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$

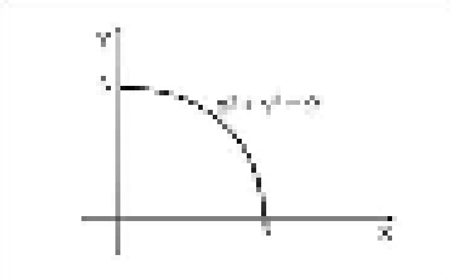
maka

$$\int_C f(x,y,z)\, dS = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

CONTOH 4.1

Hitung $\int_C x^2\, y\, dS$ jika C busur lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 4.1 Busur $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama

Persamaan parameter C:

$$
\begin{aligned}
\int_C x^2 y\, dS &= \int_0^{\pi/2} (3\cos t)^2 (3\sin t)\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 27\cos^2 t \sin t \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 27\cos^2 t \sin t\, (3)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 81\cos^2 t \sin t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 81\cos^2 t\, d(-\cos t) \\
&= -81\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, d(\cos t) \\
&= -27\cos^3 t\Big]_0^{\pi/2} \\
&= 27
\end{aligned}
$$

CONTOH 4.2

Hitung $\int_C (2x + 9z)\, dS$ jika C lengkungan $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dan $0 \leq t \leq 1$

Penyelesaian:

$$\int_C (2x + 9z)\, dS = \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{1 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\, dt$$

$$= \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{9\left(t^2 + \tfrac{2}{9}\right)^2 + \tfrac{5}{9}}\, dt$$

Selanjutnya diselesaikan integral $I = \int (2t + 9t^3) \sqrt{9\left(t^2 + \tfrac{2}{9}\right)^2 + \tfrac{5}{9}}\, dt$

Misalkan $t^2 + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}\sqrt{5} \tan\theta$

maka $t^2 = \frac{1}{9}\sqrt{5} \tan\theta - \frac{2}{9}$

$2t\, dt = \frac{1}{9}\sqrt{5} \sec^2\theta\, d\theta$

dan $9t^3 dt = 9t^2 \cdot t\, dt$

$= (\sqrt{5} \tan\theta - 2) \cdot \frac{1}{18}\sqrt{5} \sec^2\theta\, d\theta$

Jadi

[illegible]

Jadi

[illegible]

4.4 Integral Garis Medan Vektor

Misalkan $F(x)$ medan vektor dan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di R^n, maka $\int_C F(x).dX$ dikatakan integral garis dari medan vektor F pada C dari titik A ke B.

Untuk $n = 2$, $F(x) = F(x, y) = F_1 (x, y)\, i + F_2 (x, y)\, j$

$dX = dx\, i + dy\, j$, sehingga

$$\int_C F(x) .dX = \int_C F_1 (x, y)\, dx + F_2 (x, y)\, dy$$

Untuk $n = 3$, $F(x) = F_1 (x, y, z)\, i + F_2 (x, y, z)\, j + F_3 (x, y, z)k$

$$dX = dx\, i + dy\, j + dz\, k \text{ , sehingga}$$

$$\int_C F(x) .dX = \int_C F_1 (x, y, z)\, dx + F_2 (x, y, z)dy + F_3 (x, y, z)dz$$

Sifat-sifat integral garis sebagai berikut:

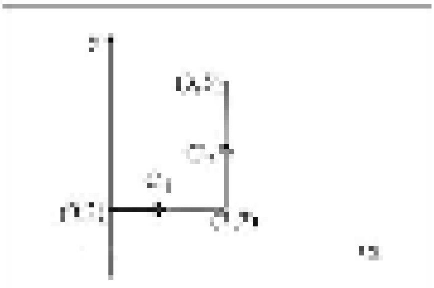
i. $\int_C (\alpha F + \beta G) \,.\, dX = \alpha\int_C F.dX + \beta\int_C G.dX$, dimana α dan β konstanta.

ii. Jika $C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$, maka $\int_C F(x).dX = \sum_{i=1}^{n} \int C_1 F(x).dX$

CONTOH 4.3

Tentukan integral garis $\int_C xy^2\, dx + xy^2\, dy$ di sepanjang lintasan $C = C_1 \cup C_2$ yang menghubungkan titik *(0,2), (3,2)* dan *(3,5)*.

Penyelesaian:



Gambar 4.2 Lintasan *C* dari titik *(0,2), (3,2) dan (3,5).*

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C x\,y^2\, dx + x\,y^2\, dy = [\int_{C1} x\,y^2\, dx + x\,y^2\, dy] + [\int_{C2} x\,y^2\, dx + x\,y^2\, dy]$$

Pada lintasan C_1, $y = 2$ maka $dy = 0$ sehingga

$$\int_{C1} x\,y^2\, dx + x\,y^2\, dy = \int_0^3 4\, x\, dx$$

$$= 2\,x^2\,]_0 = 18$$

Pada lintasan C_2, $x = 3$ maka $dx = 0$ sehingga

$$\int_{C2} x\,y^2\,dx + x\,y^2\,dy = \int_2^5 3\,y^2\,dy$$

$$= y^3\,]_2$$

$$= 125 - 8$$

$$= 117$$

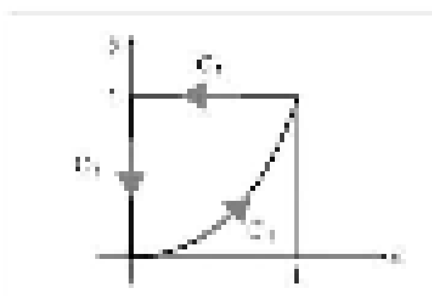
Jadi $\int_C x y^2\,dx + x y^2\,dy = [\int_{C1} x y^2\,dx + x y^2\,dy] + [\int_{C2} x y^2\,dx + x y^2\,dy]$

$$= 18 + 117$$

CONTOH 4.4

Tentukan $\int_C y\,dx + xy\,dy$ jika C parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ dan segmen garis dari titik $(1,1)$ ke $(0,1)$ kembali ke titik asal.

Penyelesaian:



Gambar 4.3 C dibatasi $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, titik $(1,1)$, $(0,1)$ dan $(0,0)$

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, ditulis $C = C_1\,C_2\,C_3$

Maka

$$\int_C y\,dx + xy\,dy = \int_{C1} y\,dx + xy\,dy + \int_{C2} y\,dx + xy\,dy + \int_{C3} y\,dx + xy\,dy$$

Pada lintasan C_1, $y = x^2$ maka $dy = 2xdx$

sehingga

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

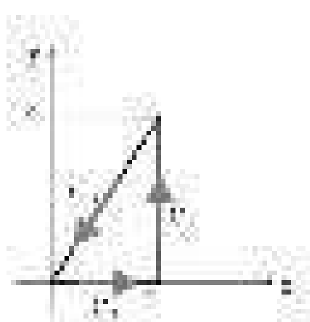
[illegible]

[illegible]

CONTOH 4.5

Tentukan $\int_C 2xy^2\, dx - 3xy\, dy$ jika C dibatasi oleh $y = 2x$, $y = 0$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:



Gambar 4.4 Lintasan C dibatasi $y = 2x$, $y = 0$ dan $x = 2$

Lintasan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1\ C_2\ C_3$

Maka $\int_C 2xy^2\,dx - 3xy\,dy =$

$$\int_{C1} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C2} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C3} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy$$

Pada lintasan C_1, $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga

$\int_{C1} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy = 0$

Pada lintasan C_2, $x = 2$ maka $dx = 0$

sehingga

$$\int_{C2} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy = -\int_0^4 6y dy$$
$$= -3\,y^2\,]_0^4 = -48$$

Pada lintasan C_3, $y = 2x$ maka $dy = 2\,dx$

sehingga

$$\int_{C3} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy = \int_{C3} 2x(2x)^2\,dx - 3x(2x)\,(2dx)$$
$$= \int_{C3} 8x^3\,dx - 12x^2\,dx$$
$$= \int_2^0 (8x^3 - 12x^2)dx$$
$$= (2x^4 - 4x^3)_2^0$$
$$= 0 - (32\text{-}32) = 0$$

Jadi $\int_C y\,dx + xy\,dy$

$=\int_{C1} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C2} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C3} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy$

$= -48$

4.5 Aplikasi Integral Garis

Integral Garis dapat diaplikasikan untuk menentukan massa, momen massa dan titik pusat massa jika rapat massa di setiap titik diketahui.

a. Pada ruang R^2

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y)$, maka:

i. Massa = $m = \int_C \rho(x, y)\, dS$.

ii. Momen massa C

- terhadap sumbu $x : M_x = \int_C y\, \rho(x, y)\, dS$.
- terhadap sumbu $y : M_y = \int_C x\, \rho(x, y)\, dS$.

iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$

b. Pada ruang R^3

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y, z)$, maka:

i. Massa = $m = \int_C \rho(x, y)\, dS$.

ii. Momen massa C

- terhadap bidang $xy : M_{xy} = \int_C z\, \rho(x, y)\, dS$.
- terhadap bidang $yz : M_{yz} = \int_C x\, \rho(x, y)\, dS$.
- terhadap bidang $xz : M_{xz} = \int_C y\, \rho(x, y)\, dS$.

iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right)$.

CONTOH 4.6

Tentukan massa dan titik pusat massa dari kawat dengan persamaan parameter $x = 3\cos t$ $y = 3\sin t$, $z = 4t$, $0 \leq t \leq \pi$, dengan rapat massa kz.

Penyelesaian:

- Massa kawat

$$m = \int_C \rho\, dS = \int_C kz\, dS$$
$$= \int_C kz \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t)^2))}\, dt$$
$$= k\int_0^\pi 4t \sqrt{((-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2)}\, dt$$
$$= 4k\int_0^\pi t \sqrt{((9\sin^2 t + 9\cos^2 t) + 16)}\, dt$$
$$= 4k\int_0^\pi t \sqrt{((9 + 16))}\, dt$$
$$= 20\, k\int_0^\pi t\, dt$$
$$= 10\, k\, t^2\Big]_0^\pi = 10\, k\, \pi^2$$

- Momen massa terhadap bidang xy

$$M_{xy} = \int_C \rho\, z\, dS = \int_C kz.z\, dS = \int_C kz^2\, dS$$
$$= k\int_0^\pi (16t^2)\, 5\, dt$$
$$= 80k\int_0^\pi t^2\, dt$$

[illegible]

[illegible]

- Momen massa terhadap bidang xz

$$Mxy = \int_C \rho\, y\, dS = \int_C kz.\, y\, dS =$$
$$= k\int_0^\pi (4t)(3\sin t)\, 5\, dt$$
$$= 60\, k\int_0^\pi (t)(\sin t)\, dt$$
$$= 60k\int_0^\pi t\, d\,(-\cos t)$$
$$= -60k\int_0^\pi t\, d\,(\cos t)$$ (Gunakan Integral Parsial)

$= -60k\,(t \cos t\,]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t\, dt)$

$= -60k\,(\pi \cos \pi - \sin t\,]_0^{\pi})$

$= -60\,k\,(-\pi)$

$= 60\,k\,\pi$

- Momen massa terhadap bidang yz

$Myx = \int_C \rho\, x\, dS = \int_C kz.x\, dS =$

$= k\int_0^{\pi} (4t)(3 \cos t)\, 5\, dt$

$= 60\,k\int_0^{\pi} (t)(\cos t)\, dt$

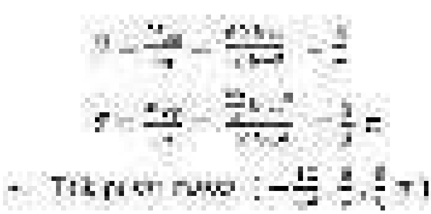
$= 60k\int_0^{\pi} t\, d\,(\sin t)$ (Gunakan Integral Parsial)

$= 60k\,(t \sin t\,]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t\, dt)$

$= 60k\,(\pi \sin \pi + \cos t\,]_0^{\pi})$

$= 60\,k\,(0-2)$

$= -120\,k$



4.6. Ketaktergantungan Lintasan (Bebas Lintasan)

Definisi :

Untuk setiap lengkungan C dari titik A ke B nilai $\int_C F(x).dx$ tetap harganya maka $\int_C F(x).dx$ dikatakan tidak tergantung lintasan dari A ke B.

Gambar 4.5 Lintasan dari titik A ke titik B

Dalam kasus ini $\int_{C1} F(x).dx = \int_{C2} F(x).dx$

Artinya $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari titik A ke B melalui C_1 atau C_2.

Syarat yang harus dipenuhi $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari C akan diperlihatkan oleh Teorema berikut.

> Teorema 1 :
>
> Jika C lengkungan licin dari titik A ke B. Fungsi $f(x)$ terdefinisi dan kontinu pada daerah terbuka yang memuat C, maka : $\int_C \nabla f(x).dx = f(B) - f(A)$

> Teorema 2 :
>
> Jika $F(x)$ medan vektor yang kontinu pada daerah terbuka D dan tersambung sederhana. Misalkan A dan B dua titik di D. Maka $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari A ke B jika dan hanya jika terdapat medan skalar f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$. $F(x)$ disebut medan konservatif.

Untuk menunjukkan F konservatif :

1. Jika $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ maka F konservatif jika memenuhi $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
2. Jika $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ maka F konservatif jika [illegible] $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

Langkah - langkah untuk menunjukkan ketaktergantungan lintasan dari titik A ke B adalah sebagai berikut:

1. Tunjukkan F konservatif.
2. Tentukan f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$.
3. $\int_C F(x)\, dx = f(B) - f(A)$

CONTOH 4.7

Jika $F(x,y) = 2xy\, i + (x^2+4y^3)\, j$ adalah medan vektor. Tentukan:

a. Apakah F konservatif

b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$

c. Hitung $\int_C F.dX$ dari titik $A = (1.4)$ ke titik $B = (-2.6)$

Penyelesaian:

a. Dari medan vektor F , diperoleh :

$M(x,y) = 2xy$ dan $N(x,y) = x^2 + 4y^3$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ dan $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ maka F adalah konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$M\, i + N\, j = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

Jika $\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy$

maka $f(x,y) = x^2y + K(y)$

[illegible] $f(x,y) = $ [illegible] $+ h(y)$

[illegible]

$$x^2 + h'(y) = x^2 + 4y^3$$

maka $h'(y) = 4y^3$

sehingga $h(y) = y^4 + K$

Jadi $f(x,y) = x^2y + y^4 + K$

c. $\int_C F(X).dX = f(B) - f(A) = [x^2y + y^4]$ [illegible] $= 256$

CONTOH 4.8

Jika $F(x,y,z) = $ [illegible]

a. Apakah F konservatif

b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$

c. Hitung $\int_C F.dX$ dari titik $A = (1,1,1)$ ke titik $B = (2,4,2)$

Penyelesaian:

a. Dari medan vector F, diketahui :

maka $P = $ [illegible] $, Q = \frac{1}{y}, R = 2z$

[illegible] maka [illegible]

$\frac{\partial R}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ maka $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$ maka $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

maka Curl $F = 0$

sehingga F adalah konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$P\,i + Q\,j + R\,k =$ [illegible]

diperoleh [illegible]

Untuk menentukan fungsi f :

[illegible]

maka $f(x, y, z) =$ [illegible]

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

dari [illegible]

maka $H'(y, z) = 0$

sehingga $H(y, z) = G(z) + C_1$

$f(x, y, z)$ [illegible]

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dari [illegible]

$G'(z) \quad = \quad 2z$

maka $G(z) \quad = z^2 + C_2$

Jadi $f(x, y, z)$ [illegible]

c. $\int_C F(x)\, dX = f(B) - f(A) =$

[illegible]

CONTOH 4.9

Jika $F(x, y, z) = 2xyz^2\ i + (x^2\ z^2 + 3y)\ j + 2x^2\ y\ z\ k$ adalah medan vektor.

Tentukan $\int_C F.\ dX$ jika C lengkungan licin dari titik $A = (2, 0, 1)$ ke titik $B = (0, -1, 1)$

Penyelesaian:

a. Dari medan vektor F, diketahui :

$$P = 2xyz^2$$
$$Q = x^2\ z^2 + 3y$$
$$R = 2x^2\ y\ z$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2 \text{ maka } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2x^2 z,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2 z \text{ maka } \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2 z$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz \text{ maka } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz$$
$$\text{Karena } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

atau $Curl\ F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$P\,i + Q\,j + R\,k = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xyz^2$$

maka $f(x, y, z) = x^2\ yz^2 + H(y, z)$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

$x^2 z^2 + H'(y, z) = x^2 z^2 + 3y$

maka $H'(y, z) = 3y$

sehingga $H(y, z) = \frac{3}{2} y^2 + G(z)$

$f(x, y, z) = x^2yz^2 + \frac{3}{2} y^2 + G(z)$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

$2x^2 y z + G'(z) = 2x^2 y z$

$G'(z) = 0$

maka $G(z) = C$

Jadi $f(x, y, z) = x^2yz^2 + \frac{3}{2} y^2 + C$

c. $\int_C F(x)\, dX = f(B) - f(A)$

$= \left[x^2yz^2 + \frac{3}{2} y^2\right]$ [illegible]

CONTOH 4.10

Tunjukkan $\int_C F.dX$ tak tergantung lintasan jika $F(x, y, z) = (4xy^2z + \frac{3}{2}z^2)i$

$+ (4x^2 yz + 4z + 5)j + (2x^2 y^2 + 3xz + 4y)\, k$ adalah medan vektor.

Penyelesaian:

Penyelesaian soal ini harus melalui 2 tahap, pertama tunjukkan F medan vektor konservatif dan tahap kedua tentukan fungsi $f(x, y, z)$

$P = 4xy^2z + \frac{3}{2}z^2$

$Q = 4x^2yz + 4z + 5$

$R = 2x^2y^2 + 3xz + 4y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 8xyz$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$ [illegible]

$\frac{\partial P}{\partial y} = 8xyz$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$ maka $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$

$\frac{\partial P}{\partial z} = 4xy^2 + 3z$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 4xy^2 + 3z$ maka $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 4xy^2 + 3z$

Karena $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

atau $Curl\ F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$P\,i + Q\,j + R\,k = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

Akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 4xy^2z + \frac{3}{2}z^2$$

maka $f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{2}xz^2 + H(y, z)$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

$$4x^2yz + H'(y, z) = 4x^2yz + 4z + 5$$

maka $H'(y, z) = 4z + 5$

sehingga $H(y, z) = 4yz + 5y + G(z)$

maka

$f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{2}xz^2 + 4yz + 5y + G(z)$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

$$2x^2y^2 + 3xz + 4y + G'(z) = 2x^2y^2 + 3xz + 4y$$

$$G'(z) = 0$$

maka $G(z) = C$

Jadi $f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{2}xz^2 + 4yz + 5y + C$

Maka terbukti $\int_C F.dX$ tak tergantung lintasan

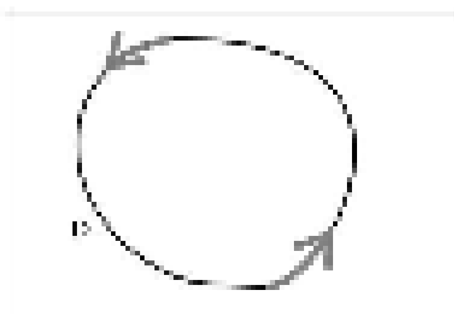
4.7. Teorema Green pada Bidang

Teorema Green :

Jika C lengkungan tertutup sederhana yang merupakan batas daerah D. Misalkan $F(x, y) = M(x, y)\, i + N(x, y)\, j$ suatu medan vektor. Jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ kontinu dan mempunyai turunan parsial pada D dan C. Maka :

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

atau $\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$



Gambar 4.6 *D* lengkungan tertutup *C*

Note : arah positif C adalah berlawanan arah jarum jam.

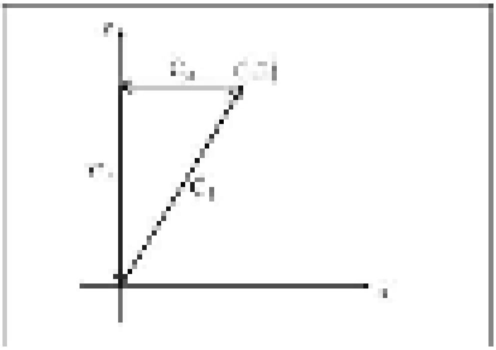
CONTOH 4.11

Misalkan C dibatasi oleh rusuk-rusuk dari segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(0,0)$, $(1,2)$ dan $(0,2)$. Hitung $\oint_C 4x^2 y\, dx + 2y\, dy$ dengan menggunakan

a. Cara langsung

b. Teorema Green

Penyelesaian:



Gambar 4.7 Lintasan *C* dibatasi oleh (0,0), (1,2) dan (0,2).

a. Cara Langsung

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Pada C_1 diperoleh $y = 2x$ maka $dy = 2dx$

sehingga $\int_{C1} 4x^2\, y\, dx + 2y\, dy = \int_0^1 (8x^3 + 8x)\, dx$

$= [2x^4 + 4x^2]_0^1 = 6$

Pada C_2 diperoleh $y = 2$ maka $dy = 0$

sehingga $\int_{C2} 4x^2\, y\, dx + 2y\, dy = \int_1^0 8x^2\, dx$

$= \left[\frac{8}{3}x^3\right]_1^0 = -\frac{8}{3}$

Pada C_3 diperoleh $x = 0$ maka $dx = 0$

sehingga $\int_{C3} 4x^2\, y\, dx + 2y\, dy = \int_2^0 2y\, dy$

$= [y^2]_2^0 = -4$

Jadi $\oint_C 4x^2\, y\, dx + 2y\, dy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$

b. Dengan menggunakan Teorema Green

$$\oint_C F.dX = \iint_D = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_C 4x^2 y\, dx + 2y\, dy = \iint_D (0 - 4x^2)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_{y=2x}^{y=2} -4x^2\, dydx$$

$$= \int_0^1 - 4x^2 (2 - 2x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (-4x^2 + 8x^3)\, dx$$

$$= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^4\right]_0^1$$

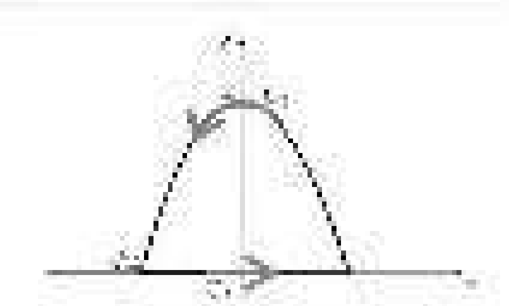
$$= -\frac{2}{3}$$

CONTOH 4.12

Buktikan kebenaran Teorema Green jika diketahui medan vektor $F = x^2 y\, i - 3x\, j$ yang bekerja pada lintasan C yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan sumbu x.

Penyelesaian:

Membuktikan kebenaran Teorema Green yaitu dengan cara membuktikan hasil dengan cara langsung sama dengan hasil menggunakan Teorema Green.



Gambar 4.8 Lintasan C dibatasi $y = 2 - x^2$ dan sumbu x.

a. Cara Langsung

$C = C_1 + C_2$

Pada C_1 persamaan $y = 2 - x^2$ maka $dy = -2x\, dx$

sehingga $\int_{C1} x^2\, y\, dx - 3x\, dy =$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} x^2\, (2 - x^2)\, dx - 3x\, (-2x\,)\, dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} ((2x^2 - x^4) + 6x^2)\, dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} (8x^2 - x^4)\, dx$$

= [illegible]

= [illegible]

Pada C_2 diperoleh $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga $\int_{C2} x^2\, y\, dx - 3x\, dy = 0$

Jadi $\oint_C x^2\, y\, dx - 3x\, dy = \frac{-136}{15}\sqrt{2}$

b. Teorema Green

$$\oint_C F.dX = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_C x^2\, y\, dx - 3x\, dy = \iint_D (-3 - x^2)\, dA$$

Karena simetri D di kuadran $I\ (D_1)$ dan di kuadran $II\ (D_2)$, *maka* $D = 2D_1$

$$= 2 \iint_{D1} (-3 - x^2)\, dA$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{y=2-x^2} (-3 - x^2)\, dydx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} (-3 - x^2)\, y\, \Big]_{y=0}^{2-x^2} dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} (-3 - x^2)\, (2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} (-6 + x^2 + x^4)\, dx$$

= [illegible]

= [illegible]

Hasil secara langsung sama dengan hasil Teorema Green, maka kebenaran Teorema Green terbukti.

4.8 Fluks dan Sirkulasi

4.8.1. Fluks F melalui C

Misalkan C lengkungan licin yang tertutup dan sederhana dengan orientasi berlawanan dengan arah jarum jam. Misalkan C mempunyai persamaan parameter:

$x = x(s)$ dan $y = y(s)$, s parameter panjang busur.

Maka vektor garis singgung satuan T adalah

$$T = \frac{dx}{ds}\, i + \frac{dy}{ds}\, j$$

dan vektor normal satuan n yang arahnya keluar dari daerah D yang dibatasi C adalah

$$n = \frac{dy}{ds}\, i - \frac{dx}{ds}\, j$$

Jika $F(x, y) = M(x, y)\, i + N(x, y)\, j$ suatu medan vector. Maka untuk menghitung Fluks F melalui C yaitu banyaknya fluida (zat cair) yang meninggalkan D. Menghitung Fluks $\oint_C F.n\, dS$ dengan cara sebagai berikut.

$$\oint_C F.n\, dS = \oint_C (Mi + Nj).\left(\frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j\right) dS$$

$$= \oint_C \text{[illegible]}$$

$$= \iint_D \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

Karena div $F = \nabla.F =$

T[illegible] $\oint$ [illegible] $= \int$ [illegible] $= \iint$ [illegible] $= \iint$ [illegible] $-$ [illegible]

4.8.2 Sirkulasi F melalui C

Misalkan $F(x, y, z) = M(x, y)i + N(x, y)j + 0\,k$, dimana komponen z dari F adalah nol (0). Sirkulasi / kecenderungan fluida untuk berputar pada titik (x_0, y_0). Jika $Curl\ F = 0$ pada D, maka aliran fluida dikatakan tidak dapat berputar.

Untuk menentukan sirkulasi F melalui C dapat menggunakan Teorema Stokes.

Teorema Stokes untuk bidang

Sirkulasi F melalui C adalah :

$$\oint_C F \cdot T\, ds = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

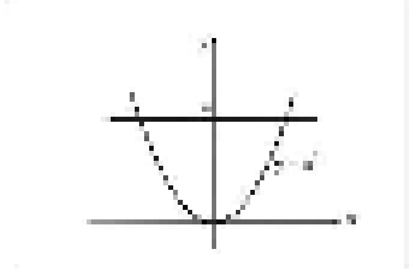
CONTOH 4.13

Jika $F = 3xy\ i + 2xj$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$. Hitunglah:

a. Fluks F melalui C

b. Sirkulasi F sepanjang C

Penyelesaian:



Gambar 4.9 Lintasan C dibatasi $y = x^2$ dan $y = 4$

a. Perpotongan $y = x^2$ dan $y = 4$

diperoleh $4 = x^2$ sehingga $x = \pm 2$

$M = 3xy$ maka

$N = 2x$ maka

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss, maka Fluks F melalui C adalah

$$\oint_C F.n\, dS = \iint_D div\, F\, dA = \iint_D \nabla.F\, dA$$

$$= \iint_D$$

$$= \iint_D 3y\, dA$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{y=x^2}^{4} 3y\, dy\, dx$$

$$= 2\int_0^2 \int_{y=x^2}^{4} 3y\, dy\, dx$$

$$= 2\int_0^2$$

$$= 3\int_0 [16 - x^4]\, dx$$

$= 3$ [illegible] satuan kubik

b. [illegible]

Sirkulasi = $\oint_C F.T\, dS = \oint_C Mdx + Ndy$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D (2x - 3x) dA$$

$$= \iint_D (-3x) dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{y=x2}^{4} -3x\, dy\, dx$$

$$= 2\int_0^2 \int_{y=x2}^{4} -3x\, dy\, dx$$

$$= -6\int_0^2 [xy]_{y=x2}^{4} dx$$

$$= -6\int_0^2 x\, [4 - x^2]\, dx$$

$$= -6\int_0^2 [4x - x^3]\, dx$$

$$= -6\, [\, 2x^2 - \tfrac{1}{4}\, x^4]_0^2 = -24$$

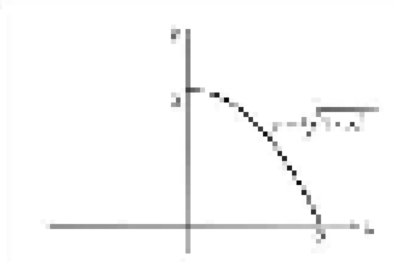
CONTOH 4.14

Jika $F = x^2\ i - 4\ (x+y)j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = \sqrt{(4 - x^2)}$ di kuadran pertama. Tentukanlah:

a. Fluks F melalui C

b. Sirkulasi F sepanjang C

Penyelesaian:



Gambar 4.10 Lintasan C dibatasi $y = \sqrt{(4 - x^2)}$ di kuadran I

a. $M = x^2$ *maka* $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$

$N = -4\ (x+y)$ *maka* $\frac{\partial N}{\partial y} = -4$

Dengan mengguakan Teorema Divergensi Gauss, maka Fluks F melalui C adalah

$$\oint_C F.n\ dS = \iint_D div\ F\ dA = \iint_D \nabla.F\ dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

$$= \iint_D (2x - 4)\ dA$$

$$= \int_0^2 \int_{y=0}^{\sqrt{(4-x^2)}} (2x - 4)\ dy\ dx$$

$$= 2\int_0^2 (2x - 4)\ y\ \Big]_{y=0}^{\sqrt{(4-x^2)}} dx$$

$$= 2\int_0^2 (2x - 4)\sqrt{(4 - x^2)}\ dx$$

$$= 2\int_0^2 (2x\sqrt{(4 - x^2)} - 4\sqrt{(4 - x^2)}\ dx$$

Selesaikan terlebih dahulu masing-masing integral

$\int_0 (2x\sqrt{(4-x^2)}\, dx$ gunakan metode substitusi $u = 4 - x^2$, $du = -2x\, dx$

$\int (2x\sqrt{(4 - x^2)}\, dx = \int \sqrt{u}\,(-du)$

$= -\int \sqrt{u}\,(du)$

$=$ [illegible]

$=$ [illegible]

$= -\frac{2}{3}\,[0-8] = \frac{16}{3}$

$\int_0 (4\sqrt{(4 - x^2)}\, dx$ gunakan substitusi $x = 2 \sin \theta$, maka $dx = 2 \cos \theta\, d\theta$

$\sin \theta = \frac{x}{2}$, , $\cos \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

$\int (4\sqrt{4 - x^2})\, dx \quad = 4\int (\sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta})\, 2 \cos \theta\, d\theta$

$= 4\int 2 \cos \theta\, 2 \cos \theta\, d\theta$

$= 16\int \cos^2 \theta\, d\theta$

$= 16\int$ [illegible]

$= 16$ [illegible]

$= 16$ [illegible]

$= 8\,(\theta + \sin \theta \cos \theta)$

$= 8\,(\arcsin$ [illegible]

$= 8\,[(\arcsin 1 - \arcsin 0) + 0]$

$= 8\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 4\pi$

Maka

$2\int_0 (2x\sqrt{(4-x^2)} - 4\sqrt{(4-x^2)}\, dx = 2\,[\int_0 (2x\sqrt{(4-x^2)}\, dx - \int_0 (4\sqrt{(4-x^2)}\, dx]$

$= 2\,(\frac{16}{3} - 4\pi)$

$= \frac{32}{3} - 8\pi$

Jadi Fluks $\oint_C F.n\, dS = \frac{32}{3} - 8\pi$

b. $\frac{\partial N}{\partial x} = -4$, $\frac{\partial M}{\partial y} =$ [illegible]

Sirkulasi = $\oint_C F.T\, dS = \oint_C Mdx + Ndy$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D (-4)\, dA$$

$$= -4 \iint_D dA$$

$$= -16\pi$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

Latihan 4

1. Tentukan $\int_C y\, dx + x^2\, dy$, jika C segmen-segmen garis dari titik $(0,-1)$ ke $(4,-1)$ dan dilanjutkan ke $(4,3)$.
2. Tentukan $\int_C F.dX$, jika $F(x,y) = y\ i + 2x\ j$ dan C lengkungan $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.
3. Tentukan $\int_C F.dX$, jika $F(x, y, z) = (x + y)\ i + (2y + x - 2z^2)\ j - 4yz\ k$ dan C segmen garis dari titik $(1,2,1)$ ke $(2,1,0)$.
4. Jika $F(x,y) = (12x^2 + 3y^2 + 5y)\ i + (6xy + 4y^3) j$ adalah medan vektor. Tentukan:
   a. Apakah F konservatif
   b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
   c. Hitung $\int_C F.dX$ dari titik $A = (3,-2)$ ke titik $B = (-1,4)$
5. Jika $F(x,y,z) = 3x^2\ i + 6y^2\ j + 9z^2\ k$ adalah medan vektor. Tentukan:
   a. Apakah F konservatif
   b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
   c. Hitung $\int_C F.dX$ dari titik $A = (2,1,1)$ ke titik $B = (0,4,-2)$

6. Hitunglah $\int_C (6x\,y^3 + 2z^2)\,dx + 9x^2\,y^2\,dy + (4xz + 1)\,dz$, dimana C lengkungan licin dari titik $(0,2,1)$ ke $(-1,1,2)$.

7. Diberikan $F\,(x,y,z) = (yz^2 + y^2 + 2x)\,i + (xz^2 + 2xy)\,j + 2xyz\,k$ adalah medan vektor.
   a. Tunjukkan bahwa $\int_C F.dX$ tak tergantung dari lintasan C dari titik A ke titik B.
   b. Tentukan $\int_C F.dX$ jika lengkungan licin dari titik $A = (1,0,1)$ ke titik $B = (2,1,2)$.

8. Jika $F = (x+y)\,i - 2\,y^2\,j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$, $y = x$ dan sumbu y di kuadran I. Hitunglah:
   a. Fluks F melalui C
   b. Sirkulasi F sepanjang C

9. Jika $F = 2xy\,i + 3x\,y^2\,j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $(x-2)^2 + y^2 = 4$, $y = x$ di kuadran I. Hitunglah:
   a. Fluks F melalui C
   b. Sirkulasi F sepanjang C

10. Hitunglah $\oint_C (e^{3x} + 2y)dx + (x^2 + \sin y)\,dy$, dimana C empat persegi panjang dengan titik-titik $(2,1)$, $(6,1)$, $(6,4)$ dan $(2,4)$ dengan menggunakan :
    a. Cara langsung
    b. Teorema Green

11. Hitunglah $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ jika C bagian atas lingkaran satuan yang dimulai dari titik $(1,0)$ dan sampai dengan $(-1,0)$.

12. Tentukan pusat massa dari kawat yang berbentuk setengah lingkaran atas $x^2 + y^2 = a^2$.

13. Periksa apakah $\int_C (y^2 + 2xy)\, dx + (x^2 + 2xy)\, dy$ tak tergantung lintasan dari C, dimana C lengkungan licin dari titik $(-1,2)$ ke $(2,1)$.
14. Periksa apakah $\int_C (e^x \sin y)\, dx + (e^x \cos y)\, dy$ tak tergantung lintasan dari C, dimana C lengkungan licin dari titik $(0,0)$ ke $(1, \frac{\pi}{2})$.

BAB 5

INTEGRAL PERMUKAAN

Capaian Pembelajaran

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

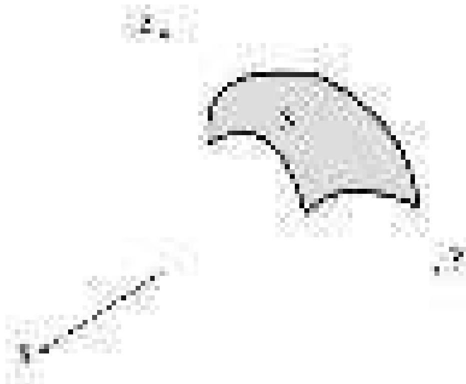
1. Memahami konsep integral permukaan
2. Memahami penerapan aplikasi integral permukaan untuk menentukan fluks dan sirkulasi

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral permukaan terhadap benda pada ruang R^3 dan penerapannya menentukan fluks dan sirkulasi .

5.1 Pengertian Integral Permukaan

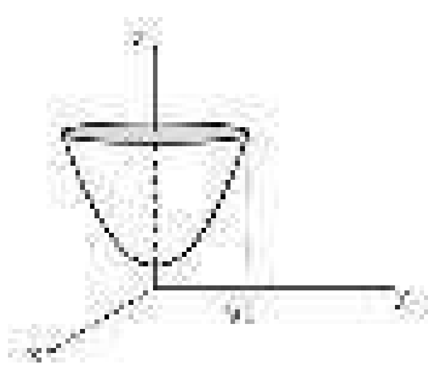
Misalkan S suatu permukaan terbatas luasnya di ruang. Misalkan $g(x, y, z)$ adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada S, maka yang dimaksud dengan integral permukaan dari fungsi g atas S adalah $\iint_S g(x, y, z)\,dS$. Dimana dS adalah elemen differensial luas permukaan. (Goodwillie, 1991)



Gambar 5.1 Ilustrasi Integral Permukaan

CONTOH 5.1

Jika S permukaan paraboloida $z = 2 + x^2 + y^2$ yang terletak di bawah $z = 4$. Misalkan fungsi yang bekerja pada S adalah $g(x, y, z) = 2xy^2z$. Maka integral permukaan $g(x, y, z) = 2xy^2z$ atas S adalah $\iint_S g(x, y, z)\, dS = \iint_S 2xy^2z\, dS$



Gambar 5.2 Permukaan $z = 2 + x^2 + y^2$ di bawah $z = 4$.

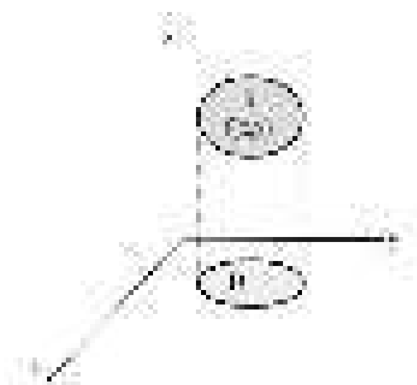
5.2 Tafsiran Integral Permukaan

Misalkan D suatu daerah tertutup di bidang XY dan S adalah bagian dari permukaan

$z = f(x,y)$ dimana (x,y) berada dalam D pada bidang XY maka D adalah proyeksi S pada bidang XY. Jika $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $g(x,y,z) = g(x,y,f(x,y))$ juga kontinu pada D , maka (KREYSZIG, KREYSZIG, & NORMINTON, 201

dimana $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

dS adalah elemen diferensial luas permukaan

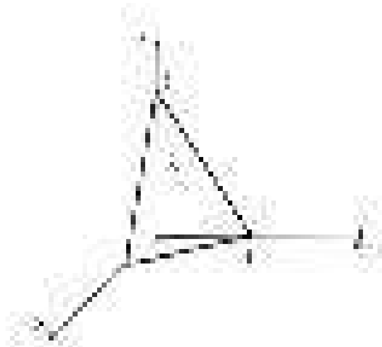


Gambar 5.3 Tafsiran Integral Permukaan

CONTOH 5.2

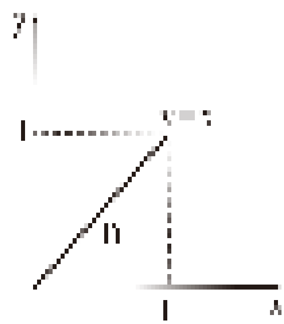
Hitung $\iint_S (xy + z)\,dS$ jika S permukaan $2x + y + z = 3$ yang proyeksinya pada bidang XY adalah segitiga dengan titik-titik (0,0) , (1,0), dan (1,1).

Penyelesaian:



Gambar 5.4 Permukaan S dibatasi $2x + y + z = 3$ dan bidang XY

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.5 Proyeksi D dibatasi (0,0), (1,0) dan (1,1)

D adalah proyeksi dari S yang dibentuk oleh titik-titik (0,0), (1,0) dan (1,1) sehingga diperoleh persamaan-persamaan $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

$$z = f\left(x, y\right) = 3 - 2x - y$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2 \qquad , \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$$dS = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dA$$

Jadi

$$\iint_S (xy + z)\, dS = \iint_D (xy + 3 - 2x - y)\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_D (xy + 3 - 2x - y)\sqrt{6}\, dA$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} (xy + 3 - 2x - y)\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}xy^2 + 3y - 2xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3 + 3x - \frac{5}{2}x^2\right)dx$$

$$= \sqrt{6}\left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{19}{24}\sqrt{6}$$

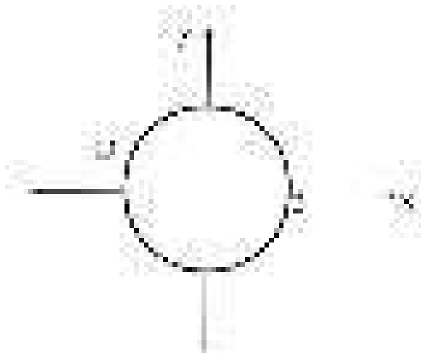
CONTOH 5.3

Hitung $\iint_S (xyz)\, dS$ jika S permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak antara z = 0 dan z = 2 .

Penyelesaian:

Gambar 5.6 Permukaan S dibatasi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, z = 0 dan z = 2

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.7 D proyeksi S dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dS = \sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + 1}\, dA$$

Jadi

$$\iint_S (xyz)\, dS = \iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{2}\, dA$$

$$= \sqrt{2}\iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2}\right) dA$$

dengan menggunakan integral lipat dua koordinat Polar

$$= \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(r\,cos\theta\right)\left(r\,sin\theta\right)r.r\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(r^4\,cos\theta\,sin\theta\right)dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{5}r^5\,]_{r=0}^{2}\,cos\theta\,sin\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(cos\theta\,sin\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(sin\theta\right)d\left(sin\theta\right)$$

$$= \frac{16}{5}\sqrt{2}\,sin^2\theta]_0^{2\pi} = 0$$

5.3 Aplikasi Integral Permukaan

a. Luas Permukaan

Jika $g\left(x,y,z\right)=1$, maka

Luas Permukaan = S = $\iint_S dS$.

b. Massa = m

Jika rapat massa di setiap titik (x,y,z) pada S adalah $\rho\left(x,y,z\right)$ maka Massa = m = $\iint_S \rho\left(x,y,z\right)\,dS$.

c. Momen massa

- terhadap bidang yz , $M_{yz}=\iint_S x\,\rho\left(x,y,z\right)\,dS$.
- terhadap bidang xz , $M_{xz}=\iint_S y\,\rho\left(x,y,z\right)\,dS$
- terhadap bidang xy , $M_{xy}=\iint_S z\,\rho\left(x,y,z\right)\,dS$

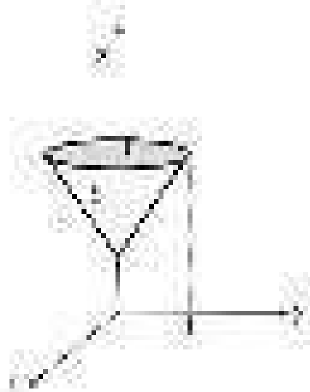
d. Titik Pusat Massa $\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)$

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{m}\quad,\quad\overline{y}=\frac{M_{xz}}{m}\quad,\quad\overline{z}=\frac{M_{xy}}{m}$$

CONTOH 5.4

Hitunglah luas permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di bawah z = 6

Penyelesaian:



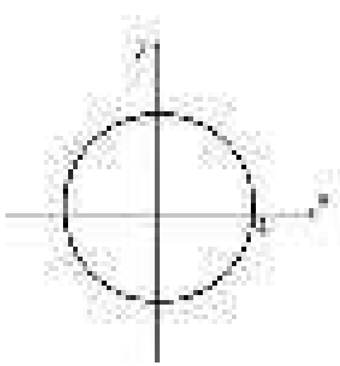
Gambar 5.8 S bagian dari permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan z = 6

Perpotongan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan z = 6

diperoleh $2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$

maka $r = 4$.

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.9 D adalah proyeksi S dibatasi $x^2 + y^2 = 16$

$z = f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$dS = \sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + 1}\, dA$

Luas Permukaan = $S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1}\, dA$

= $\iint_D \sqrt{2}\, dA$

= $\sqrt{2} \iint_D dA$

= $\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} r\, dr\, d\theta$

= $\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \dfrac{1}{2} r^2]_0^4\, d\theta$

= $8\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$

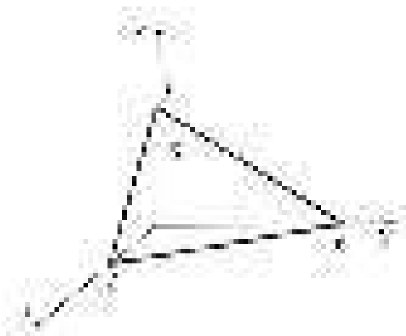
= $8\sqrt{2}\, \theta]_{\theta=0}^{2\pi}$

= $16\sqrt{2}\, \pi$ satuan luas

CONTOH 5.5

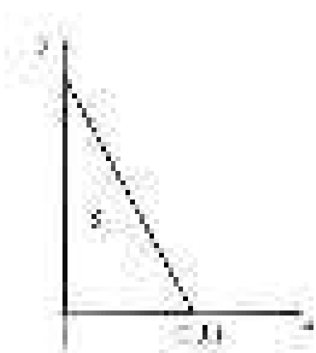
Hitunglah luas permukaan jika S dibatasi oleh $3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 5.10 S bagian permukaan $3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.11 D adalah proyeksi S yang dibatasi titik (2,0) dan (0,6)

Persamaan garis yang melalui titik (2,0) dan (0,6) adalah $y = -3x + 6$

Dari permukaan $3x + y + 2z = 6$, maka $z = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x$

Jadi $z = f(x, y) = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3}{2}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}$

$$dS = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dA$$

Luas Permukaan $= S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}\, dA$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{14}{4}}\, dA$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \iint_D dA$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{y=-3x+6} dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^{2} y \,\Big]_{y=0}^{-3x+6} dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^{2} (-3x+6)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x\right)\Big]_{x=0}^{2}$$

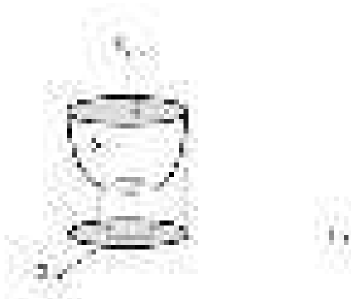
$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \left(-\frac{3}{2}.2^2 + 6.2\right)$$

$= 3\sqrt{14}$ satuan luas

CONTOH 5.6

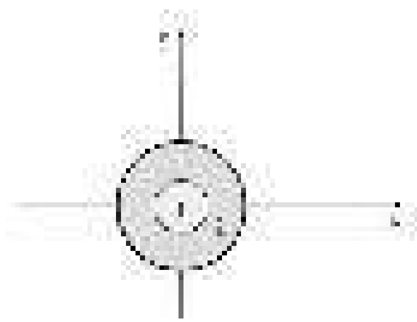
Jika S bagian dari permukaan $z = x^2 + y^2$, yang terletak di antara bidang $z = 1$ dan $z = 4$. Tentukan titik pusat massa S jika rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = kz$, k konstanta.

Penyelesaian:



Gambar 5.12 S bagian permukaan $z = x^2 + y^2$ antara $z = 1$ dan $z = 4$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.13 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f\left(x, y\right) = x^2 + y^2$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$dS = \sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + 1}\, dA$

- Massa = m = $\iint_S \rho\, dS$ = $\iint_S kz\, dS$

$$= \iint_S k\left(x^2 + y^2\right)\ dS$$

$$= k\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= k\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= k\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dA$$

$$= k\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r^2\sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= k\ (\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\ )(\int_{r=1}^{2} r^2\sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr)$$

$$= 2\pi k\ (\int_{r=1}^{2} r^2\sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr)$$

$\int_{r=1}^{2} r^2\sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2 + 1$

$du = 8r\, dr$ maka $\frac{1}{8} du = r\, dr$

$$r^2 = \frac{1}{4}(u - 1)$$

Maka

$$\int r^2\sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr = \int \frac{1}{4}(u - 1)\sqrt{u}\, \frac{1}{8} du$$

$$= \frac{1}{32}\int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right) du$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}\left[\ 4r^2 + 1\right]^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}[4r^2 + 1]^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{80}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{48}[4r^2+1]^{\frac{3}{2}}\ )_1^2$$

= 12.963

Jadi massa $= 2\pi k\ (\int_{r=1}^{2} r^2\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr)$

$= 2\pi k\left(12.963\right) = 25.926\pi k$

- Karena S simetri terhadap sumbu z maka $\overline{x} = \overline{y} = 0$

Sehingga titik pusat massa $\left(0,\ 0\ ,\overline{z}\right) = \left(0,\ 0\ ,\dfrac{M_{xy}}{m}\right)$

Momen massa terhadap bidang XY :

$$M_{xy} = \iint_S \rho z\, dS \quad = \iint_S kz.z\, dS = \iint_S k\, z^2\, dS$$

$$= \iint_S k\ (x^2+y^2)^2\, dS$$

$$= k\iint_D (x^2+y^2)^2\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\, dA$$

$$= k\iint_D (x^2+y^2)^2\sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA$$

$$= k\iint_D (x^2+y^2)^2\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dA$$

$$= k\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= k\ (\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta)\ (\int_{r=1}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr)$$

$$= 2\pi k\ (\int_{r=1}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr)$$

$\int_{r=1}^{2} r^4 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2 + 1$

$du = 8r\, dr$ maka $\frac{1}{8} du = r\, dr$

$$r^4 = (\frac{1}{4}(u-1))^2 = \frac{1}{16}\left(u^2 - 2u + 1\right)$$

Maka

$$\int r^4 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = \int \frac{1}{16}\left(u^2 - 2u + 1\right)\sqrt{u}\,\frac{1}{8} du$$

$$= \frac{1}{128}\int\left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{128}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{128}\left(\frac{2}{7}\left[4r^2+1\right]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}[4r^2+1]^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\int_{r=1}^{2} r^4 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr$$

$$= \frac{1}{128}\left(\frac{2}{7}\left[4r^2+1\right]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}[4r^2+1]^{\frac{3}{2}}\right)]_1^2$$

$$= \frac{1}{448}\left[4r^2+1\right]^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{160}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{192}[4r^2+1]^{\frac{3}{2}}\ ]_1^2$$

$$= 37.801$$

maka

$$M_{xy} = 2\pi k\ (\int_{r=1}^{2} r^4 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr) = 2\pi k\left(37.801\right) = 75.602\pi k$$

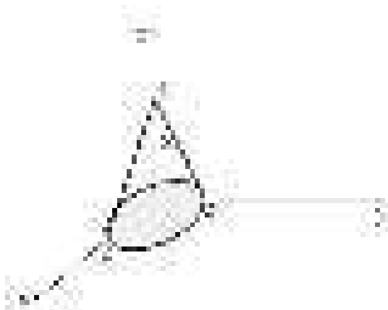
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{75.602\pi k}{25.926\pi k} = 2.916$$

Jadi titik pusat massa $\left(0,\ 0\ ,\overline{z}\right)=\left(0,\ 0\ ,2.916\right)$

CONTOH 5.7

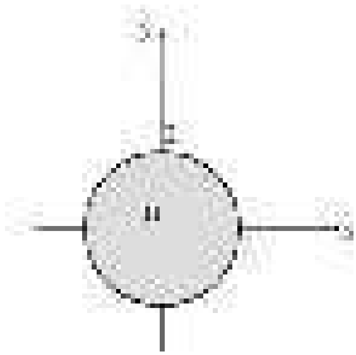
Jika S bagian dari permukaan $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ dan $z=0$. Tentukan momen massa terhadap bidang XY dan bidang XZ jika rapat massa di setiap titik $\rho\left(x,y,z\right)=\ 3\sqrt{x^2+y^2}$.

Penyelesaian:



Gambar 5.14 S bagian permukaan $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ dan $z=0$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.15 Proyeksi D dibatasi $x^2+y^2=4$

Dari persamaan $z = f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$dS = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 1}\, dA = \sqrt{2}\, dA$$

- Momen massa terhadap bidang XY :

$$M_{xy} = \iint_S \rho z\, dS = \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\ .\ z\, dS$$

$$= \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\ \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dS$$

$$= 3\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\, dA$$

$$= 3\sqrt{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\ (2-r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} \left(2r^2 - r^3\right) dr\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\ \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{2} \left(2r^2 - r^3\right) dr\right)$$

$$= 6\sqrt{2}\pi\ \left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\right)_0^2$$

$$= 8\sqrt{2}\pi$$

- Momen massa terhadap bidang XZ :

$$M_{xz} = \iint_S \rho y\, dS = \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\ .\ y\, dS$$

$$= \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\ \ y\, dS$$

$$= 3\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \ y\ \sqrt{2}\, dA$$

$$= 3\sqrt{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \ y\ \ dA$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\ \left(r\, sin\theta\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\ \left(r^3\ sin\theta\right) dr\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\ (\int_{\theta=0}^{2\pi} sin\theta\ \ d\theta)(\int_{r=0}^{2}\ \left(r^3\right) dr)$$

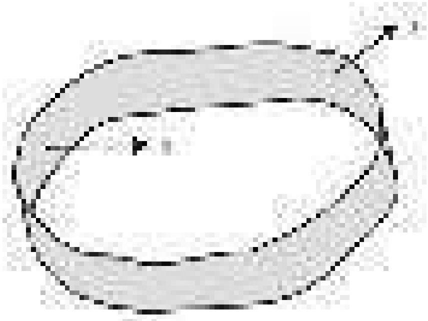
$$= 3\sqrt{2}\pi\ (-cos\theta)_0^{2\pi}\ \ (\frac{1}{4}r^4)_0^2$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{2}\pi\ (cos\theta)_0^{2\pi}\ \ (r^4)_0^2$$

$$= -12\sqrt{2}\pi\left(cos 2\pi - cos 0\right)$$

$$= 0$$

5.4 Fluks Medan Vektor yang Melalui Permukaan S



Gambar 5.16 Permukaan bersisi satu pita Mobius

Pada permukaan yang bersisi dua seperti pita , dan andaikan terdapat fluida yang dapat mengalir melalui permukaan tersebut dari satu sisi ke sisi yang lain. Andaikan juga permukaan tersebut licin yang berarti mempunyai normal satuan n arah ke atas yang berubah-ubah secara kontinu. Jika S adalah permukaan yang bersisi dua seperti definisi di atas dan diasumsikan S dicelupkan ke dalam fluida dengan medan kecepatan kontinu $F(x, y, z)$, maka :(Lapidus, 1968)scientists, and engineers should find the book to be an excellent introductory text for coursework or self-study as well as worth its shelf space for reference." —MAA ReviewsApplied Mathematics, Fourth Edition is a thoroughly updated and revised edition on the applications of modeling and analyzing natural, social, and technological processes. The book covers a wide range of key topics in mathematical methods and modeling and highlights the connections between mathematics and the applied and natural sciences.The Fourth Edition covers both standard and modern topics, including scaling and dimensional analysis; regular and singular perturbation; calculus of variations; Green's functions and integral equations; nonlinear wave propagation; and stability and bifurcation. The book provides extended coverage of mathematical biology, including biochemical kinetics, epidemiology, viral dynamics, and parasitic disease. In addition, the new edition features:Expanded coverage on orthogonality, boundary value problems, and distributions, all of which are motivated by solvability and eigenvalue problems in elementary linear algebraAdditional MATLAB® applications for computer algebra system calculationsOver 300 exercises and 100 illustrations that demonstrate important conceptsNew examples of dimensional analysis and scaling along with new tables of dimensions and units for easy referenceReview material, theory, and examples of ordinary differential equationsNew material on applications to quantum mechanics, chemical kinetics, and modeling diseases and virusesWritten at an accessible level for readers in a wide range of scientific fields, Applied Mathematics, Fourth Edition is an ideal text for introducing modern and advanced techniques of applied mathematics to upper-undergraduate and graduate-level students in mathematics, science, and engineering. The book is also a valuable reference for engineers and scientists in government and industry.”,”author”:[{“dropping-particle”:””,”family”:”Lapidus”,”given”:”Leon”,”non-dropping-particle”:””,”parse-names”:false,”suffix”:””}],”container-title”:”Industrial and Engineering Chemistry”,”id”:”ITEM-1”,”issued”:{“date-parts”:[[“1968”]]},”title”:”Applied mathematics”,”type”:”article-journal”},”uris”:[“http://www.mendeley.com/documents/?uuid=7ae05548-fb83-4cb1-90f7-deddecce3f18”]}],”mendeley”:{“formattedCitation”:”(Lapidus, 1968

Fluks yang menyeberangi S adalah = $\iint_S F.n\,dS$

Note: Fluks dengan cara di atas disebut cara langsung

TEOREMA

Misalkan S adalah permukaan mulus bersisi dua yang dibentuk oleh $z = f\left(x, y\right)$, dimana (x,y) ada di dalam D, dan misalkan n melambangkan normal satuan k arah atas pada S. Jika f mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $F = Mi + Nj + Pk$ adalah medan vektor kontinu , maka fluks F yang menyeberangi S dapat dinyatakan dengan:

Fluks F = $\iint_S F.n\,dS$ = $\iint_D \left[-Mf_x - Nf_y + P\right] dA$

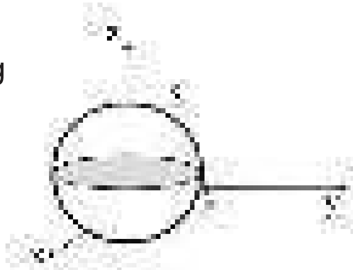
CONTOH 5.8

Hitung fluks arah ke atas dari $F(x, y, z) = -yi + xj + k$ yang menyeberangi bagian dari permukaan bola S yang dibentuk oleh $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $0 \le x^2 + y^2 \le 4$ dengan menggunakan:

a. Cara Langsung

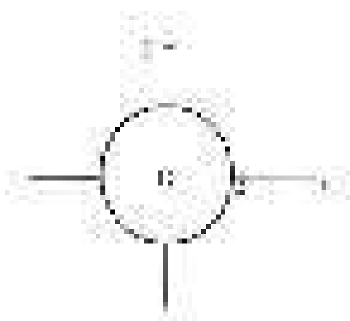
b. Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.17 S bagian permukaan

Proyeksi S terhadap bidang XY adalah $0 \le x^2 + y^2 \le 4$ diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.18 Proyeksi D dibatasi $0 \le x^2 + y^2 \le 4$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\dfrac{x}{z}$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$$

$$dS = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\,dA$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2 + 1}\,dA$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}\,dA = \frac{3}{z}dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$H(x,y,z) = z - f(x,y)$$

$$= z - \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$= n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\frac{3}{z}}$$

$$= \left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$= \iint_S F.n\, dS$$

$$= \iint_S (-yi + xj + k).\left(\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k\right)dS$$

$$= \iint_D (-yi + xj + k).\left(\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k\right)\frac{3}{z}dA$$

$= \iint_D dA$ (Luas lingkaran D dengan jari-jari = r = 2)

$= 4\pi$ satuan kubik

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x,y,z) = -yi + xj + k$ maka $M = -y$, $N = x$, $P = 1$

Maka

Fluks F = $\iint_S F.n\, dS$ = $\iint_D \left[-Mf_x - Nf_y + P\right]dA$

$$\iint_D \left[y\left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right) - x\left(-\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right) + 1\right]dA$$

= $\iint dA$ (adalah Luas lingkaran D dengan jari-jari = r = 2)

= 4π satuan kubik

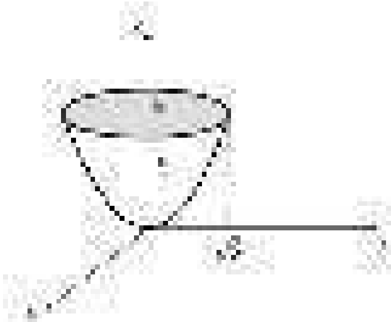
CONTOH 5.9

Hitung fluks arah ke atas dari $F(x,y,z) = -2yi + 4k$ yang menyeberangi permukaan S yang dibatasi $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$ dengan menggunakan:

a. Cara Langsung

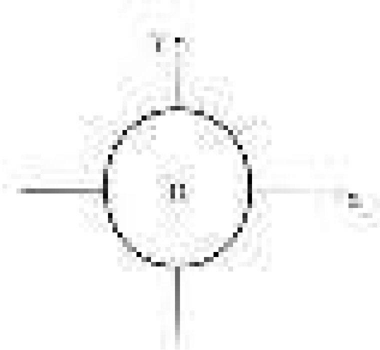
b. Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.19 S bagian permukaan $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.20 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 6$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$dS = \sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}\, dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$H(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$= z - \left(x^2 + y^2\right) = z - x^2 - y^2$$

$$n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + 1}}$$

$$= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}$$

$$= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}$$

$$= (-2xi - 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}\right)$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$= \iint_S F.n\,dS$$

$$= \iint_S (-2yi+4k).\left((-2xi-2yj+k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\right)\right)dS$$

$$= \iint_D (-2yi+4k).\left((-2xi-2yj+k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\right)\right)\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA$$

$$= \iint_D (4xy+4)\,dA$$

$$= 4\iint_D (xy+1)\,dA$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}}\left[(r\cos\theta)(\mathrm{r}sin\theta)+1\right]r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}}\left(r^3\cos\theta\ \ \sin\theta+r\right)\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos\theta\ \ \sin\theta d\theta\int_{r=0}^{\sqrt{6}}r^3\ \ dr\ +\ 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}}r\ \ dr\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta\,d(\sin\theta)\int_{r=0}^{\sqrt{6}}r^3\ \ dr\ +\ 4\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{\sqrt{6}}r\ \ dr$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}sin^2\theta\right)]_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\ r^4\right)]_0^{\sqrt{6}}\ +\ 4(\theta)]_0^{2\pi}\ (\frac{1}{2}\ r^2)]_0^{\sqrt{6}}$$

$$= 0+4(2\pi)\left(\frac{1}{2}.6\right)$$

$= 24\pi$ satuan kubik

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x,y,z)=-2yi+4k$ maka $M=-2y$, $N=0$, $P=4$

Maka

Fluks F = $\iint_S F.n\,dS$ = $\iint_D \left[-Mf_x - Nf_y + P\right] dA$

$$= \iint_D \left[2y(2x) - 0 + 4\right] dA$$

$$= \iint_D (4xy + 4)\, dA$$

$$= 4\iint_D (xy + 1)\, dA$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left[(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 1\right] r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left(r^3\cos\theta\sin\theta + r\right) dr\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta\ \sin\theta\, d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3\ dr + 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} r\ dr\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta\, d(\sin\theta) \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3\ dr + 4\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r\ dr$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} sin^2\theta\right)]_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\ r^4\right)]_0^{\sqrt{6}} + 4(\theta)]_0^{2\pi}\ (\frac{1}{2}\ r^2)]_0^{\sqrt{6}}$$

$$= 0 + 4(2\pi)\left(\frac{1}{2}\,.6\right)$$

= 24π satuan kubik

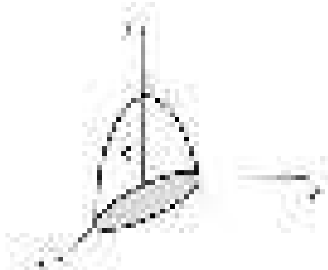
CONTOH 5.10

Hitunglah fluks medan vektor $F = xi + yj + zk$ yang menyeberangi S bagian dari paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ yang terletak di atas bidang xy, dengan n vektor normal ke arah atas. Selesaikan dengan menggunakan:

a. Cara Langsung

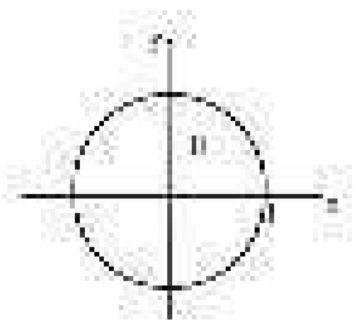
b. Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.21 S bagian permukaan $z = 1 - \left(x^2 + y^2\right)$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.22 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f\left(x, y\right) = 1 - \left(x^2 + y^2\right)$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$$dS = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}\, dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$H(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$= z - \left[1 - \left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$$= z - 1 + x^2 + y^2$$

$$n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}}$$

$$= \frac{(2x)i + (2y)j + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}$$

$$= \frac{2xi + 2yj + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}$$

$$= (2xi + 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}\right)$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$= \iint_S F.n\, dS$$

$$= \iint_S (xi + yj + zk).\left((2xi + 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}\right)\right) dS$$

$$= \iint_D (xi + yj + zk).\left((2xi + 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\right)\right)\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA$$

$$= \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 + z\right) dA$$

$$= \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2\right) dA$$

$$= \iint_D \left(x^2 + y^2 + 1\right) dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \left(r^2 + 1\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \left(r^3 + r\right)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} \left(r^3 + r\right)\,dr$$

$$= \left(\theta]_0^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right)]_0^1$$

$$= (2\pi)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \text{ satuan kubik}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = xi + yj + zk$ maka $M = x$, $N = y$, $P = z$

Maka

Fluks F = $\iint_S F.n\,dS$ = $\iint_D \left[-Mf_x - Nf_y + P\right] dA$

$$= \iint_D \left[-x(-2x) - y(-2y) + z\right] dA$$

$$= \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 + z\right) dA$$

$$= \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2\right) dA$$

$$= \iint_D \left(x^2 + y^2 + 1\right) dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left(r^2 + 1\right) r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left(r^3 + r\right) dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} \left(r^3 + r\right) dr$$

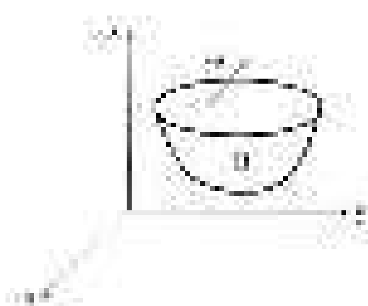
$$= \left(\theta]_0^{2\pi}\right) \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2\right)]_0^1$$

$$= \left(2\pi\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \text{ satuan kubik}$$

5.5 Teorema Divergensi Gauss

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang ditutupi oleh permukaan yang licin bagian demi bagian. (Wahyuni, 2017)



Gambar 5.23 Bidang B yang ditutupi permukaan ∂B

Teorema Divergensi Gauss

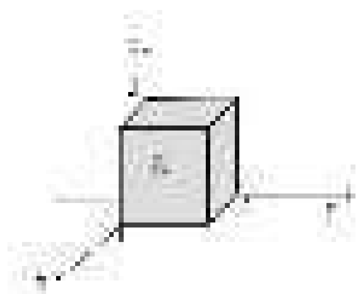
Misalkan $F = Mi + Nj + Pk$ suatu medan vektor dengan M, N dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada B dan ∂B. Jika n vektor normal satuan keluar pada ∂B, maka

$$\iint_{\partial B} F \,.n\, dS = \Delta_B div\, F\, dV = \Delta_B \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dV$$

CONTOH 5.11

Hitung fluks dari medan vektor $F(x, y, z) = x^2 yi + 2xz\, j + yz^3\, k$ melalui permukaan kotak tegak $B = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3\}$ dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss

Penyelesaian:



Gambar 5.24 Benda B yang dibatasi $0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$

$$\iint_{\partial B} F \,.n\, dS = \Delta_B div\, F\, dV = \Delta_B \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dV$$

$$= \Delta_B \left[2xy + 0 + 3yz^2 \right] dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2xy + 3yz^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \left(2xyz + yz^3 \right)]_{z=0}^{3}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \left(6xy + 27y\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(3xy^2 + \frac{27}{2} y^2\right)\Big]_{y=0}^2 dx$$

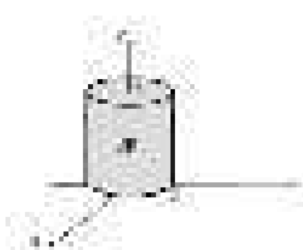
$$= \int_0^1 \left(12x + 54\right) dx$$

$$= 6x^2 + 54x\Big]_0^1 = 60$$

CONTOH 5.12

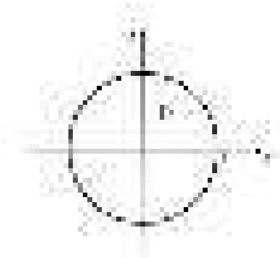
Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$, z=0 dan z =3. Jika n adalah vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $F\left(x, y, z\right) = (x^3 + \tan yz)i + \left(y^3 - e^{xz}\right) j + \left(3z + x^3\right) k$ maka hitung fluks dari F melalui ∂B.

Penyelesaian:



Gambar 5.25 Benda B yang dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 4$, z = 0 dan z =3

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.26 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$div\, F = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + \tan yz) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 - e^{xz}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(3z + x^3\right)$$

$$= (3x^2 + 3y^2 + 3)$$

$$= 3\,(x^2 + y^2 + 1)$$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\iint_{\partial B} F\, .n\, dS = \iiint_B div\, F\, dV$$

$$= 3\iiint_B \left[(x^2 + y^2 + 1)\right] dV$$ (gunakan koordinat silinder)

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^2 + 1)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta .\ \int_0^2\int_0^3 (r^3 + r)\, dz\, dr$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta .\ \int_0^2 \left(r^3 + r\right) z\ \Big]_0^3\, dr$$

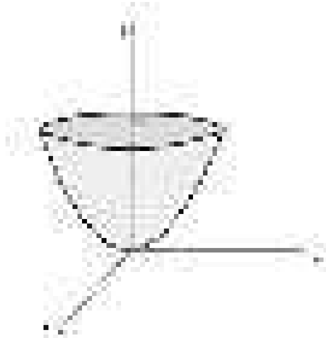
$$= 18\pi \left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right)\Big]_0^2$$

= 108π satuan kubik

CONTOH 5.13

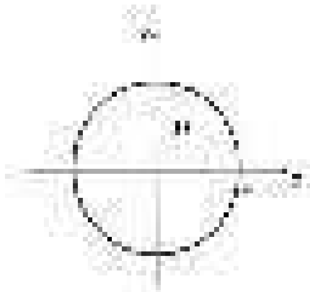
Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $z = x^2 + y^2$ dan z = 4. Jika n adalah vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $F(x, y, z) = (x^3 + 2yz)i + (3y^3 - 3x)j + (9z + 4x^3)k$ maka hitung fluks dari F melalui ∂B.

Penyelesaian:



Gambar 5.27 Benda B yang dibatasi silinder $z = x^2 + y^2$ dan z = 4

Proyeksi B terhadap bidang xy diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.28 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$div\, F = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3 - 3x) + \frac{\partial}{\partial z}(9z + 4x^3)$$

$$= (3x^2 + 6y^2 + 9)$$

$= 3\ (x^2 + 2y^2 + 3)$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\iint_{\partial B} F\ .n\,dS = \iiint_B div\,F\,dV$$

$$= 3\iiint_B \left[(x^2 + 2y^2 + 3)\right]dV$$ (gunakan koordinat silinder)

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^2cos^2\theta + 2r^2sin^2\theta + 3)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^3cos^2\theta + 2r^3sin^2\theta + 3r)dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(r^3cos^2\theta + 2r^3sin^2\theta + 3r\right)z\ ]_0^3\,dr\right)d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(r^3cos^2\theta + 2r^3sin^2\theta + 3r\right)dr\right)d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4cos^2\theta + \frac{1}{2}r^4sin^2\theta + \frac{3}{2}r^2\right)]_0^2\ d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(4cos^2\theta + 8sin^2\theta + 6\right)\ d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(4\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] + 8\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] + 6\right)\ d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(\left[2 + 2\cos 2\theta\right] + \left[4 - 4\cos 2\theta\right] + 6\right)\ d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(12 - 2\cos 2\theta\right)\ d\theta$$

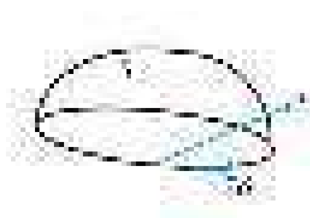
$$= 9\ (12\theta - \sin 2\theta)_0^{2\pi}$$

$$= 9\ (24\pi - 0)$$

$= 216\pi$ satuan kubik

5.6 Teorema Stokes

Misalkan S permukaan dua sisi dengan ∂S (batasnya) merupakan lengkungan sederhana tertutup yang licin bagian demi bagian dan ∂S terorientasi secara konsisten terhadap n (vektor normal satuan arah keluar pada permukaan S), yaitu jika kita berdiri dekat tepi permukaan dengan kepala searah dengan vector n dan jika kita memandang ke arah lengkungan maka permukaan terletak di sebelah kiri kita. (Samura & Pengantar, n.d.)



Gambar 5.29 Permukaan S dengan vektor normal n

Teorema Stokes

Misalkan S , ∂S dan n seperti disebutkan di atas. Misalkan $F = Mi + Nj + Pk$ medan vektor dengan M, N, dan P mempunyai turunan –turunan parsial pertama yang kontinu pada S dan ∂S. Bila T adalah vector satuan singgung pada ∂S, maka

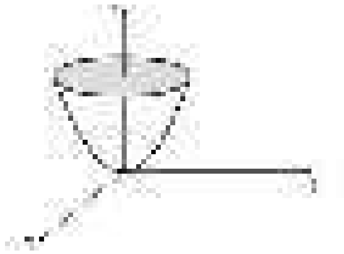
$$\oint_C F.T\,dS = \oint_{\partial S} F.T\,dS = \iint_S \left(Curl\,F\right).n\,dS$$

CONTOH 5.14

Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $F\left(x,y,z\right) = y\,i - x\,j + yz\,k$ jika S adalah permukaan paraboloida

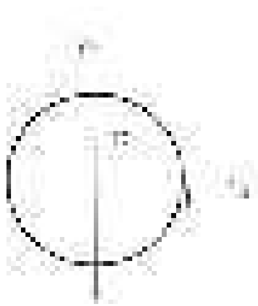
$z = x^2 + y^2$ dengan batas ∂S adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ di bidang z = 1.

Penyelesaian:



Gambar 5.30 S bagian permukaan $z = x^2 + y^2$ dan $z = 1$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.31 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$

∂S mempunyai persamaan $x^2 + y^2 = 1$ dan z = 1 dan persamaan parameter adalah:

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = 1$$

dengan $0 \leq t \leq 2\pi$ dan $dz = 0$

Ruas Kiri

$$\oint_{\partial S} F.T\,dS \quad = \oint_{\partial S} F.dX$$

$$= \oint_{\partial S} y\,dx - x\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(\sin t)(-\sin t)\,dt - (\cos t)(\cos t)\,dt\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-sin^2 t\right)dt - \left(cos^2 t\right)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\left(sin^2 t\right) + \left(cos^2 t\right)\right]dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt$$

$$= -2\pi$$

Ruas Kanan

$$\iint_S \left(Curl\,F\right).n\,dS$$

$$Curl\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix}$$

$$= z\,i - 2k$$

$$= z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$H(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$= z - \; x^2 - y^2$$

$$dS = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}\, dA$$

$$n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}}$$

$$= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}$$

$$= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}$$

$$= (-2xi - 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}\right)$$

Maka

$$\iint_S (Curl\, F)\, .n\, dS = \iint_S (zi - 2k)\left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}\right) dS$$

$$= \iint_D (zi - 2k)\left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}}\right)\sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}\, dA$$

$$= \iint_D \left(-2x\left(x^2 + y^2\right) - 2\right) dA$$

$$= -2\iint_D \left(x\left(x^2+y^2\right)+1\right)\, dA$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r\cos\theta\left(r^2\right)+1\right] r\, dr\, d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^4\cos\theta + r\right] dr\, d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5}r^5\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\right)\Big]_0^1 \; d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5}\cos\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= -2\left(\frac{1}{5}\left(\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\theta\right)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -2\left(0+\frac{1}{2}.2\pi\right) = -2\pi$$

Jadi $\oint_{\partial S} F.T\, dS = \iint_S \left(Curl\, F\right).n\, dS$

Maka terbukti kebenaran Teorema Stokes

CONTOH 5.15

Misalkan S bagian dari permukaan bola $x^2+y^2+\left(z-4\right)^2 = 10$ yang terletak di bawah bidang z = 1 dan misalkan $F\left(x,y,z\right) = y\, i - x\, j + yz\, k$. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S \left(Curl\, F\right).n\, dS$, dimana n vektor normal satuan arah keluar.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa ∂S adalah lingkaran $x^2+y^2+\left(1-4\right)^2 = 10$

$x^2+y^2 = 1$ (lingkaran yang berjari-jari 1)

(Penyelesaian seperti contoh 5.13)

$$\oint_{\partial S} F.T\, dS = -2\pi$$

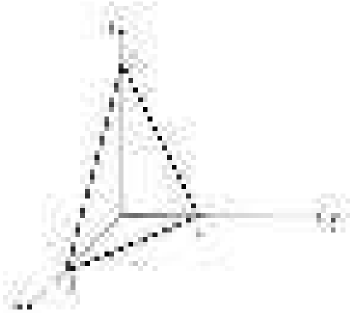
$$\iint_S \left(Curl\, F\right).n\, dS = -2\pi$$

CONTOH 5.16

Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\oint_C F.T\, dS$ di-mana $F\left(x,y,z\right) = 2z\,i + \left(8x-3y\right)j + \left(3x+y\right)k$ dan C adalah sisi-sisi segitiga yang melalui titik-titik (1,0,0), (0,1,0) dan (0,0,2).

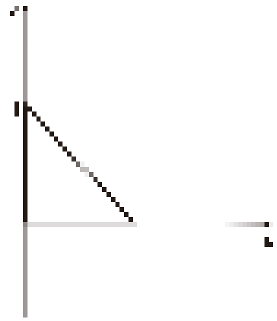
Penyelesaian:

Ambil S permukaan bidang segitiga yang melalui titik-titik (1,0,0), (0,1,0) dan (0,0,2), maka $C = \partial S$



Gambar 5.32 Permukaan ∂S dibatasi (1,0,0), (0,1,0) dan (0,0,2)

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.33 Proyeksi D segitiga melalui (0,0), (1,0) dan (1,1)

Teorema Stokes:

$$\oint_C F.T\,dS = \oint_{\partial S} F.T\,dS = \iint_S \left(Curl\,F\right).n\,dS$$

$$Curl\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 8x-3y & 3x+y \end{vmatrix}$$

$$= \left(1-0\right)i - \left(3-2\right)j + \left(8-0\right)k$$

$$= i - j + 8k$$

Vektor n adalah vector normal pada segitiga .

Ambil vector $\vec{a} =$ vector yang melalui titik-titik (1,0,0) dan (0,1,0), yaitu $\vec{a} = \left(0-1\right)i + \left(1-0\right)j + \left(0-0\right)k = -i + j$. Ambil vector $\vec{b} =$ vector yang melalui titik-titik (1,0,0) dan (0,0,2), yaitu $\vec{b} = \left(0-1\right)i + \left(0-0\right)j + \left(2-0\right)k = -i + 2k$.

Maka $\vec{a}\, x\, \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

= $-2i - 2j - k$

Jadi

$n = \dfrac{-\vec{a}\, x\, \vec{b}}{\left|\vec{a}\, x\, \vec{b}\right|}$ (tanda negatif menandakan arahnya keluar)

= $\dfrac{2i + 2j + k}{\sqrt{4+4+1}}$

= $\dfrac{2}{3}i + \dfrac{2}{3}j + \dfrac{1}{3}k$

Sehingga

$$\iint_S (Curl\, F)\, .n\, dS = \iint_S (\, i - j + 8k\,).\left(\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k\right) dS$$

$$= \iint_S \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right) dS$$

$$= \frac{8}{3} \iint_S dS$$

= $\dfrac{8}{3}$ (Luas segitiga S)

Ingat bahwa luas segitiga $S = \dfrac{1}{2}\left|\, \vec{a}\, x\, \vec{b}\right|$

= $\dfrac{1}{2}\sqrt{4+4+1}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{9}$

$= \frac{3}{2}$

Jadi

$\oint_C F.T\, dS = \oint_{\partial S} F.T\, dS = \iint_S \left(Curl\, F\right) .n\, dS$

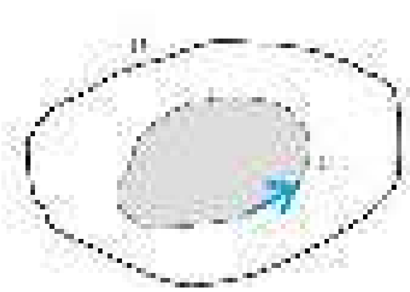
$= \frac{8}{3}$. (Luas segitiga S)

$= \frac{8}{3} \; . \; \frac{3}{2}$ = 4

CONTOH 5.17

Jika F medan vektor konservatif pada daerah D. Tunjukkan bahwa $\oint_C F.dX = 0$ untuk setiap lengkungan tertutup C dalam D.

Penyelesaian:



Gambar 5.34 Lengkungan tertutup C di dalam D

Ambil S permukaan sebarang yang batasnya $\partial S = C$. Maka menurut Teorema Stokes :

Karena F konservatif maka Curl F = 0, sehingga $\oint_C F.dX =$

$$\oint_C F.T\,dS = \oint_{\partial S} F.T\,dS = \iint_S (Curl\,F)\,.n\,dS = 0$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas presentasi per kelompok yang membahas materi perkuliahan .

LATIHAN 5

1. Hitung $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ jika $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ dan S permukaan bidang $z = x + y + 1$ dengan $0 \le x \le 1$ dan $0 \le y \le 1$.

2. Hitung $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ jika $g(x,y,z) = x + y$ dan S permukaan bidang $z = \sqrt{4 - x^2}$ dengan $0 \le x \le \sqrt{3}$ dan $0 \le y \le 1$.

3. Hitunglah fluks F medan vektor $F = yi - xj + 2k$ yang menyeberangi S bagian dari pemukaan $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \le x \le 5$ dengan menggunakan :
   a. Cara Langsung
   b. Teorema

4. Hitunglah fluks F medan vektor $F(x,y,z) = 2i + 5j + 3k$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, yang berada di dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$.

5. Hitunglah fluks dari medanvektor $F(x,y,z) = xi + yj + zk$ yang menyeberangi $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$ dengan menggunakan Teorema Gauss.

6. Jika $F(x,y,z)=(9-x^2)\,j$ adalah medan vektor dan S bagian dari permukaan dibatasi $2x+3y+6z=6$ di oktan pertama. Hitunglah fluks yang menyeberangi S dengan menggunakang:
   a. Cara Langsung
   b. Teorema

7. Jika S bagian dari permukaan $z=9-x^2-y^2$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah $\rho=3(x^2+y^2)$. Tentukanlah:
   a. Luas Permukaan
   b. Massa S
   c. Titik pusat massa S

8. Jika S bagian dari permukaan $z=9-\sqrt{x^2+y^2}$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah

   $\rho=\dfrac{k}{\sqrt{(x^2+y^2}}$, k konstanta

   Tentukanlah:
   a. Luas Permukaan
   b. Massa S
   c. Titik pusat massa S

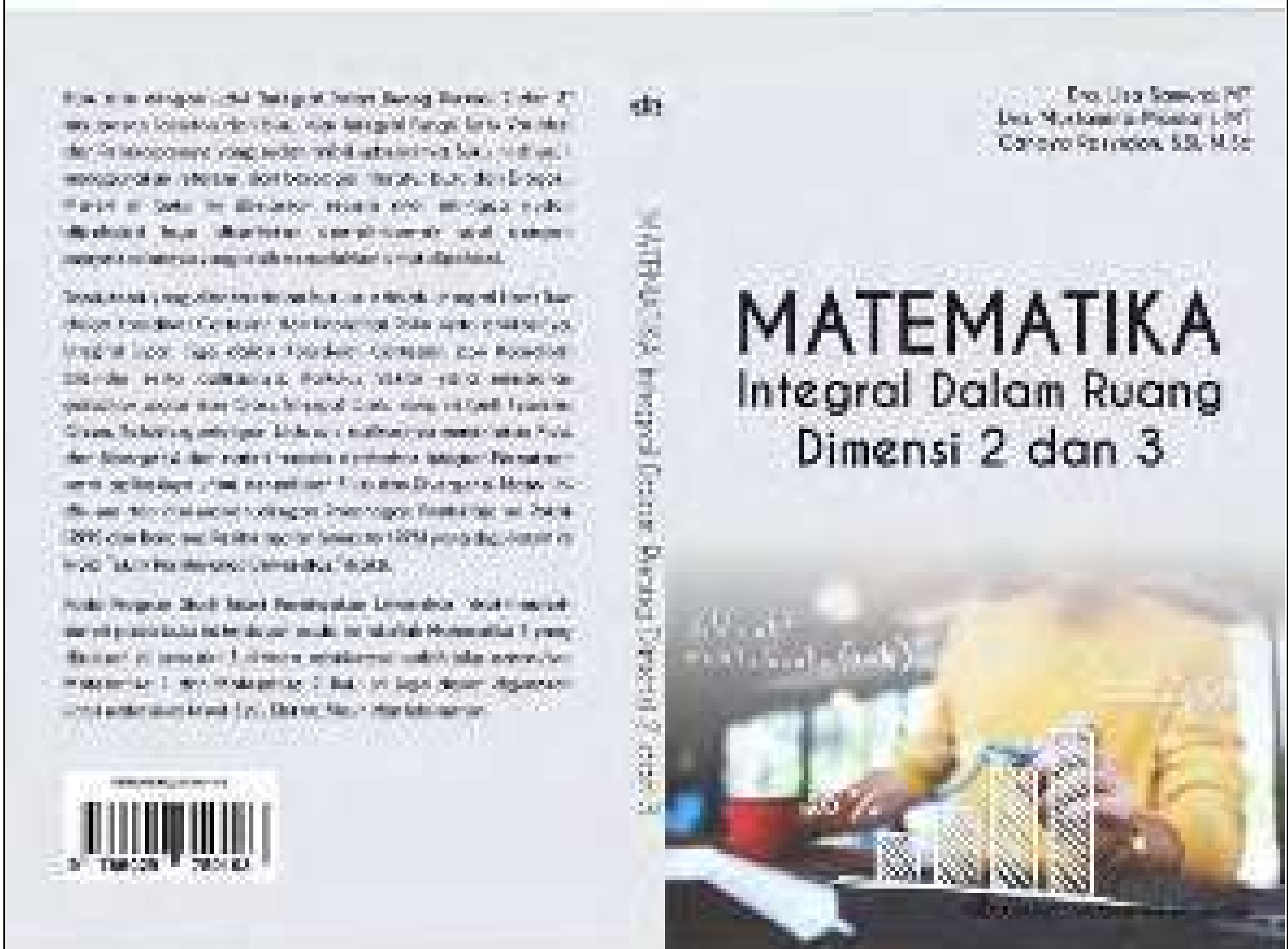
9. Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $F(x,y,z)=3x\,i-y\,j+4z\,k$ jika S adalah permukaan paraboloida $z=4-(x^2+y^2)$ dengan batas ∂S adalah lingkaran pada D di bidang z = 2.

10. Jika S bagian dari permukaan $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di atas bidang z = 2 dan misalkan $F(x, y, z) = 2x\,i + 3y\,j + 4k$. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung

    $\iint_S (Curl\,F)\,.n\,dS$

Integral dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

by Lisa Samura


MATEMATIKA
Integral Dalam Ruang
Dimensi 2 dan 3

MATEMATIKA

Integral Dalam Ruang Dimensi 2 Dan 3

Judul Buku : Matematika integral dalam ruang dimensi 2 dan 3

Penulis : Lisa Samura, Mustamina Maulani, Cahaya Rosyidan

Diterbitkan Oleh : Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta

Cetakan Pertama :

Dra. Lisa Samura, MT
Dra. Mustamina Maulani, MT
Cahaya Rosyidan, S.Si, MSc

MATEMATIKA

Integral Dalam Ruang Dimensi 2 Dan 3

Penerbit Universitas Tri-

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, rezeki dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar Matematika dengan judul "Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3 yang menjadi referensi untuk mata kuliah Matematika 3". Buku ini merupakan lanjutan dari buku Integral Fungsi Satu Variabel dan Penerapannya yang sudah diterbitkan sebelumnya dan dilengkapi dengan contoh-contoh soal dengan penyelesaian yang runut sehingga lebih mudah dimengerti. Harapan penulis buku ini dapat membantu mahasiswa lebih mudah memahami teori dan aplikasi Matematika 3.

Materi buku ajar ini terdiri dari : Integral Lipat Dua dan aplikasinya, Integral Lipat Tiga dan aplikasinya, Kalkulus Vektor, Integral Garis dan Integral Permukaan. Buku ini ditulis dengan bahasa yang mudah dimengerti dan dipahami oleh mahasiswa dan pembaca pada umumnya. Selain itu, diharapkan juga buku ini dapat menambah khazanah keilmuan pada bidang matematika.

Buku ini dapat tersusun dengan baik karena bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Afiat Anugrahadi, MS, Dr. Ir. Muhammad Burhannudinnur, MSc dan Dr. Ir. M. Ali Jambak, MT. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rosyida Permatasari, Ph.D dan Dr. M. Supriadi, MT sebagai *reviewer* dan Maman Djumarsara, ST, MT yang telah membantu penulis untuk mengoreksi buku ajar ini.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan buku ajar ini karena penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini masih belum sempurna. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi kita semua.

Jakarta, 15 November 2019

DAFTAR ISI

BAB 1
INTEGRAL LIPAT DUA

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami konsep integral lipat dua Koordinat Cartesian dan mampu menyelesaikan integralnya.
2. Memahami konsep integral lipat dua Koordinat Polar dan mampu menyelesaikan integralnya.
3. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi integral lipat dua.

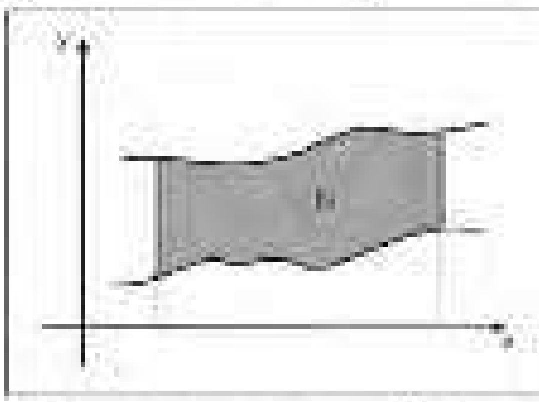
Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral lipat dua di R^2 yang merupakan lanjutan dari integral yang sudah dipelajari pada kalkulus dasar. Integral lipat dua terdiri dari integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian dan Koordinat Polar. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat dua untuk menentukan luas daerah, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda. (Lapidus, 1968)

1.1 Konsep Integral Lipat Dua

Jika D suatu daerah di bidang XY dan f(x,y) fungsi yang didefinisikan pada D maka konsep integral lipat dua dari fungsi f(x,y) pada D adalah

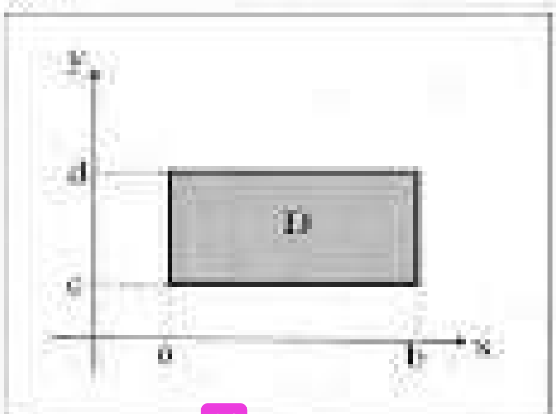
$\iint_D f(x,y)\, dA$, dimana dA adalah diferensial elemen luas (Kreyzig, Kreyzig, & Norminton, 2011) .



Gambar 1.1 Konsep Integral Lipat Dua

CONTOH 1.1

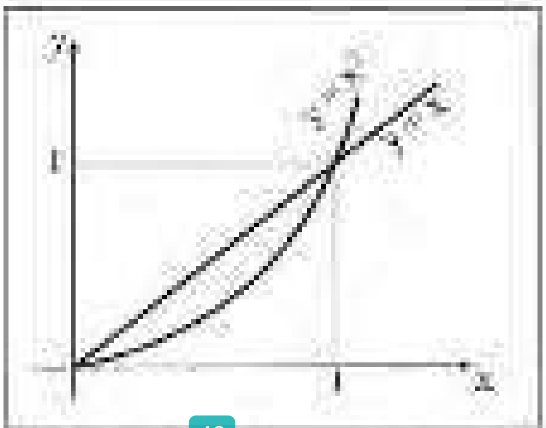
Jika diketahui D = {(x, y) : a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d} dan fungsi pada D adalah f(x,y) = $x^2 + xy$. Maka integral lipat dua dari f(x,y) pada D $\iint_D x^2 + xy\, dA$.



Gambar 1.2 Daerah D = {(x,y) : a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}

CONTOH 1.2:

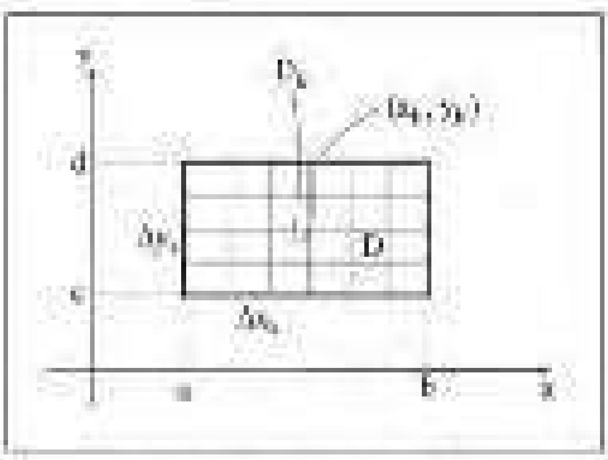
Jika diketahui $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le x^2\}$ dan fungsi pada D adalah $f(x,y) = \sin xy$. Maka integral lipat dua dari $f(x,y)$ pada D $\iint_D \sin xy \, dA$



Gambar 1.3. Daerah $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le x^2\}$

1.1.1 Definisi Integral Lipat Dua

Misalkan $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ suatu daerah empat persegi panjang di bidang xy, seperti diilustrasikan pada gambar di bawah.



Gambar 1.4 Definisi Integral Lipat Dua (KREYSZIG et al., 2011)

Bagi empat persegi panjang D menjadi n buah persegi panjang kecil kecil D_k. Misalkan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi D_k. Maka luas D_k adalah $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Selanjutnya ambil titik (x_k, y_k) di dalam D_k dan bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

Dimana f(x,y) suatu fungsi yang didefinisikan pada D. Sebut |P| maksimum panjang diagonal D_k, k = 1,2,...,n dan |P| dikenal sebagai norm partisi P.

Definisi Integral Lipat Dua

Jika $\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ ada, dituliskan

$\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_D f(x,y)\,dA$, maka f dikatakan terintegral pada D.

1.1.2 Eksistensi Integral Lipat Dua

Bila f didefinisikan dan terbatas pada empat persegi panjang D dan jika f kontinu pada D maka integral lipat dua (Thomas, Weir, & Hass, 2009)

$$\iint_D f(x,y)\,dA \quad \text{ada}$$

Harus diperhatikan syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya f masih bisa diskontinu pada sejumlah berhingga lengkungan-lengkungan licin yang mempunyai turunan. Selanjutnya dalam masalah ini hanya fokus pada fungsi f yang

CONTOH 1.1

Diketahui f(x,y) = sin xy dan D = {(x,y) : 1 ≤ x ≤ 2, 2 ≤ y ≤ 4}. Karena f kontinu dalam D maka $\iint_D \sin xy\, dA$ ada.

1.1.3 Sifat-sifat Integral Lipat Dua

Misalkan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ adalah fungsi-fungsi pada derah D dan c adalah kontanta bilangan Real. (Mathematics, n.d.)

Sifat penting yang dipenuhi oleh integral lipat dua

1. $\iint_D c\,f(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA$, untuk setiap $c \in R$
2. $\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA \pm \iint_D g(x,y)\,dA$
3. Untuk D_1 dan D_2 yang memenuhi $D = D_1 \cup D_2$, dimana $D_1 \cap D_2$ bertemu pada batas, maka $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$
4. Jika $f(x,y) \le g(x,y)$ untuk setiap (x,y) anggota daerah D, maka $\iint_D f(x,y)\,dA \le \iint_D g(x,y)\,dA$

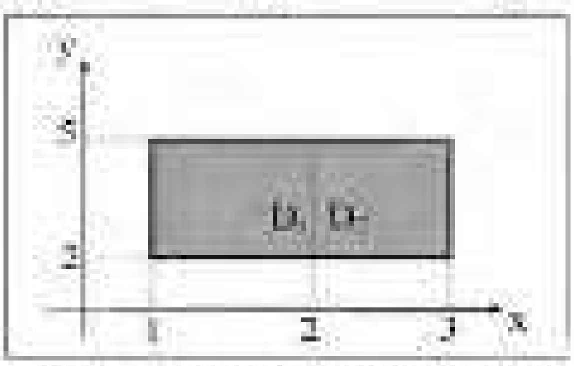
CONTOH 1.4

$$\iint_D 15\,(x^2 + 3xy)\,dA = 15\iint_D x^2\,dA + 15\iint_D 3xy\,dA.$$

CONTOH 1.5

Jika diketahui $D = \{(x,y) : 1 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 5\}$.
Misalkan $D_1 = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 5\}$
dan $D_2 = \{(x,y) : 2 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 5\}$.
Maka

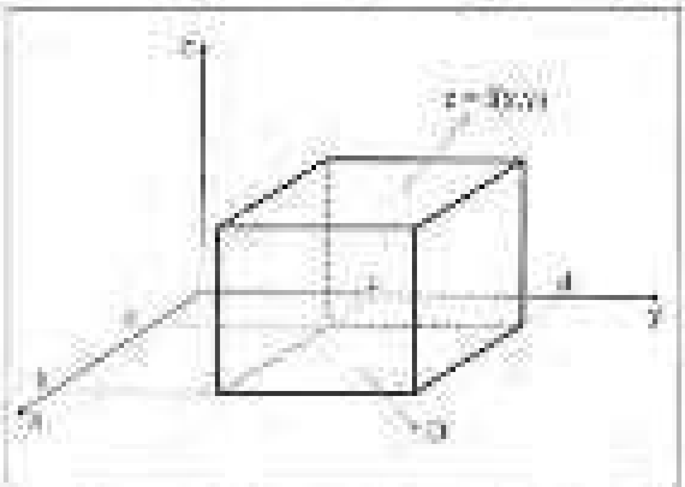
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$



Gambar 1.5 Daerah $D = D_1 \cup D_2$

1.1.4 Arti Geometris Integral Lipat Dua

Jika $f(x,y) \geq 0$ dan f didefinisikan pada $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ maka $\iint_D f(x,y)dA$ ialah volume benda pejal yang terletak di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas empat persegi panjang D. Empat persegi panjang D berada di atas bidang XOY yang juga merupakan proyeksi dari volume benda pejal terhadap bidang XOY. (Penerapannya,



Gambar 1.6 Arti geometris Integral Lipat Dua

1.2 Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

1.2.1 Tafsiran Integral Lipat Dua dalam Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D.

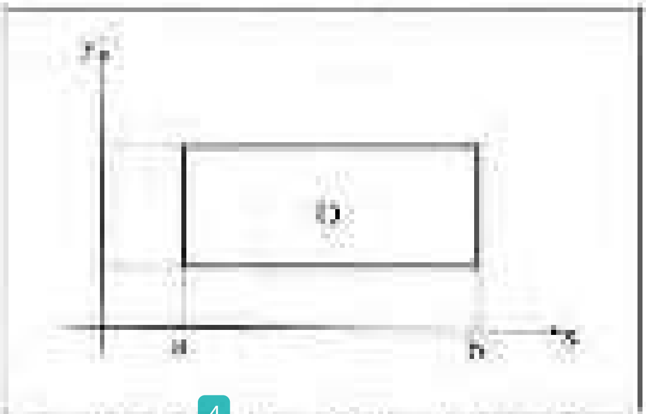
1. Jika D daerah yang dibatasi oleh $a < x < b$, $c < y < d$, maka integral lipat dua dapat dinyatakan

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)dy\ dx$$

Integral ruas kanan disebut juga integral berulang f terhadap y dahulu kemudian diintegralkan terhadap x.

Integral lipat dua di atas juga dapat ditulis dalam bentuk integral berulang f terhadap x dahulu kemudian diintegralkan terhadap y, dan dapat dinyatakan dalam bentuk

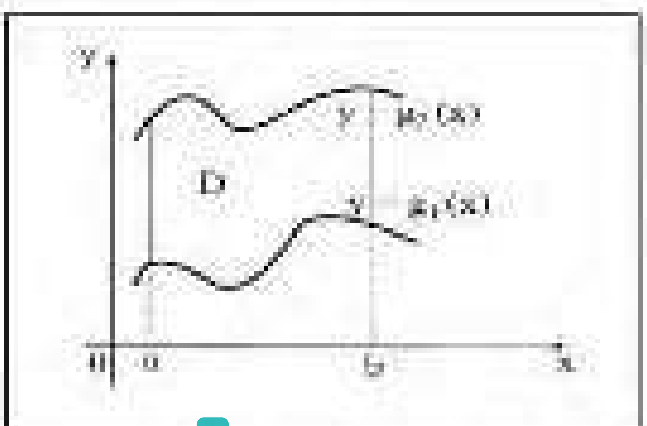
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b} f((x,y)dx)\,dy$$



Gambar 1.7 Tafsiran I Integral Lipat Dua

2. Jika D daerah yang dibatasi $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$,

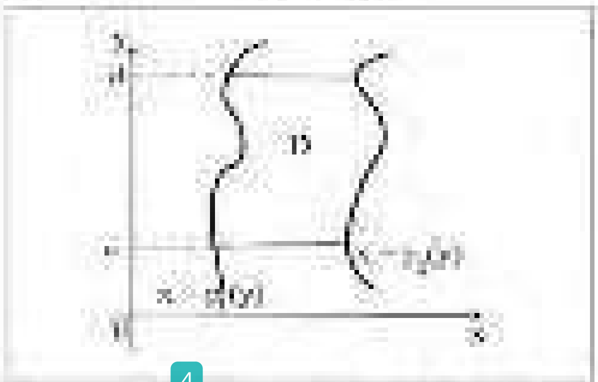
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f((x,y)dy)\,dx$$



Gambar 1.8. Tafsiran II Integral Lipat Dua

3. Jika D daerah yang dibatasi $p_1(y) \le x \le p_2(y)$, $c \le y \le d$.

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f((x,y)dx)dy$$

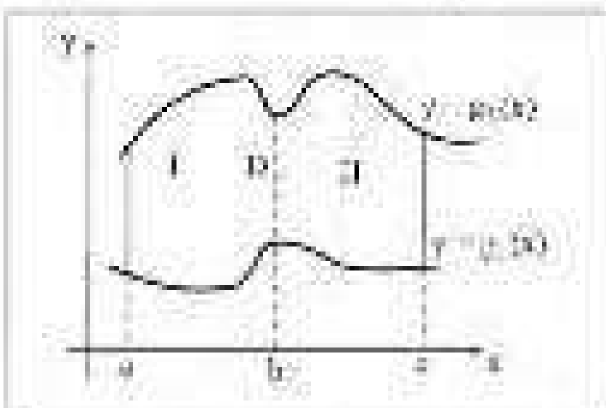


Gambar 1.9. Tafsiran III Integral Lipat Dua

4. Jika $D = D_1 \cup D_2$, dimana D_1 dibatasi $a < x < b$ & $g_1(x) < y < g_2(x)$ dan D_2 dibatasi oleh $b < x < c$ & $g_1(x) < y < g_2(x)$. Misalkan f(x,y) fungsi yang bekerja pada D maka

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f((x,y)dy)dx + \int_{x=b}^{c} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f((x,y)dy)dx$$

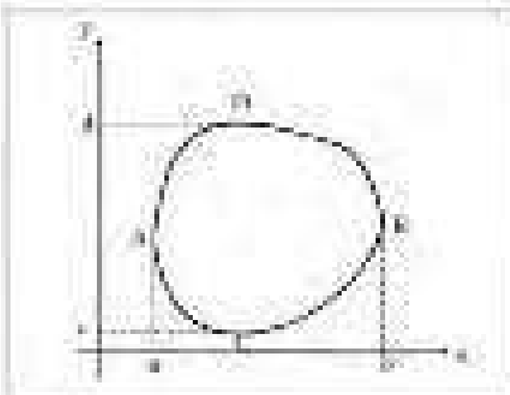


Gambar 1.10. Tafsiran IV Integral Lipat Dua

CONTOH 1.6

Tafsirkan D = {(x,y) : a ≤ x ≤ b, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$} =
{(x,y) : c ≤ y ≤ d, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$}

Penyelesaian:



Gambar 1.11 Daerah D dibatasi 4 lengkungan

Dari gambar di atas misalkan:

$y = g_1(x)$ adalah lengkungan ACB
$y = g_2(x)$ adalah lengkungan ADB
$x = h_1(y)$ adalah lengkungan CAD
$x = h_2(y)$ adalah lengkungan CBD

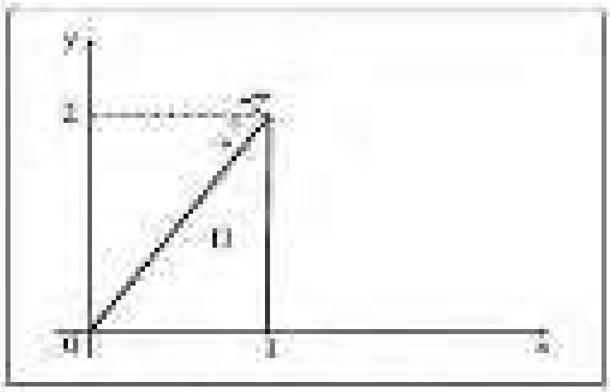
Maka tafsiran $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

atau $= \int_{y=c}^{d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

CONTOH 1.7

Tafsirkan $\iint_D f(x,y)dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = 2x$, $x = 1$ dan sumbu x.

Penyelesaian:



Gambar 1.12 Daerah D dibatasi y=2x, x=1 dan sumbu x

dengan mengganti $y = 2x$ menjadi $x = \frac{1}{2}y$

maka $\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{y=2x} f(x,y)\, dy\, dx$

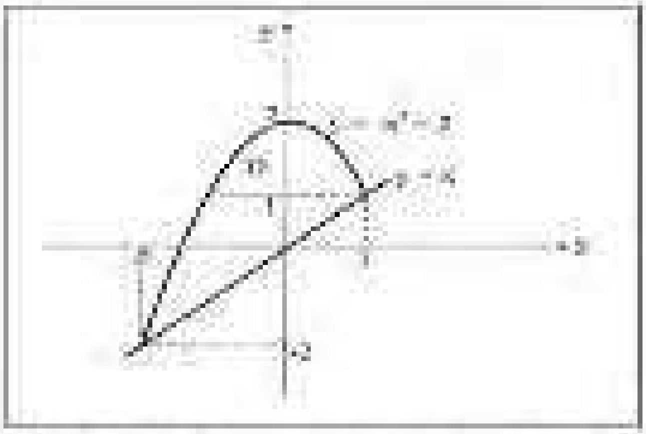
atau

$$= \int_0^2 \int_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} f(x,y)\, dx\, dy$$

CONTOH 1.8

Tafsirkan $\iint_D f(x,y)\,dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

Penyelesaian:



Gambar 1.13 Daerah D yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

Perpotongan $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

diperoleh $x = -x^2 + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

maka $x = 1$ dan $x = -2$

Dari persamaan $y = -x^2 + 2$ maka $x = \pm\sqrt{2-y}$

Jadi $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{1}\int_{x}^{-x^2+2} f(x,y)\,dy\,dx$

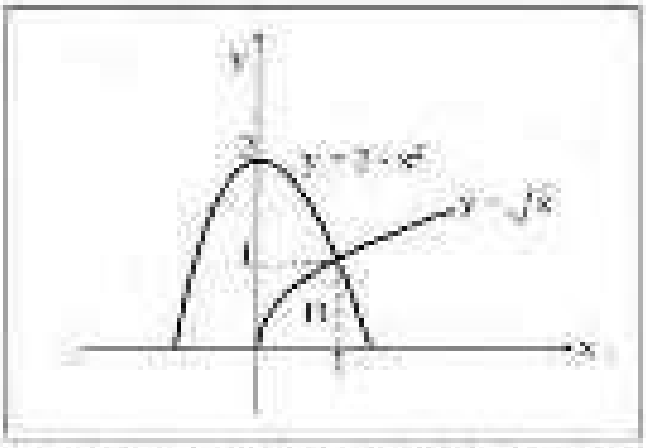
atau

$$= \int_{-2}^{1}\int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

CONTOH 1.9

Diketahui $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y}} 2x\,dx\,dy$. Ubahlah batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Penyelesaian :



Gambar 1.14 Daerah D yang dibatasi oleh y = 2 − x² dan y = √x

Perpotongan $y = 2 - x^2$ dan $y = \sqrt{x}$

adalah $\sqrt{x} = -x^2 + 2$

$x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$

$(x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 4) = 0$

maka $x = 1$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y}} 2x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{y=0}^{\sqrt{x}} 2x\,dy\right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_{y=0}^{2-x^2} 2x\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 [2xy]_{y=0}^{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} [2xy]_{y=0}^{2-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x\sqrt{x})\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2x(2-x^2))\,dx$$

$$= \int_0^1 2x^{3/2}\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} (4x - 2x^3)\,dx$$

$$= \left[2\tfrac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 + \left[2x^2 - \tfrac{1}{2}x^4\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{5} + \left[2(2-1) - \frac{1}{2}(4-1)\right]$$

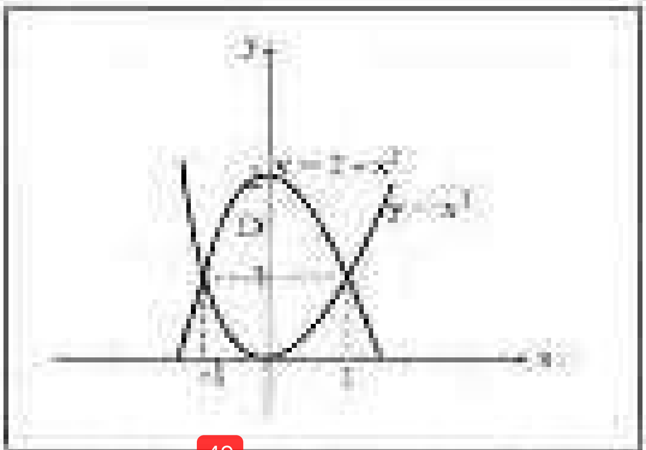
$$= \frac{4}{5} + \left[2 - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$$

CONTOH 1.10

Diketahui $\int_{-1}^{1}\int_{y=x^2}^{y=2-x^2} xy\ dy\ dx$. Ubahlah batas integral dan selesaikan integralnya.

Penyelesaian:



Gambar 1.15 Daerah D yang dibatasi oleh y = 2 - x² dan y = x²

Perpotongan $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

diperoleh $x^2 = -x^2 + 2$

$x^2 + x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 1$ maka $x = \pm 1$

Ubah persamaan lengkungan ke fungsi y, dimana

$y = 2 - x^2$ maka $x = \pm\sqrt{2 - y}$

$y = x^2$ maka $x = \pm\sqrt{y}$

$$\int_{-1}^{1}\int_{y=x^2}^{y=2-x^2} xy\ dy\ dx = \int_0^1 \left[\int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} xy\ dx\right] dy + \int_1^2 \left[\int_{x=-\sqrt{2-y}}^{x=\sqrt{2-y}} xy\ dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{x=-\sqrt{2-y}}^{x=\sqrt{2-y}} dy$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}y\,(y - y)\ dy + \int_1^2 \tfrac{1}{2}y\,((2-y) - (2-y))\ dy$$

$$= 0$$

1.3 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub (Polar)

Titik-titik di bidang dapat dinyatakan dalam koordinat Polar P(r,θ), dimana:

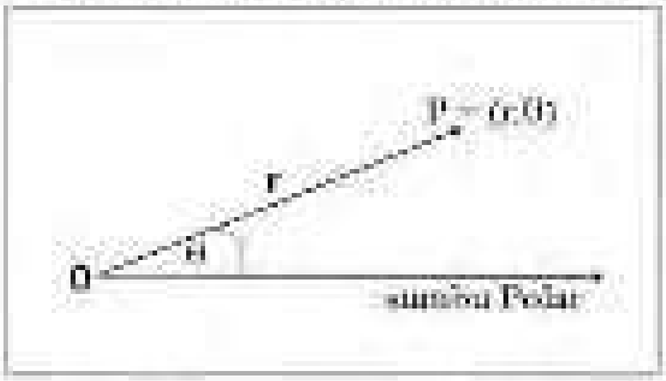
r = jarak titik O dengan P

θ = sudut antara sumbu polar dengan OP

Dengan batasan :

$r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ atau dengan arah negatif $-\pi \leq \theta \leq \pi$



Gambar 1.16 Koordinat Polar

Kaitan Koordinat Cartesian dan Koordinat Polar dijabarkan sebagai berikut. Dengan mengambil O sebagai titik polar dan sumbu x positif sebagai sumbu polar diperoleh hubungan (Samura & Pengantar, n.d.)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

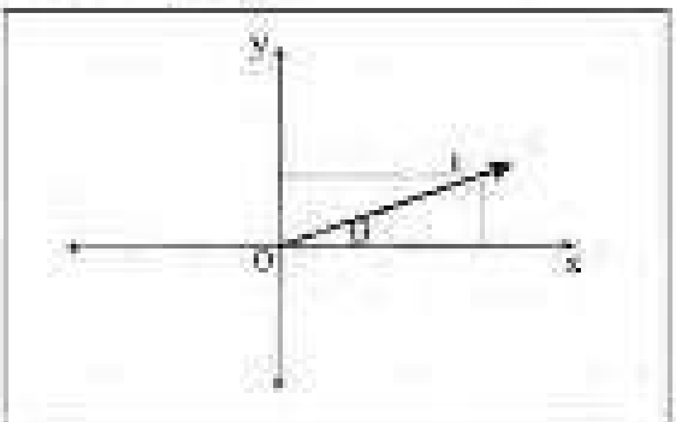
Determinan Matriks Jacobi:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

Dan $dA = J\, dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$ (arah θ berlawanan dengan arah jarum jam, $\theta = 0^\circ$ adalah sumbu x positif)

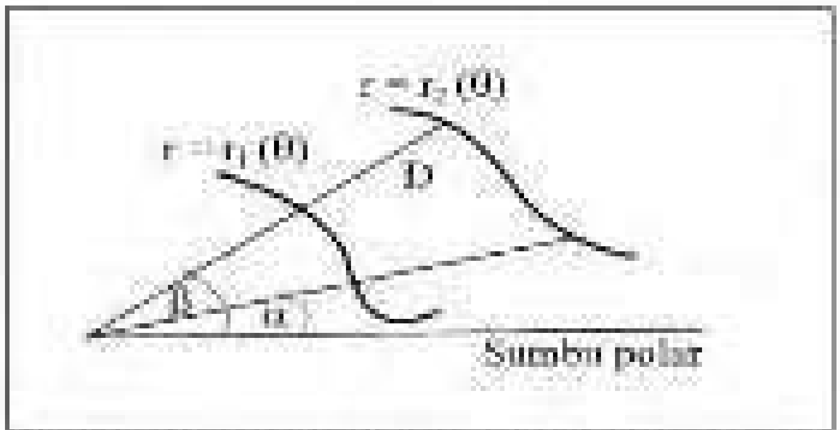


Gambar 1.17. Kaitan Koordinat Cartesian dengan Koordinat Polar

Definisi Integral Lipat Dua Koordinat Polar

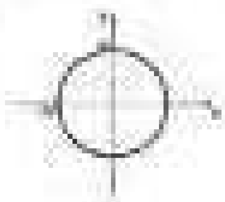
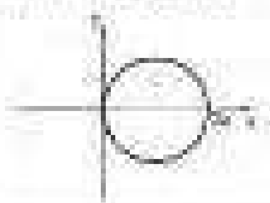
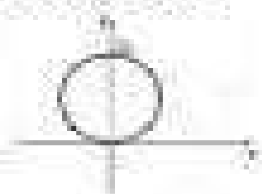
Jika D daerah yang dibatasi oleh $r = r_1(\theta)$ dan $r = r_2(\theta)$ dengan $\theta = \alpha$ sampai $\theta = \beta$, maka rumusan integral lipat dua dalam koordinat Polar adalah :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$



Gambar 1.18 Tafsiran Integral lipat dua Koordinat Polar (Wahyuni, 2017)

1.3.1 Beberapa Daerah D yang Berhubungan dengan Koordinat Polar

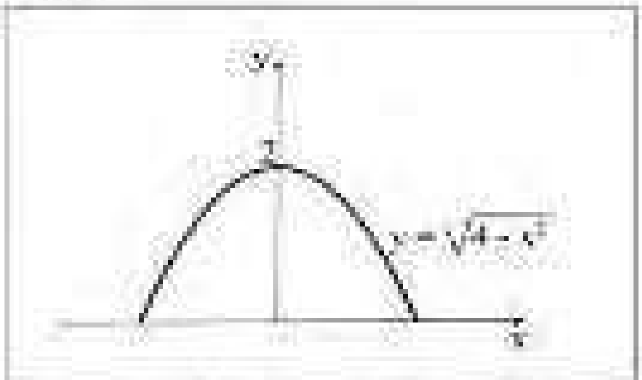
Koordinat Kartesian	Koordinat Polar
Lingkaran : $x^2 + y^2 = a^2$ Pusat (0,0) dan jari-jari = a 	$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = a^2$ $r = a$
Lingkaran : $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ Pusat (a,0) dan jari-jari a 	$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2ar\cos\theta = 0$ $r = 2a\cos\theta$
Lingkaran : $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ Pusat (0,a) dan jari-jari a 	$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2ar\sin\theta = 0$ $r = 2a\sin\theta$

Gambar 1.10 Gambar-gambar yang berhubungan dengan koordinat Polar

CONTOH 1.11

Hitung $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y=\sqrt{4-x^2}$ dan $y=0$.

Penyelesaian:



Gambar 1.20 Daerah D yang dibatasi oleh y = √(4 - x²) dan y = 0

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r=2} r\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r=2} r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{2} d\theta$$

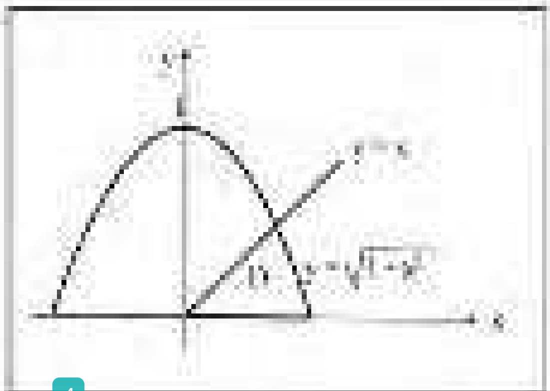
$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\frac{8}{3}\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

CONTOH 1.12

Hitung $\iint_D xy\,dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$.

Penyelesaian :



Gambar 1.21 Daerah D yang dibatasi $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$

$$\iint_D xy\,dA = \int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{1}(r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right]\left[\int_{r=0}^{1} r^3\,dr\right]$$

$$= \left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d(\sin\theta)\right]\left[\int_{r=0}^{1} r^3\,dr\right]$$

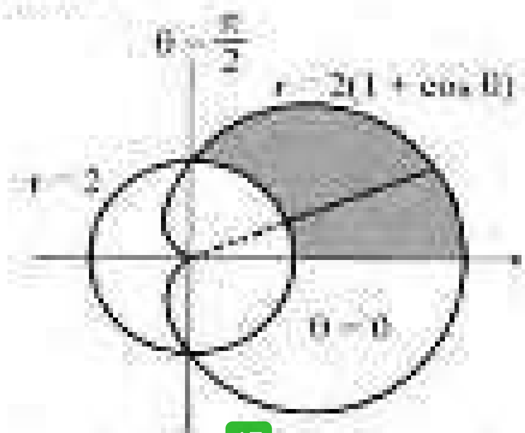
$$= \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

CONTOH 1.13

Hitunglah $\iint_D 3y \, dA$ jika D daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam kardioda $r = 2(1 + \cos\theta)$

Penyelesaian:



Gambar 1.22 D daerah di luar r = 2 dan di dalam r = 2(1 + cos θ)

Karena D adalah himpunan sederhana lingkaran r, sehingga soal di atas dapat ditulis sebagai integral lipat dua dengan koordinat polar dimana r sebagai peubah pengintegralan sebelah dalam dari r = 2 sampai r =

$$
\begin{aligned}
\text{Maka } \iint_D 3y \, dA &= 3\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=2}^{r=2(1+\cos\theta)} (r\sin\theta)\, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^3 \sin\theta \, d\theta \,\Big]_2^{2(1+\cos\theta)} \\
&= 8\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[(1+\cos\theta)^3 \sin\theta - \sin\theta\right] d\theta \\
&= 8\left[-\tfrac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 + \cos\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= 22
\end{aligned}
$$

1.4 Aplikasi Integral Lipat Dua

1. Jika D daerah pada bidang XY maka luas D adalah (Mauch, 2002):

$$L = \iint_D dA\ ,\ f(x,y) = 1$$

2. Titik Pusat Massa

   Jika D daerah pada bidang XY dan ρ(x,y) rapat massa disetiap titik pada D, maka :

   - Massa D = $m = \iint_D \rho\, dA$
   - Momen massa [illegible]
     - Momen massa terhadap sumbu x ditulis $M_x = \iint_D y\,\rho\, dA$
     - Momen massa terhadap sumbu y ditulis $M_y = \iint_D x\,\rho\, dA$
   - Titik pusat massa = $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$

   [illegible]

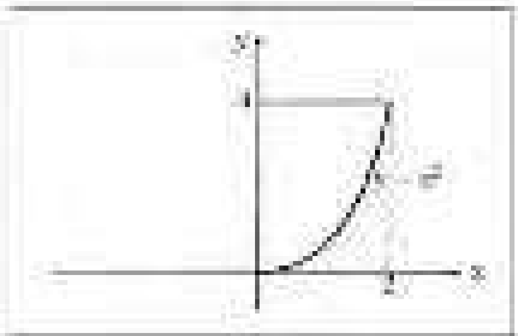
3. Momen Inersia adalah jarak kuadrat dari titik pusat massa ke sumbu

   - Momen inersia terhadap sumbu x ditulis $I_x = \iint_D y^2\,\rho\, dA$
   - Momen inersia terhadap sumbu y ditulis $I_y = \iint_D x^2\,\rho\, dA$
   - Momen inersia terhadap sumbu z ditulis $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,\rho\, dA$
     $= I_x + I_y$

CONTOH 1.14

Hitung luas daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gumbar 1.23 Daerah D dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran I.

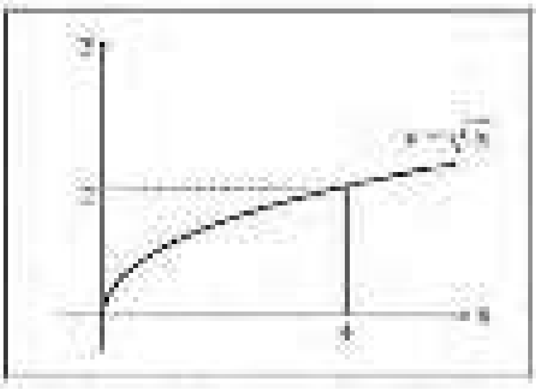
$$
\begin{aligned}
\text{Luas } D = \iint_D dA &= \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{4} dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{2} [y]_{x^2}^{4}\, dx \\
&= \int_{x=0}^{2} (4 - x^2)\, dx \\
&= \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 \\
&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ satuan luas}
\end{aligned}
$$

CONTOH 1.15

Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, tentukan :

a. Massa lamina
b. Titik pusat massa
c. Momen Inersia I_x, I_y dan I_0

Penyelesaian :



Gambar 1.24 Daerah D dibatasi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$

a. Massa lamina = $m = \iint_D \rho(x,y)\, dA = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy\, dy\, dx$

$$= \int_{x=0}^{4} x \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x \left(\frac{1}{2} x\right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{2} x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{6} x^3\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3}$$

b. $M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA$

$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x\,(xy)\,dy\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} x^2 [\frac{1}{2} y^2]_0^{\sqrt{x}}\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{2} x^2 x\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{2} x^3\,dx$

$= [\frac{1}{8} x^4]_0^4$

$= 32$

$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA$

$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\,(xy)\,dy\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x\,y^2\,dy\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} x\,[\frac{1}{3} y^3]_0^{\sqrt{x}}\,dx$

$= \int_{x=0}^{4} \frac{1}{3} x^{5/2}\,dx$

$= [\frac{2}{21} x^{7/2}]_0^4$

$= \frac{256}{21}$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{32}{(\frac{32}{3})} = 3$

$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256}{21} / (\frac{32}{3}) = \frac{8}{7}$

Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, \frac{8}{7})$

c. Momen-momen inersia

- $I_x = \iint_D y^2\, \rho(x,y)\, dA$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y^2\, (xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x\, y^3\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x \left[\tfrac{1}{4} y^4\right]_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \tfrac{1}{4} x^3\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{16} x^4\right]_0^4$$

$$= 16$$

- $I_y = \iint_D x^2\, \rho(x,y)\, dA$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^2\, (xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^3\, y\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} x^3 \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} \tfrac{1}{2} x^4\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_0^4$$

$$= \frac{512}{5}$$

- $I_0 = I_x + I_y$

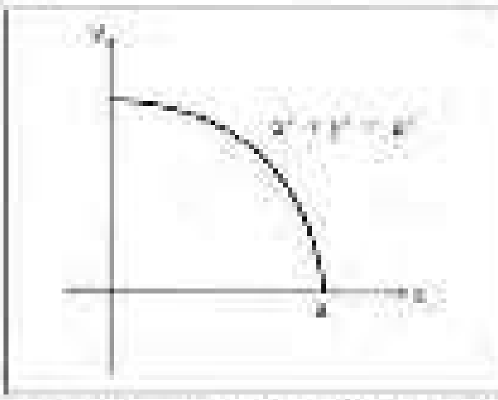
$$= 16 + \frac{512}{5} = \frac{592}{5}$$

CONTOH 1.16

Jika D lamina yang berbentuk seperempat lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y)$ sebanding dengan jarak titik (x,y) ke pusat lingkaran. Tentukan :

a. Massa lamina
b. Titik pusat massa
c. Momen Inersia I_x, I_y dan I_z.

Penyelesaian:



Gambar 1.25 Daerah D dibatasi $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I

a. Rapat massa $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$; k konstanta

Massa lamina $= m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$

$$= \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\, dA \quad \text{(gunakan koordinat Polar)}$$

$$= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r\, r\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^2\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \left(\int_{r=0}^{a} r^2\, dr\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}k\frac{1}{3}r^3\Big|_0^a$$

$$= \frac{\pi k}{6}a^3$$

b. $$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA \\ &= \iint_D x\,k\sqrt{x^2+y^2}\,dA \\ &= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}(r\cos\theta)\,r\,r\,dr\,d\theta \\ &= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^3\cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= k\left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right]\left[\int_{r=0}^{a} r^3\,dr\right] \\ &= k\,[\sin\theta]_0^{\pi/2}\,\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^a \\ &= \tfrac{1}{4}ka^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA \\ &= \iint_D y\,k\sqrt{x^2+y^2}\,dA \\ &= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}(r\sin\theta)\,r\,r\,dr\,d\theta \\ &= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^3\sin\theta\,dr\,d\theta \\ &= k\left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\right]\left[\int_{r=0}^{a} r^3\,dr\right] \\ &= k\,[-\cos\theta]_0^{\pi/2}\,\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^a \\ &= \tfrac{1}{4}ka^4 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{4}ka^4}{\frac{k\pi}{6}a^3} = \frac{3a}{2\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}ka^4}{\frac{k\pi}{6}a^3} = \frac{3a}{2\pi}$$

Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi}\right)$

c. Momen-momen Inersia

- $I_x = \iint_S y^2\,\rho(x,y)\,dA$

  $= \iint_S y^2\,k\sqrt{x^2+y^2}\;dA$

  $= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}(r\sin\theta)^2\,r\,r\,dr\,d\theta$

  $= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^4\sin^2\theta\;dr\,d\theta$

  $= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\left(\int_{r=0}^{a} r^4\;dr\right)$

  $= k\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^a$

  $= \frac{1}{20}\,k\pi a^5$

- $I_y = \iint_S x^2\,\rho(x,y)\,dA$

  $= \iint_S x^2\,k\sqrt{x^2+y^2}\;dA$

  $= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}(r\cos\theta)^2\,r\,r\,dr\,d\theta$

  $= k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^4\cos^2\theta\;dr\,d\theta$

  $= k\left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\right]\left[\int_{r=0}^{a} r^4\;dr\right]$

  $= k\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^a$

  $= \frac{1}{20}\,k\pi a^5$

- $I_z = I_x + I_y$

  $= \frac{1}{20}\,k\pi a^5+\frac{1}{20}\,k\pi a^5$

  $= \frac{1}{10}\,k\pi a^5$

CONTOH 1.17

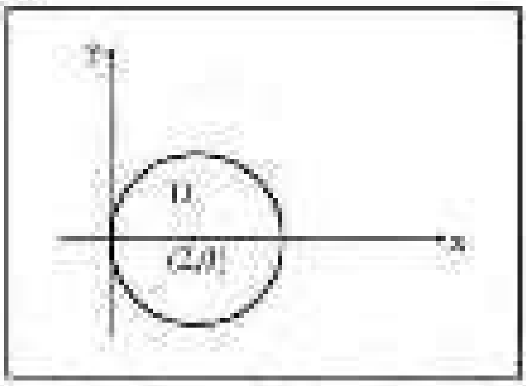
Jika D daerah yang dibatasi oleh lingkaran $(x-2)^2+y^2=$ 4. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y)=k(x^2)$. Tentukan :

a. $\iint_D g(x,y)\,dA$, dimana $g(x,y)=3y$

b. Massa lamina

c. Momen Inersia I_x

Penyelesaian :



Gambar 1.26. Daerah D dibatasi $(x-2)^2+y^2=4$

a. $\iint_D g(x,y)\,dA$, dimana $g(x,y)=3y$

Karena D simetri di kuadran pertama (D_1) dan di kuadran keempat (D_2), maka dapat ditulis $D=D_1\cup D_2$

$$
\begin{aligned}
\iint_D 3y\,dA &= 2\iint_{D_1} 3y\,dA \\
&= 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4\cos\theta} 3\,r\sin\theta\; r\,dr\,d\theta \\
&= 6\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{r=0}^{4\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right]d\theta \\
&= 6\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^{4\cos\theta}\sin\theta\,d\theta \\
&= 2\int_{\theta=0}^{\pi/2} 64\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta \\
&= 128\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^3\theta\; d(-\cos\theta) \\
&= -128\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^3\theta\; d(\cos\theta) \\
&= -128\left[\left(\tfrac{1}{4}\right)\cos^4\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/2} \\
&= -32\left[\left(\cos^4\tfrac{\pi}{2}\right)-\left(\cos 0\right)\right] \\
&= -32(0-1) = 32
\end{aligned}
$$

b. Rapat massa $\rho(x,y) = kx^2$, k konstanta

Massa lamina $= m = \iint_S \rho(x,y)\, dA$

$= 2\iint_{S_1} kx^2\, dA$ (gunakan koordinat Polar)

$= 2k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4\cos\theta} r^2 \cos^2\theta \; r\, dr\, d\theta$

$= 2k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4\cos\theta} r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta$

$= 2k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{4\cos\theta} \cos^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2} k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[r^4\right]_{r=0}^{4\cos\theta} \cos^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2} k \int_{\theta=0}^{\pi/2} 256\cos^4\theta\, \cos^2\theta\, d\theta$

$= 128k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta$

Dengan menggunakan rumus reduksi:

$= 128k\left[\frac{1}{6}\sin\theta\cos^5\theta + \frac{5}{6}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta\right]$

$= \frac{64}{3} k \sin\theta\cos^5\theta + \frac{320}{3} k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$

$= \frac{64}{3} k \sin\theta\cos^5\theta + \frac{320k}{3}\left[\frac{1}{4}\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{4}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta\right]$

$= \frac{64}{3} k \sin\theta\cos^5\theta + \frac{80k}{3}\sin\theta\cos^3\theta + 80k \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$

$= \left[\frac{64}{3} k \sin\theta\cos^5\theta + \frac{80k}{3}\sin\theta\cos^3\theta + 40k\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\pi/2}$

$= 20k\pi$

c. Momen inersia terhadap sumbu z

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iint_R (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dA \\
&= 2\iint_{R_1} (x^2+y^2)\,k\,x^2\,dA \\
&= 2k\iint_{R_1} (x^2+y^2)\,x^2\,dA \\
&= 2k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4\cos\theta} r^2\,r^2\cos^2\theta\; r\,dr\,d\theta \\
&= 2k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4\cos\theta} r^5\cos^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= 2k\int_{\theta=0}^{\pi/2} \tfrac{1}{6} r^6\Big|_{r=0}^{r=4\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{3}k\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\,r^6\,\right]_{r=0}^{r=4\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{3}k\int_{\theta=0}^{\pi/2} [\,4096\cos^6\theta\,]\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \tfrac{4096}{3}k\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^8\theta\,d\theta \\
&= \tfrac{4096}{3}k\left[\tfrac{1}{8}\sin\theta\cos^7\theta + \tfrac{7}{8}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta\right]
\end{aligned}
$$

Contoh menggunakan RUMUS REDUKSI untuk $\int \cos^n(x)dx$:

$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx + C$.

Maka:

$\int \cos^8\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\sin\theta\cos^7\theta + \frac{7}{8}\int \cos^6\theta\,d\theta + C$

$\int \cos^6\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\sin\theta\cos^5\theta + \frac{5}{6}\int \cos^4\theta\,d\theta + C$

$\int \cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{4}\int \cos^2\theta\,d\theta + C$

$\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\int d\theta + C = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta + C$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
\int \cos^8\theta\,d\theta &= \tfrac{1}{8}\sin\theta\cos^7\theta + \tfrac{7}{8}\left[\tfrac{1}{6}\sin\theta\cos^5\theta + \tfrac{5}{6}\left(\tfrac{1}{4}\sin\theta\cos^3\theta + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right)\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{8}\sin\theta\cos^7\theta + \tfrac{7}{8}\left[\tfrac{1}{6}\sin\theta\cos^5\theta + \tfrac{5}{24}\sin\theta\cos^3\theta + \tfrac{5}{16}\sin\theta\cos\theta + \tfrac{5}{16}\theta\right] \\
&= \tfrac{1}{8}\sin\theta\cos^7\theta + \tfrac{7}{48}\sin\theta\cos^5\theta + \tfrac{35}{192}\sin\theta\cos^3\theta + \tfrac{35}{128}\sin\theta\cos\theta + \tfrac{35}{128}\theta
\end{aligned}
$$

Jadi $\quad I_z \quad = \frac{560}{3}\,k\pi$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 2 dan pada pertemuan ke 3 diadakan Quiz di awal perkuliahan.

LATIHAN 1

1. Hitung integral lipat dua berikut:
   a. $\int_0^{[illegible]}\int_0^{[illegible]} (x^2 + xy)\,dx\,dy$
   b. $\int_0^{[illegible]}\int_{[illegible]}^{[illegible]} [illegible]\,dx\,dy$
2. Tentukanlah $\iint_D f(x,y)\,dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sin(x)$, $y = 0$, $x = 0$ dan $x = \pi/2$.
3. Hitung $\iint_D f(x,y)\,dA$, jika $f(x,y) = \frac{2}{1+x}$ dan D daerah yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = 4x - x^2$.
4. Hitung $\iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dA$, jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, dan $y = 0$ di kuadran pertama.
5. Tentukan $\iint_D xy^2\,dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $y = 0$ di kuadran pertama.
6. Tentukan $\iint_D (x - 2y)\,dA$ jika D daerah segitiga dengan titik-titik sudut (0,0), (0,4), dan (1,4).
7. Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = 0$ di kuadran I. Tentukan $\iint_D x\,dA$.
8. Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Tentukan $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$.
9. Diketahui D daerah yang terletak di luar $x^2 + y^2 = 1$ dan di dalam $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Tentukan $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA$.
10. Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 - 8y = 0$ dan di sebelah kanan sumbu y. Tentukan $\iint_D x\,dA$.
11. Diketahui D daerah yang dibatasi $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan di atas sumbu x. Tentukan:
    a. Luas daerah D
    b. Titik pusat massa D, jika rapat massa $\rho(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, k konstanta.

12. Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 - 4y = 0$ dan di kuadran I. Tentukan:
    a. Titik pusat massa D, jika rapat massa $\rho(x,y) = k$, k konstanta.
    b. Momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y.
13. Diketahui D daerah yang terletak di luar $x^2 + y^2 = 4$ dan di dalam $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Tentukan titik pusat massa D, jika rapat massa $\rho(x,y) = ky$, k konstanta.
14. Jika D lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y)$ sebanding dengan jarak titik ke pusat lingkaran. Tentukan
    a. Massa lamina
    b. Titik pusat massa
    c. Momen inersia I_x, I_y dan I_0
15. Jika D daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $y = x$ dan $y = -x$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y) = 8(x^2 + y^2)$.
    Tentukan :
    a. Massa D
    b. Momen inersia masing-masing [illegible]
    c. Titik pusat massa
    d. Momen inersia I_x, I_y dan I_0

BAB 2

INTEGRAL LIPAT TIGA

Capaian Pembelajaran:

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami benda-benda di ruang tiga dimensi
2. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat Cartesian
3. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat silinder
4. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi integral lipat tiga.

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari benda-benda di ruang dimensi tiga, pengertian dan definisi integral lipat tiga. Selanjutnya akan dipelajari integral lipat tiga dalam Koordinat Cartesian dan Koordinat Silinder. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat tiga untuk menentukan volume benda, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda.

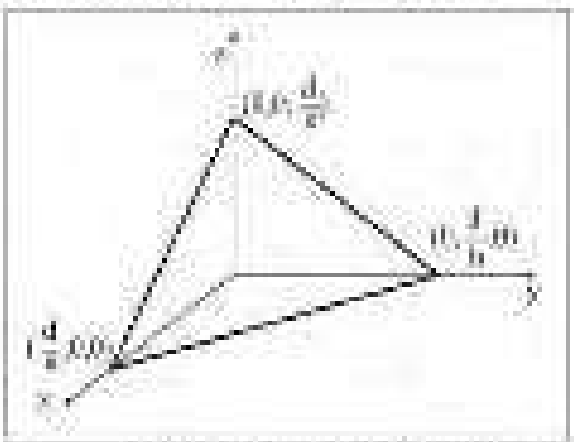
2.1 Gambar-gambar Bidang di Ruang Tiga Dimensi

Sebelum masuk ke pembahasan integral lipat tiga, kita harus mengetahui terlebih dahulu bentuk bidang yang digunakan dalam ruang berdimensi tiga. Beberapa bidang yang umumnya digunakan yaitu: (Wrede & Spiegel, n.d.)

1. Limas segitiga $ax + by + cz = d$, dimana a, b, c, d tidak sama dengan nol.

   Cara menggambar:

   - Perpotongan dengan sumbu $x \rightarrow y = z = 0 \rightarrow ax = d \rightarrow x = \frac{d}{a} \rightarrow (\frac{d}{a}, 0, 0)$
   - Perpotongan dengan sumbu $y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow by = d \rightarrow y = \frac{d}{b} \rightarrow (0, \frac{d}{b}, 0)$
   - Perpotongan dengan sumbu $z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow cz = d \rightarrow z = \frac{d}{c} \rightarrow (0, 0, \frac{d}{c})$



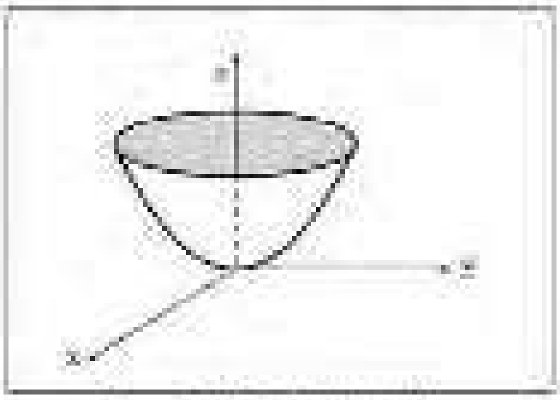
Gambar 2.1. Limas Segitiga

2. Paraboloida $z = x^2 + y^2$

   Cara menggambar:

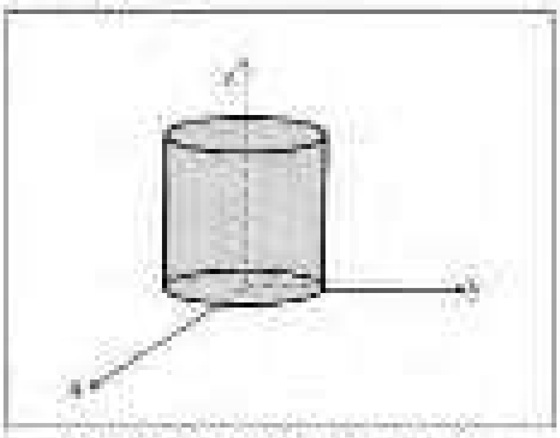
   Misal $x = 0 \rightarrow z = y^2$ (di bidang YOZ, berbentuk parabola)

   Misal $y = 0 \rightarrow z = x^2$ (di bidang XOZ, berbentuk parabola)



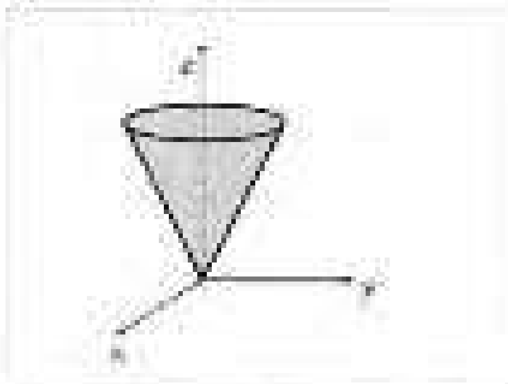
Gambar 2.2 Paraboloida

3. Silinder / Tabung $x^2 + y^2 = r^2$



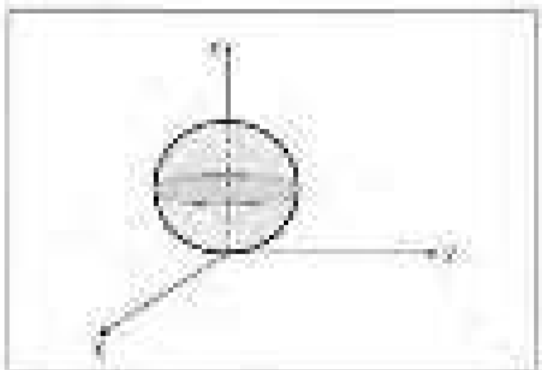
Gambar 2.3. Tabung / silinder

4. Kerucut Tegak $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Gambar 2.4. Kerucut tegak

5. Bola $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

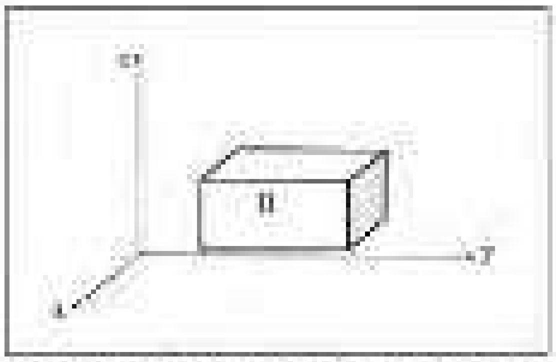


2.1.1 Konsep Integral Lipat Tiga

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan integral lipat dua dapat diperluas dengan cara yang alamiah menjadi integral lipat tiga atau bahkan menjadi integral lipat n.

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang dibatasi oleh beberapa permukaan. Jika f(x, y, z) suatu fungsi yang bekerja pada B maka integral lipat tiga dari fungsi f atas B ditulis

$\iiint_B f(x,y,z)dV$ dimana dV = differensial elemen volume



Gambar 2.6 Konsep Integral Lipat Tiga

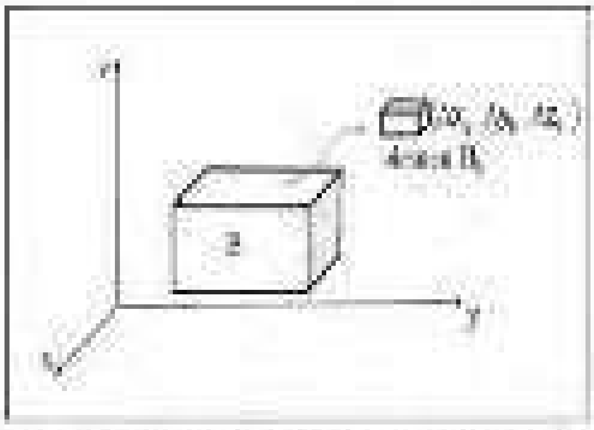
2.1.2 Definisi Integral Lipat Tiga

Bagi daerah B atas daerah-daerah kecil B_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ yang berbentuk paralelepipedium (kotak) yang sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu x, y dan z. Misalkan volume B_k adalah ΔV_k dan ambil titik (x_k, y_k, z_k) dalam B_k. Kemudian bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k.$$

Sebut |P| = panjang diagonal terpanjang dari semua B_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

> Definisi Integral Lipat Tiga
>
> Jika $\lim_{\substack{|P| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$ ada dan didefinisikan
>
> $\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{\substack{|P| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$. Maka f dikatakan terintegralkan pada B



Gambar 2.7 Definisi Integral Lipat Tiga

2.1.3 Eksistensi Integral Lipat Tiga

Jika f kontinu dan terbatas pada B maka $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ ada.

Syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya fungsi f masih dapat diskontinu pada sejumlah berhingga permukaan licin sehingga dapat terdiferensial. Pembahasan selanjutnya hanya difokuskan pada f

CONTOH 2.1

Jika diketahui $f(x,y,z) = x^2yz$ dan $B = \{(x,y,z) : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2\}$. Karena f kontinu pada B maka $\iiint_B x^2yz\,dV$ ada.

2.1.4 Sifat-sifat Integral Lipat Tiga

Beberapa sifat penting yang dipenuhi integral lipat tiga yaitu:

1. $\iiint_B [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\,dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dV + \iiint_B g(x,y,z)\,dV$
2. $\iiint_B a\,f(x,y,z)\,dV = a\iiint_B f(x,y,z)\,dV$

3. Untuk B_1 dan B_2 yang memenuhi $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ permukaan, maka

   $\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_{B_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{B_2} f(x,y,z)\,dV$

4. Jika $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ untuk setiap (x,y,z) anggota B, maka

   $$\iiint_B f(x,y,z)\,dV \le \iiint_B g(x,y,z)\,dV$$

CONTOH 2.2

$$\iiint_B (4z^2 + 3y)\,dV = \iiint_B 4z^2\,dV + \iiint_B 3y\,dV$$

CONTOH 2.3

Jika $B = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 4\}$.

Misalkan $B_1 = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2\}$ dan

$B_2 = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 2 \le z \le 4\}$

Maka $\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_{B_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{B_2} f(x,y,z)\,dV$

CONTOH 2.4

Jika $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan $g(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ dan $B = \{(x,y,z) : -2 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$. Karena $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ untuk setiap $(x,y,z) \in B$, maka $\iiint_B f(x,y,z)\,dV \le \iiint_B g(x,y,z)\,dV$.

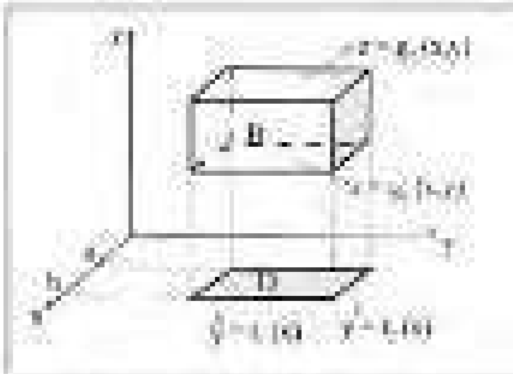
2.2 Integral Lipat Tiga Koordinat Kartesian

Misalkan B suatu daerah di ruang yang dibatasi di atas oleh permukaan $z = g_2(x,y)$ dan di bawah oleh $z = g_1(x,y)$. Misalkan D adalah proyeksi B pada bidang XY, maka

$\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ dapat ditafsirkan sebagai berikut

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Integral di ruas kanan adalah integral berulang, dimana yang pertama diintegralkan terhadap z dan kemudian integral lipat dua seperti yang telah dipelajari pada bab I. Untuk selanjutnya tanda kurung dalam integral berulang dihapuskan dan integral yang paling dalam dikerjakan terlebih dahulu. (Kreyszig, 2014)



Gambar 2.8 Tafsiran Integral Lipat Tiga (Kreyszig, 2006)

Misalkan B daerah yang dibatasi oleh bidang-bidang $x = a$, $x = b$, $y = t_1(x)$, $y = t_2(x)$ dan permukaan $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$.

Jadi $B = \{(x, y, z) : a \le x \le b,\ t_1(x) \le y \le t_2(x),\ g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$ dan $D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ t_1(x) \le y \le t_2(x)\}$ adalah proyeksi B terhadap bidang XY.

Maka tafsiran integral lipat tiga

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{y=t_1(x)}^{y=t_2(x)} \int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

CONTOH 2.5

Selesaikan integral berulang $\int_{-2}^{8}\int_{y=0}^{y=3x}\int_{z=y}^{z=x+2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

Penyelesaian :

$$\int_{-2}^{8}\int_{y=0}^{y=3x}\int_{z=y}^{z=x+2} 4\,dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{8}\int_{y=0}^{y=3x}\left(\int_{z=y}^{z=x+2} 4\,dz\right)dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{8}\int_{y=0}^{y=3x} [4z]_{z=y}^{z=x+2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{8}\int_{y=0}^{y=3x} (4x-4y+8)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{8}[4xy-2y^2+8y]_{y=0}^{3x}\,dx$$

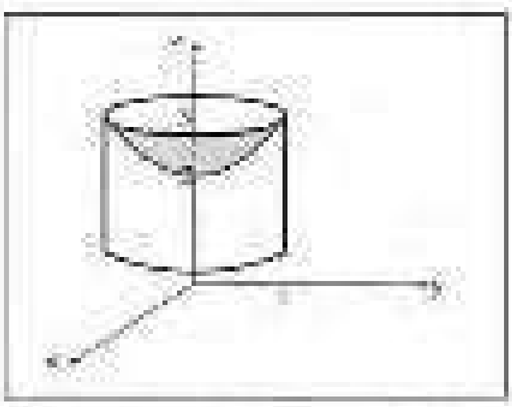
$$= \int_{-2}^{8}[4x(3x)-2(3x)^2+8(3x)]\,dx$$

$$\int_{-2}^{8}[-6x^2+24x]\,dx = -14$$

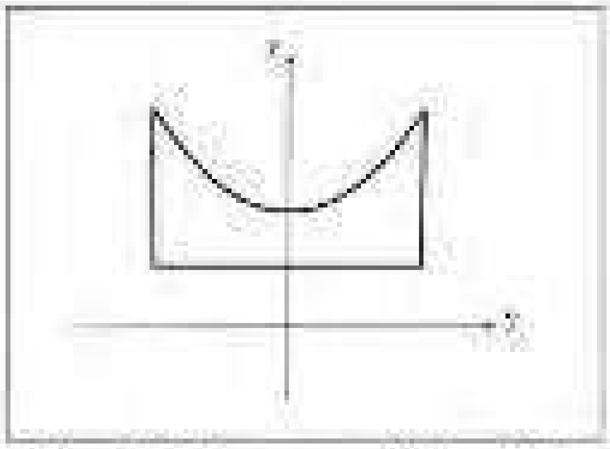
CONTOH 2.6

Tafsirkan $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ dimana B daerah yang dibatasi oleh $z=1$, $z=2+x^2+y^2$ dan $x^2+y^2=1$

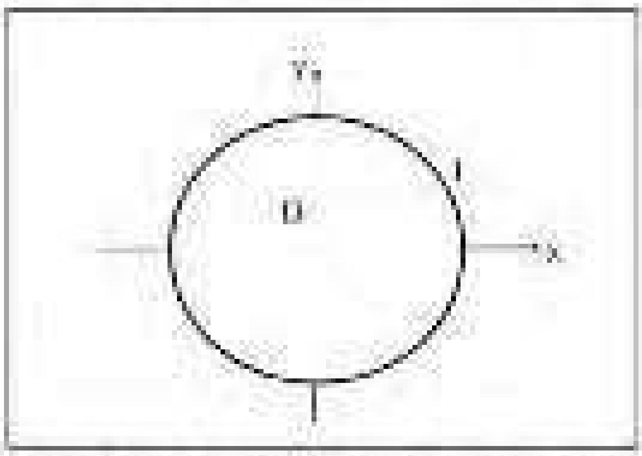
Penyelesaian.



Gambar 2.9 B dibatasi oleh $z=1$, $z=2+x^2+y^2$ dan $x^2+y^2=1$



Gambar 2.10 Penampang di bidang YZ



Gambar 2.11 Proyeksi B terhadap bidang XY

$B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}$

dan proyeksi B terhadap bidang XY adalah $B_{xy} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Jadi

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \iint_{B_{xy}} \int_{1}^{2+x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dA$$

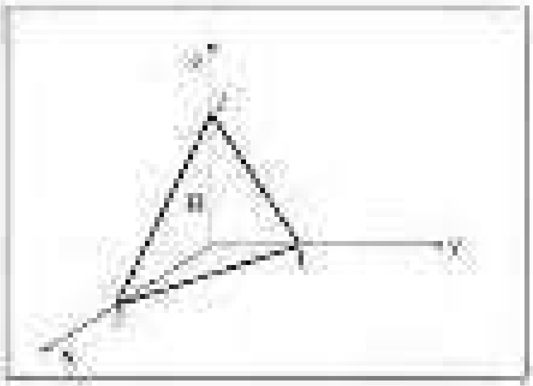
$$= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=1}^{2+x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [-6x^2 + 24x]\, dx = -14$$

CONTOH 2.7

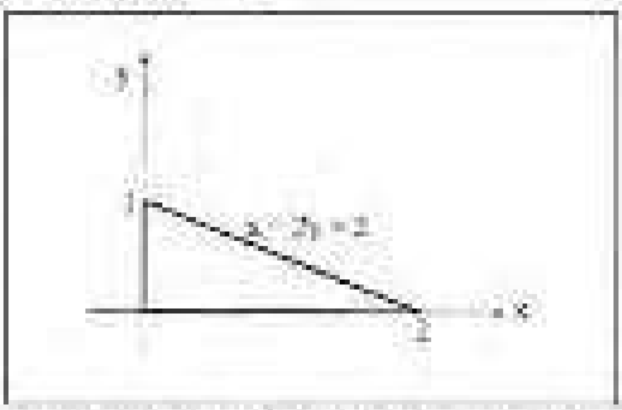
Tentukan $\iiint_B f(x)\, dV$ jika B daerah yang dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 2.12 B dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Proyeksi B pada bidang XY adalah daerah D yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$ dan $x + 2y = 2$



Gambar 2.13 D dibatasi $x + 2y = 2$, $x = 0$, $y = 0$

Jadi

$$\iiint_S (2x)\, dV = \iint_R \int_{z=0}^{z=2-x-2y} 2x \; dz\, dA$$

$$= \iint_R \left[2xz\right]_{z=0}^{2-x-2y} dA$$

$$= \iint_R \left[2x(2-x-2y)\right] dA$$

$$= \iint_R \left[4x - 2x^2 - 2xy\right] dA$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1-\frac{1}{2}x} \left[4x - 2x^2 - 2xy\right] dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[4xy - 2x^2 y - xy^2\right]_0^{1-\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[4x\left(1-\frac{1}{2}x\right) - 2x^2\left(1-\frac{1}{2}x\right) - x\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[4x - 2x^2 - 2x^2 + x^3 - x + \frac{1}{2}x^3\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[3x - 4x^2 + \frac{3}{2}x^3\right] dx$$

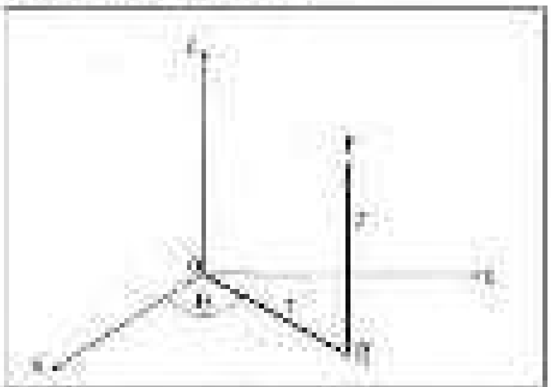
$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4\right]_{x=0}^{2}$$

$$= \frac{3}{2}.4 - \frac{4}{3}.8 + \frac{3}{8}.16$$

$$= 6 - \frac{32}{3} + 6 = \frac{4}{3}$$

2.3 Integral Lipat Tiga Dalam Koordinat Silinder/ Tabung

Ketika sebuah benda B dalam ruang berdimensi tiga mempunyai sebuah sumbu simetri, maka perhitungan integral lipat tiga atas B sering dipermudah dengan menggunakan koordinat silinder. (Kreyszig, 2013)



Gambar 2.14 Koordinat Silinder

Jika P suatu titik di ruang dan P_1 proyeksi P pada bidang XY.

Sebut $OP_1 = r$ adalah jari-jari dan θ adalah sudut yang dibentuk OP_1 dengan sumbu x positif.

Maka koordinat silinder dari P adalah $P(r, \theta, z)$

Hubungan antara kordinat Kartesien dengan koordinat

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

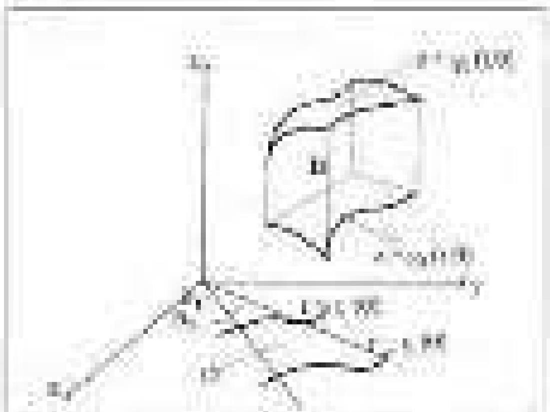
Dalam koordinat silinder $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$

Determinan Matriks Jacobi $|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

Sehingga $$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_{B'} f(r,\theta,z)\,|r|\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \iiint_{B'} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

Bila B daerah yang dibatasi di bawah oleh permukaan $z = g_1(r,\theta)$, di atas oleh permukaan $z = g_2(r,\theta)$, silinder-silinder $r = r_1(\theta)$, $r = r_2(\theta)$ dan bidang-bidang $\theta = \theta_1$ dan $\theta = \theta_2$



Gambar 2.15 Tafsiran Integral Lipat tiga Koordinat Silinder

Maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

CONTOH 2.8

Tentukan koordinat silinder dari titik $P(1,1,2)$

Penyelesaian:

$r = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2}$

$\theta = arc\,tg\,\frac{y}{x} = arc\,tg\,1$ maka $\theta = \frac{\pi}{4}$

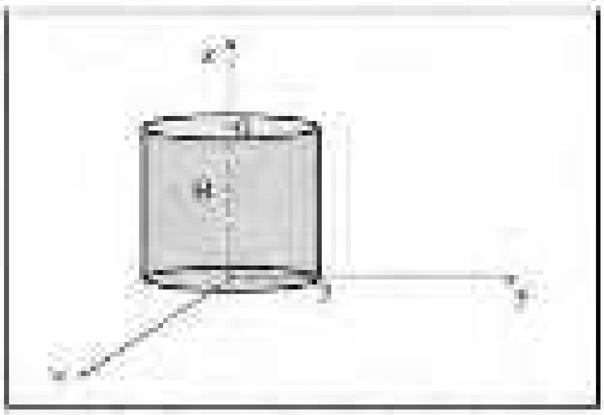
$z = 2$

Maka $P(r,\theta,z) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 2)$

CONTOH 2.9

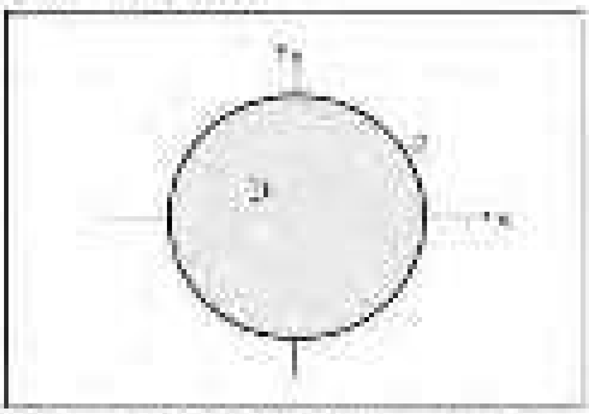
Tentukan $\iiint_B dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ bidang $z = 0$, $z = 6$

Penyelesaian



Gambar 2.16 B dibatasi $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah



Gambar 2.17 D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$\iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{6} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}[rz]_{z=0}^{6}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2} 6r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}[3r^2]_{r=0}^{2}\,d\theta$$

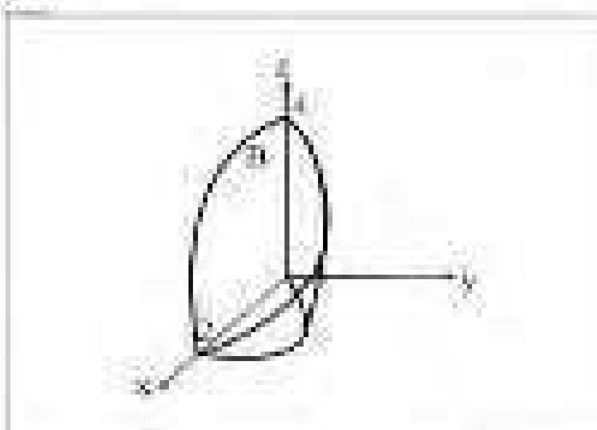
$$= 12\,(2\pi)$$

$$= 24\pi$$

CONTOH 2.10

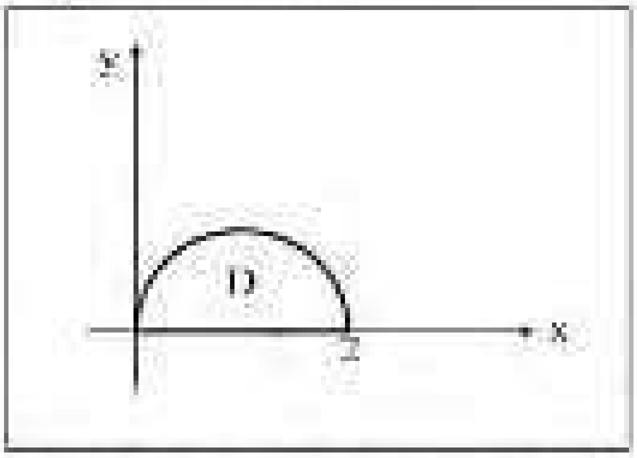
Tentukan $\iiint_B 2xy\,dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ dan $y = 0$ di oktan pertama.

Penyelesaian:



Gambar 2.15 B dibatasi $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ & $y = 0$ di oktan I.

Proyeksi E terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.19 D dibatasi $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$ di kuadran I

Dari permusaan di atas diperoleh

$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow (x^2 - 2x) + y^2 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

maka $r = 2\cos\theta$

Jadi

$$\iiint_E xyz\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=r^2}^{[illegible]} r\cos\theta\, r\sin\theta\, z\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=r^2}^{z=2} r^3\cos\theta\sin\theta\, z\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} (r^3\cos\theta\sin\theta)\left(4 - r^4\right)\frac{1}{2}\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} (\cos\theta\sin\theta)\left(4r^3 - r^7\right) dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta\sin\theta)\left(r^4 - \frac{1}{8}r^8\right)\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\sin\theta)\left(16\cos^4\theta - \frac{64}{8}\cos^8\theta\right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(16\cos^5\theta - \frac{64}{8}\cos^9\theta\right) d(-\cos\theta)$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(16\cos^5\theta - \frac{64}{8}\cos^9\theta\right) d(\cos\theta)$$

$$= -2\left[\frac{16}{6}\cos^6\theta - \frac{64}{80}\cos^{10}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

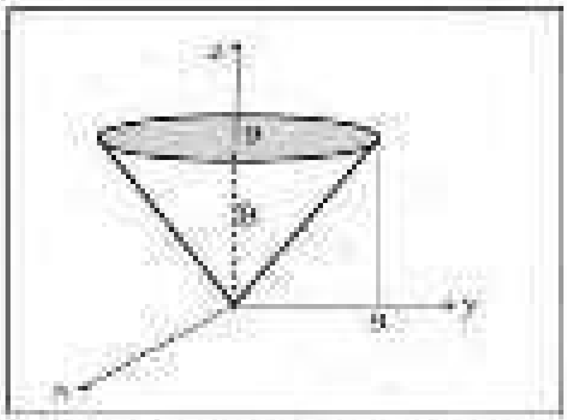
CONTOH 2.11

Tentukan $\iiint_B x^2 y \, dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, dan $z = 9$.

Penyelesaian:

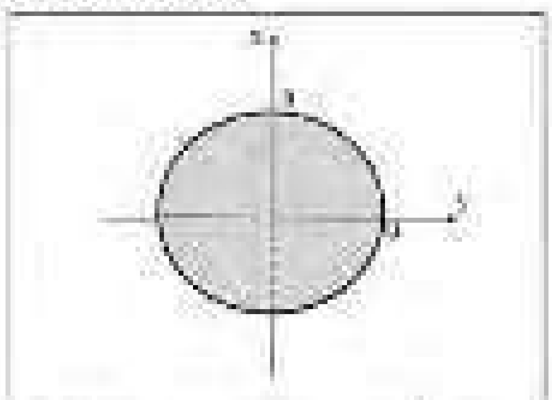
Perpotongan $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ dan $z = 9$

Diperoleh $r = 9$



Gambar 2.20 B dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, dan $z = 9$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.21 D dibatasi oleh $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 9$

Maka

$\iiint_E x^2 y \, dV = \iint_R \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{9} x^2 y \, dV$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \int_{z=r}^{9} r^2 \cos^2\theta \, r \sin\theta \, r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \int_{z=r}^{9} r^4 \cos^2\theta \sin\theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= [\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \,][\int_{r=0}^{9} \int_{z=r}^{9} r^4 \, dz \, dr]$$

$$= [\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d(-\cos\theta)\,][\int_{r=0}^{9} r^4 \, z]_{z=r}^{9} \, dr]$$

$$= -[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d(\cos\theta)\,][\int_{r=0}^{9} r^4 (9-r) \, dr]$$

$$= -[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d(\cos\theta)\,][\int_{r=0}^{9} (9r^4 - r^5) \, dr]$$

$$= -[\tfrac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{2\pi} \, [\tfrac{9}{5} r^5 - \tfrac{1}{6} r^6]_{r=0}^{9}$$

$$= -[\tfrac{1}{3}(\cos^3 2\pi) - (\cos 0)] \, [\tfrac{9}{5}\, 9^5 - \tfrac{1}{6}\, 9^6]$$

$$= 0$$

2.4 Aplikasi Integral Lipat Tiga

1. Volume daerah R adalah : $V = \iiint_R dV$
2. Titik Pusat Massa

   Misalkan $\rho\,(x, y, z)$ rapat massa disetiap titik pada E, maka

   - Massa $E = m = \iiint_E \rho \, dV$
   - Momen massa (jarak linier titik pusat massa ke bidang).
     - Momen massa terhadap bidang yz ditulis $M_{yz} = \iiint_E x$

dV $\quad (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right)$

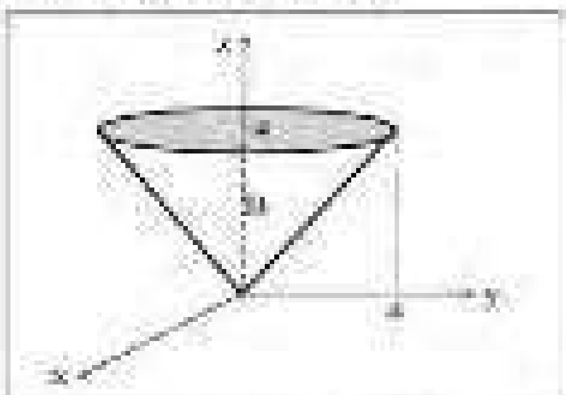
- Momen massa terhadap bidang yz ditulis $M_{yz} = \iiint_B \mu x \, dV$
- Momen massa terhadap bidang xz ditulis $M_{xz} = \iiint_B \mu y \, dV$

• Titik pusat massa =

CONTOH 2.17

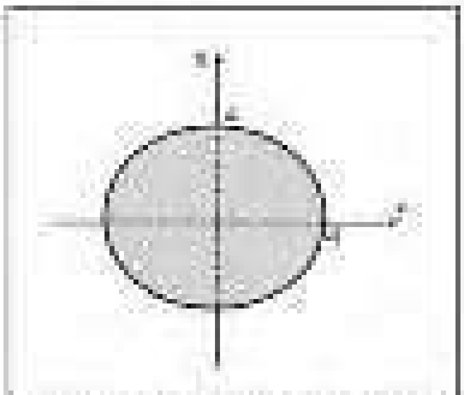
Jika B benda yang dibatasi oleh $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$ dan $z=4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $3\sqrt{(x^2+y^2)}$. Tentukan :

a. Volume B
b. Titik pusat massa B
c. Momen inersia terhadap sumbu z



Gambar 2.22 B **yang dibatasi oleh** $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$ **dan** $z=4$

Proyeksi U terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah.



Gambar 2.23. *D* dibatasi lingkaran dengan r = 4

a. Volume $B = V = \iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} r\,dz\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} [rz]_{z=r}^{4}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} (4r - r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{4}\,d\theta$$

$$= \frac{64}{3}\pi \text{ satuan volume}$$

b. Massa $= \iiint_B \rho\,dV$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} (3r)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} r^2\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} [r^2 z]_{z=r}^{4}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} (4r^2 - r^3)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{4}\,d\theta$$

$$= 128\pi$$

Karena B simetri terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$, jadi cukup dicari momen massa terhadap bidang xy

$$M_{xy} = \iiint_B \mu z \, dV = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} (3r) rz \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} r^2 z dz \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} [r^2 z^2]_{z=r}^{4} \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} (16r^2 - r^4) \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} [\frac{16}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5]_{r=0}^{4} \, d\theta$$

$$= \frac{2048}{5}\pi$$

maka

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = (\frac{16384\pi}{5}) / 128\pi = \frac{8}{5}$$

Jadi titik pusat massa = $(0, 0, \frac{8}{5})$

c. Momen inersia terhadap sumbu z

$$I_z = \iiint_B \rho (x^2 + y^2) \, dV = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} (3r) \, r^2 rz \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4} r^4 z \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} [r^4 z^2]_{z=r}^{4} \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{4} [16r^4 - r^6] \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2\pi \, [\frac{16}{5} r^5 - \frac{1}{7} r^7]_0^4$$

$$2.808,6\,\pi$$

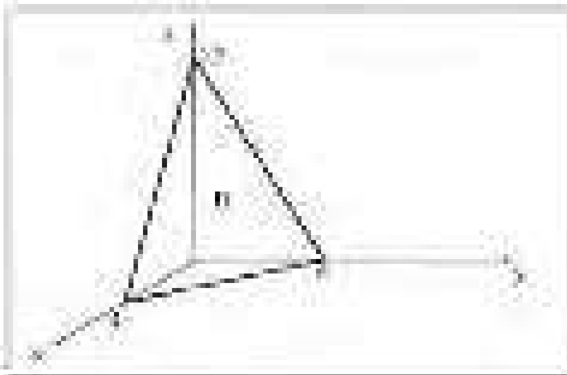
CONTOH 2.13

Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah k, k konstanta. Tentukan:

a. Volume B

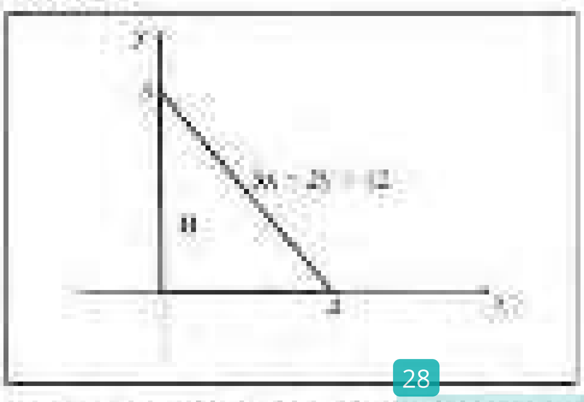
b. Momen inersia terhadap sumbu y

Penyelesaian:



Gambar 2.24. B dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah D yang diberikan pada gambar di bawah



Gambar 2.25. D dibatasi oleh $3x + 2y = 12$, sumbu x dan sumbu y

Untuk persamaan bidang $3x + 2y + z = 12$ maka $z = 12 - 3x - 2y$

Untuk proyeksi D: $3x + 2y = 12$ maka $y = 6 - \frac{3}{2}x$

c. Volume S = V $= \iiint_S dV = \iint_D \int_{z=0}^{z=12-3x-2y} dz\, dA$

$$= \int_0^4 \int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x} \int_{z=0}^{12-3x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x} [z]_{z=0}^{12-3x-2y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x} (12 - 3x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 [12y - 3xy - y^2]_0^{y=6-\frac{3}{2}x}\, dx$$

$$= \int_0^4 \left(12(6 - \tfrac{3}{2}x) - 3x(6 - \tfrac{3}{2}x) - (6 - \tfrac{3}{2}x)^2 \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(72 - 18x - (18x - \tfrac{9}{2}x^2) - (36 - 18x + \tfrac{9}{4}x^2) \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(72 - 18x - 18x + \tfrac{9}{2}x^2 - 36 + 18x - \tfrac{9}{4}x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(36 - 18x + \tfrac{9}{4}x^2 \right) dx$$

$$= 36x - 9x^2 + \tfrac{3}{4}x^3]_0^4$$

$$= 36.4 - 9.16 + \tfrac{3}{4}.64$$

$= 48$ satuan volume

c. Momen inersia terhadap sumbu y:

$I_y = \iiint_B \rho\,(x^2+z^2)\,dV$

$= \iiint_B \lambda\,(x^2+z^2)\,dV$

$= k\iiint_B (x^2+z^2)\,dV$

$= k\iint_D \int_{z=0}^{z=12-3x-2y}(x^2+z^2)\,dz\,dA$

$= \int_0^4\int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x}\int_{z=0}^{12-3x-2y}(x^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_0^4\int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x}\left(x^2z+\frac{1}{3}z^3\right)_{z=0}^{12-3x-2y}dy\,dx$

$= \int_0^4\int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x}\left(x^2(12-3x-2y)+\frac{1}{3}(12-3x-2y)^3\right)dy\,dx$

$= \int_0^4\int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x}\left(12x^2-3x^3-2x^2y+\frac{1}{3}(1728-1296x-816y+88y^2+\right.$

$324x^2+432xy-36xy^2-54x^2y-$

$\left.27x^3)dydx\right)$

$= \int_0^4\int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x}\left(12x^2-3x^3-2x^2y+576-432x-272y+\frac{88}{3}y^2+\right.$

$\left.108x^2+144xy-12xy^2-18x^2y-9x^3)dydx\right)$

$= \int_0^4\int_{y=0}^{y=6-\frac{3}{2}x}\left(120x^2-12x^3-20x^2y+576-432x-272y+\frac{88}{3}y^2+\right.$

$\left.144xy-8xy^2)dydx\right)$

$= \int_0^4\left(120x^2y-12x^3y-10x^2y^2+576y-432xy-136y^2+\frac{88}{9}y^3+\right.$

$\left.72xy^2-\frac{8}{3}xy^3)\Big|_{y=0}^{6-\frac{3}{2}x}\right)dx$

$$=\int_0^4 \Big(120x^2(6-\tfrac{3}{2}x) - 12x^3(6-\tfrac{3}{2}x) - 10x^2(6-\tfrac{3}{2}x)^2 + 576(6-\tfrac{3}{2}x) -$$
$$432x(6-\tfrac{3}{2}x) - 180x(6-\tfrac{3}{2}x)^2 - \tfrac{10}{3}(6-\tfrac{3}{2}x)^3 +$$
$$70x(6-\tfrac{3}{2}x)^2 - \tfrac{2}{3}x(6-\tfrac{3}{2}x)^3 \Big)\, dx$$

$$=\int_0^4 \Big(672 - 14688x - 330x^2 - \tfrac{135}{8}x^3 + \tfrac{5}{2}x^4 \Big)\, dx$$

$$=672x - 7344x^2 - 110x^3 - \tfrac{135}{32}x^4 + \tfrac{1}{18}x^5 \Big|_0^4$$

$$= 672(4) - 7344(4)^2 - 110(4)^3 - \tfrac{135}{32}(4)^4 + \tfrac{1}{18}(4)^5$$

$$= -133427,4$$

CONTOH 2.14

Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\frac{k}{x^2+y^2}$.

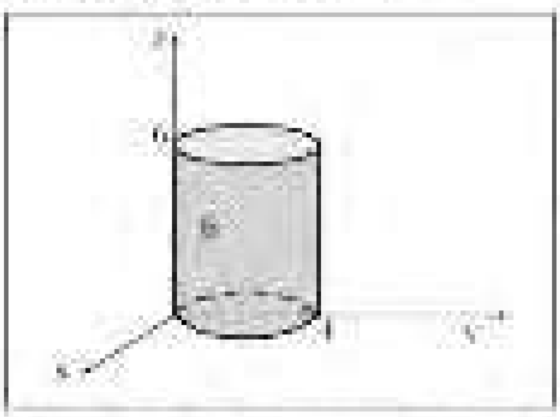
Tentukan:

a. Volume B

b. Massa B

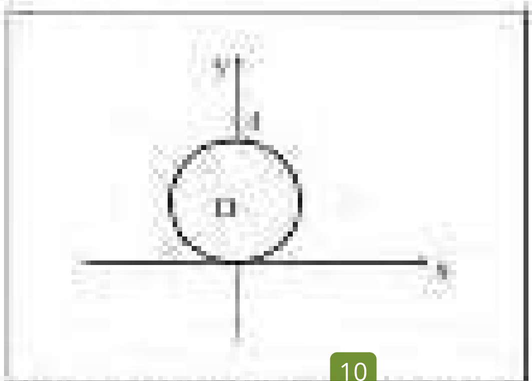
Penyelesaian:

Bidang $x^2 + (y-2)^2 = 4$ adalah silinder tegak dengan alas lingkaran yang berpusat di titik (0,2,0)



Gambar 2.26. B dibatasi $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan gambar di bawah



Gambar 3.22 D dibatasi $x^2 + (y-2)^2 = 4$

Jari-jari lingkaran D ditentukan dengan cara:

$x^2 + (y-2)^2 = 4$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$x^2 + y^2 = 4y$

$r = 4 \sin\theta$

a. Volume $B = V = \iiint_B dV = \iint_D \int [illegible]$

[illegible]

$= 2 \iint_D \int [illegible]$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$= 96 \int [illegible] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$

$= 48\theta - 24 \sin 2\theta \Big]$ [illegible]

$= 48 \left(\frac{\pi}{2}\right) - 24 (\sin \pi - \sin 0)$

$= 24\pi$ satuan volume

b. Massa $= \iiint_S \delta \, dV$

$$= 2 \iint_{S_1} \int_{z=0}^{6} \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dz \, dA$$

$$= 2 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{4 \sin \theta} \int_{z=0}^{6} \frac{k}{r} \, r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= 2k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{4 \sin \theta} \int_{z=0}^{6} dz \, dr \, d\theta$$

$$= 2k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{4 \sin \theta} z \Big]_{z=0}^{6} dr \, d\theta$$

$$= 12k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{4 \sin \theta} dr \, d\theta$$

$$= 12k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r \Big]_{r=0}^{4 \sin \theta} d\theta$$

$$= 12k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \theta \, d\theta$$

$$= 48 k \left[-\cos \theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -48 k \left[\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right)\right]$$

$$= -48 k (0 - 1) = 48 k$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 5 dan pada pertemuan ke 6 diadakan Quiz di awal pertemuan.

LATIHAN 2

1. Hitunglah integral berulang berikut:
   a. $\int \int \int$ [illegible] $2xyz\ dy\ dz\ dx$
   b. $\int \int \int$ [illegible] $4yz^2\ dz\ dy\ dx$
   c. $\int \int \int$ [illegible] $\sin\left(\frac{x}{y}\right)\ dx\ dy\ dz$
   d. $\int \int \int$ [illegible] $2z\ dz\ dy\ dx$
   e. $\int \int \int$ [illegible] $y\ dz\ dy\ dx$
   f. $\int \int \int$ [illegible] $y\ dz\ dy\ dx$
2. Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $x = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah konstanta, tentukanlah:
   a. Gambar B
   b. Volume B
   c. Massa B
3. Jika B benda yang dibatasi oleh $z = 6 - (x^2 + y^2)$ dan $z = 2$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, tentukanlah:
   a. Gambar B
   b. Proyeksi B terhadap bidang XY
   c. Titik pusat massa B

4. Jika B benda yang dibatasi oleh $(x-2)^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tentukanlah:
   a. Gambar B
   b. Proyeksi B terhadap bidang XY
   c. Momen inersia terhadap sumbu x. Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2)\,dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ dan $z = 2 - (x^2+y^2)$.
5. Tentukan $\iiint_B (y^2)\,dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2+y^2)$, $(x^2+y^2) = 4$ dan $z = 6$.
6. Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2)^{3/2}\,dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2+y^2)$ dan $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$.
7. Tentukan $\iiint_B xy\,dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2+y^2)$, $(x^2+y^2) = 2y$ dan $z = 0$.
8. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 12 - x^2 - y^2$ dan $z = 0$.

   Jika rapat massa $\mu = x^2 + y^2$, tentukan:
   a. Volume B
   b. Massa B
   c. Momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y
9. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$ dan $z = 5$. Jika rapat massa $\rho = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, tentukan momen inersia terhadap sumbu x

BAB 3

KALKULUS VEKTOR

Capaian Pembelajaran :
Bab ini membantu mahasiswa agar mampu :
1. Memahami fungsi bernilai vektor dan differensial vektor.
2. Memahami operasi fungsi vektor.
3. Memahami gradien, divergensi dan curl.

Deskripsi:

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari tentang fungsi vektor, diferensial vektor dan operasi fungsi vektor. Mahasiswa juga diajarkan bagaimana menentukan gradien sebuah fungsi, divergensi dan curl. (Penerapannya, n.d.)

3.1 Fungsi Bernilai Vektor

Jika D suatu himpunan di ruang R^n. Jika F suatu fungsi bernilai vektor di ruang R^m dengan daerah definisi D adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota x di R^n dengan satu dan hanya satu vektor y di R^m dan ditulis $y = F(x)$.

Selanjutnya vektor di R^m dapat ditulis $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$. (Vuhane, Sirovich, & Marsden, 2009)

CONTOH 3.1

Diberikan $y = f(x)$ fungsi dua variabel dengan nilai vektor di R^3 adalah

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^{\,2} \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan y di titik $(2, -1)$

Penyelesaian:

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^{\,2} \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + (-1)^2 \\ 3(2)(-1) \\ -(2)(-1) + 2(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka y di titik $(2, -1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.2 Diferensial Vektor

Jika $F(u) = (F_1, F_2, F_3)$ adalah suatu fungsi vektor. Fungsi vektor tersebut dapat ditulis dalam bentuk $F(u) = F_1(u)\,i + F_2(u)\,j + F_3(u)\,k$

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF_1}{du}i + \frac{dF_2}{du}j + \frac{dF_3}{du}k$$

Diferensial kedua vektor $F(u)$ adalah :

$$\frac{d^2F}{du^2} = \frac{d^2F_1}{du^2}i + \frac{d^2F_2}{du^2}j + \frac{d^2F_3}{du^2}k$$

Perhatikan sebuah fungsi F yang menghubungkan sebuah vektor $F(p)$ dengan setiap titik p dalam ruang berdimensi n. Fungsi ini disebut medan vektor. (Wahyuni, 2017)

CONTOH 3.7 :

1. $F(x, y) = -2x\,i + \frac{3}{2}y\,j$, adalah ruang berdimensi 2
2. $F(x, y, z) = 3x\,i - y\,j + 4z\,k$, adalah ruang berdimensi 3.

Secara umum medan vektor dalam ruang 3 dimensi ditulis $F(x, y, z) = P(x, y, z)\,i + Q(x, y, z)\,j + R(x, y, z)\,k$

3.3 Operasi Fungsi

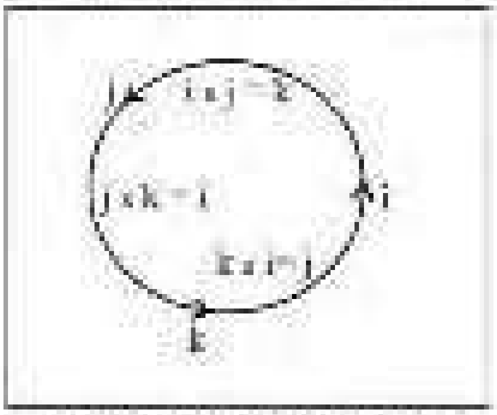
Jika F dan G dua fungsi vektor dimana (Marsch, 2002) $F = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ dan $G = G_1 i + G_2 j + G_3 k$ maka berlaku:

a. $(F + G) = (F_1 + G_1)i + (F_2 + G_2)j + (F_3 + G_3)k$
b. Jika c suatu skalar maka $cF = cF_1 i + cF_2 j + cF_3 k$
c. Perkalian skalar $F.G = (F_1 G_1) + (F_2 G_2) + (F_3 G_3)$, dimana $i.i = j.j = k.k = 1$

d. Perkalian cross F dan G, ditulis $F \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}$

$$= [F_2G_3 - F_3G_2]\, i - [F_1G_3 - F_3G_1]\, j + [F_1G_2 - F_2G_1]\, k$$

Berikut gambar untuk perkalian cross:



Gambar 3.1 Perkalian cross

Perkalian cross menggunakan aturan tangan kanan, dimana (Pandey, 2010): $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$

Jika menggunakan tangan kiri, perkalian crossnya bernilai negatif.

CONTOH 3.3

Jika $F(x,y,z) = x \sin x\, i + 2y\, e^z\, j + 3z\, k$
dan $G(x,y,z) = 3xyz^2\, i - 4x\, j + \ln(xz)\, k$

Tentukanlah:

a. $(2F).G$

b. $F \times (-G)$

Penyelesaian:

a. $(2F).G = 2[x \sin x\, i + 2y\, e^z\, j + 3z\, k].[3xyz^2\, i - 4x\, j + \ln(xz)\, k]$

$= [2x \sin x\, i + 4y\, e^z\, j + 6z\, k].[3xyz^2\, i - 4x\, j + \ln(xz)\, k]$

$= 6xyz^2 \sin x - 16xy\, e^z + 6z \ln(xz)$

b. $F \times (-G) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ -G_1 & -G_2 & -G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x \sin x & 2y\, e^z & 3z \\ -3xyz^2 & 4x & -\ln(xz) \end{vmatrix}$

$= [(2y\, e^z)(-\ln(xz)) - 12xz]\, i - [x \sin x(-\ln(xz)) - 3z(-3xyz^2)]\, j + [4x^2 \sin x - 2y\, e^z(-3xyz^2)]\, k$

$= [-2y\, e^z \ln(xz) - 12xz]\, i - [-x \sin x \ln(xz) + 9xyz^3]\, j + [4x^2 \sin x + 6xy^2 z^2 e^z]\, k$

3.4 Gradien, Divergensi dan Curl

3.4.1 Operator Diferensial Nabla

Operator Nabla dinotasikan dengan lambang ∇ (Pandey, 2010)

Definisi Operator Nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\, i + \frac{\partial}{\partial y}\, j + \frac{\partial}{\partial z}\, k$$

Operator Nabla dapat dipandang sebagai sebuah vektor.

3.4.2 Gradien

Operator Nabla jika dikenakan pada sebuah fungsi skalar $f(x, y, z)$ akan membentuk gradien dari $f(x, y, z)$

Definisi Gradien

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

CONTOH 3.4

Jika $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy^3 z$. Tentukan gradien ∇f di titik (2, -1, 4)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$= (6x + 2y^3 z) i + (6xy^2 z) j + 2xy^3 k$$

$$\nabla f \text{ di } (2, -1, 4) = 4i + 48j - 4k$$

3.4.3 Divergensi F / DivF

Divergensi adalah hasil operasi dot antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$, ditulis (Ash & Ash, 1998)

divergensi (F) atau div (F), dimana div $(F) = \nabla \cdot F$

Definisi Divergensi

Jika $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ adalah sebuah medan vektor dimana terdapat $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ dan $\frac{\partial R}{\partial z}$. Maka

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Interpretasi fisis divergensi adalah, jika F melambangkan medan kecepatan dari suatu fluida maka div F di titik p mengukur kecendrungan fluida tersebut untuk menyebar meninggalkan p (div $F > 0$) atau mengumpul menuju p (div $F < 0$).

CONTOH 3.5

Jika $F(x,y,z) = 2x\sin z\, i - \frac{z^2}{y} j + e^{3xz} k$. Tentukan $\nabla . F$ di titik $\left(2, -1, \frac{\pi}{2}\right)$

Penyelesaian:

Diketahui $P = 2x\sin z$

$$Q = -\frac{z^2}{y}$$

$$R = e^{3xz}$$

Maka

$$\nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) . \left(P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= 2\sin z + \frac{z^2}{y^2} + 3x e^{3xz}$$

$$\nabla . F\left(2, -1, \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \frac{2^2}{(-1)^2} + 3(2)e^{3(2)\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 6 + 6e^{3\pi}$$

CONTOH 3.6

Jika $F(x,y,z) = 2x\cos 2x\, i + \frac{y^2}{x}\, j - y e^{3xz}\, k$. Tentukan $\nabla . F$ di titik $(1,1,\frac{\pi}{2})$

Penyelesaian:

Diketahui $P = 2x\cos 2x$ maka $\frac{\partial P}{\partial x} = 2\cos 2x - 4x\sin 2x$

$Q = \frac{y^2}{x}$ maka $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2\frac{y}{x}$

$R = -y e^{3xz}$ maka $\frac{\partial R}{\partial z} = -3xy\, e^{3xz}$

Maka

$$\nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) . (P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= (2\cos 2x - 4\sin 2x) + 2\frac{y}{x} - 3xy\, e^{3xz}$$

Jadi

$$\nabla . F(1,1,\frac{\pi}{2}) = 2\cos\pi - 4\sin\pi + 2 - 3\, e^{3(1)(\frac{\pi}{2})}$$

$$= -3\, e^{\frac{3}{2}\pi}$$

3.4.4. Curl F

Curl F adalah hasil operasi cross antara operator Nabla dan medan vektor $F(x,y,z)$ dimana Curl (F)

Definisi Curl F

Jika $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ adalah sebuah medan vektor dimana terdapat $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ dan $\frac{\partial R}{\partial z}$ maka

$$\text{Curl } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times (P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

Interpretasi fisis curl F menyatakan arah sumbu dimana fluida tersebut berotasi

(melingkar, curl) paling cepat.

|Curl F| menyatakan laju rotasi. Arah rotasi ini mengikuti aturan tangan kanan.

CONTOH 3.7

Jika $F(x,y,z) = 2x\sin z\, i - \frac{x^2}{y} j + e^{3xz} k$, Tentukan Curl F di titik $(2,-1,\frac{\pi}{2})$

Penyelesaian:

Diperoleh $\quad P = 2x\sin z$

$$Q = -\frac{x^2}{y}$$

$$R = e^{3xz}$$

$$Curl\, F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times \left[P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k\right]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

$$= (0 - 0)i - (3z e^{3xz} - 2x\cos z) j + \left(-\frac{2x}{y} - 0\right) k$$

$$= -(3z e^{3xz} - 2x\cos z) j - \frac{2x}{y} k$$

Maka

Curl F di titik $(2,-1,\frac{\pi}{2})$ $\quad = -(3\frac{\pi}{2} e^{3(2)\frac{\pi}{2}} - 2(2)\cos\frac{\pi}{2}) j - \frac{2.2}{(-1)} k$

$$= -(3\frac{\pi}{2} e^{3\pi}) + 4k$$

CONTOH 3.3

Jika $F(x,y,z) = e^{2x}\cos y\,i - e^{2x}\sin y\,j + 3z\,k$ dan $f(x,y,z) = 3y + \sqrt{(x^2+z^2)}$

Tentukan:

a. Curl (Curl F)

b. Grad (div F)

c. Grad (div(grad f))

Penyelesaian:

Diketahui $\quad P = e^{2x}\cos y$

$\quad Q = -e^{2x}\sin y$

$\quad R = 3z$

a. $\text{Curl } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right) \times [P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k]$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$= (0-0)i - (0-0)j + (-2e^{2x}\sin y + e^{2x}\sin y)k$$

$$= -e^{2x}\sin y\,k$$

$$\text{Curl (Curl } F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -e^{2x}\sin y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$= (-e^{2x}\cos y)i - (-2e^{2x}\sin y)j$$

$$= -e^{2x}\cos y\,i + 2e^{2x}\sin y\,j$$

b. Karena

$P = e^{2x}\cos y$

$Q = -e^{2x}\sin y$

$R = 9z$

Maka

$\frac{\partial P}{\partial x} = 2e^{2x}\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{2x}\sin y$; $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2e^{2x}\sin y$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{2x}\cos y$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial R}{\partial z} = 9$

$\text{Div } F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k)$

$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$= 2e^{2x}\cos y - e^{2x}\cos y + 9$

$= e^{2x}\cos y + 9 = g(x,y,z)$

$\text{Grad (div F)} = \nabla g = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) g$

$= \frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j + \frac{\partial g}{\partial z} k$

$= 2e^{2x}\cos y\, i - e^{2x}\sin y\, j$

c. $f(x,y,z) = 3y + \sqrt{x^2 + z^2}$

$\text{Grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} i + 3j + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} k$

$$
\begin{aligned}
\text{Div}(\text{grad } f) &= \nabla . (\text{grad } f) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) . \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} i + 3 j + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} k\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(3) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x^2+z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+z^2}}}{x^2+z^2} + 0 + \frac{\sqrt{x^2+z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}}{x^2+z^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+z^2}} + \sqrt{x^2+z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}}{x^2+z^2} \\
&= \frac{2\sqrt{x^2+z^2} - \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}}{x^2+z^2} \\
&= \frac{x^2+z^2}{(x^2+z^2)^{3/2}} \\
&= h(x, y, z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Grad}(\text{div}(\text{grad } f)) &= \nabla h \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) h \\
&= \frac{\partial h}{\partial x} i + \frac{\partial h}{\partial y} j + \frac{\partial h}{\partial z} k \\
&= \frac{2x(x^2+z^2)^{3/2} - (x^2+z^2)(3/2)(x^2+z^2)^{1/2}(2x)}{(x^2+z^2)^3} i + 0 j + \\
&\quad \frac{2z(x^2+z^2)^{3/2} - (x^2+z^2)(3/2)(x^2+z^2)^{1/2}(2z)}{(x^2+z^2)^3} k \\
&= \frac{2x(x^2+z^2)^{3/2} - (x^2+z^2)3x(x^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+z^2)^3} i + \\
&\quad \frac{2z(x^2+z^2)^{3/2} - (x^2+z^2)3z(x^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+z^2)^3} k \\
&= -\frac{x(x^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+z^2)^3} i - \frac{z(x^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+z^2)^3} k \\
&= -\frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}} i - \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}} k
\end{aligned}
$$

CONTOH 3.9

Jika $F(x,y,z) = e^{2xz}\sin y\,i + e^{-2y}\cos z\,j + \sin 3z\,k$ dan $f(x,y,z) = 4xy^2 + \frac{1}{z^2}$

Tentukan:

a. $(\nabla^2 \cdot F)(2f)$

b. $(\nabla^2 \times F) \cdot F$

Penyelesaian:

Diketahui
$$P = e^{2xz}\sin y$$
$$Q = e^{-2y}\cos z$$
$$R = \sin 3z$$

a. $$\nabla^2 \cdot F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2}{\partial z^2} k\right) \cdot \left(P(x,y,z) i + Q(x,y,z) j + R(x,y,z) k\right)$$
$$= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(2ze^{2xz}\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2e^{-2y}\cos z) + \frac{\partial}{\partial z}(3\cos 3z)$$
$$= 4z^2 e^{2xz}\sin y + 4e^{-2y}\cos z - 9\sin 3z$$

$$(\nabla^2 \cdot F)(2f) = [4z^2 e^{2xz}\sin y + 4e^{-2y}\cos z - 9\sin 3z]\left(2\left[4xy^2 + \frac{1}{z^2}\right]\right)$$
$$= [8z^2 e^{2xz}\sin y + 8\cos z - 18\sin 3z]\left[4xy^2 + \frac{1}{z^2}\right]$$

b. Karena

$$P = e^{2xz}\sin y$$

$$Q = e^{-2y}\cos z$$

$$R = \sin 3z$$

Maka

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2ze^{2xz}\sin y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^{2xz}\cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2xe^{2xz}\sin y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2e^{-2y}\cos z, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -e^{-2y}\sin z$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3\cos 3z$$

$$(\nabla^2 \times F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) i - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) j + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) k$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right] i - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right] j + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] k$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-e^{-2y}\sin z)\right] i - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial x}(2x e^{2x}\sin y)\right)\right] j +$$
$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x}\cos y)\right)\right] k$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(e^{-2y}\sin z) i + \frac{\partial}{\partial x}(2x e^{2x}\sin y) j - \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x}\cos y) k$$
$$= e^{-2y}\cos z\, i + 4x^2 e^{2x}\sin y\, j + e^{2x}\sin y\, k$$

$$(\nabla^2 \times F).F = [e^{-2y}\cos z\, i + 4x^2 e^{2x}\sin y\, j + e^{2x}\sin y\, k].[e^{2x}\sin y\, i +$$
$$e^{-2y}\cos z\, j - \sin 3x\, k]$$
$$= (e^{-2y}\cos z)(e^{2x}\sin y) + (4x^2 e^{2x}\sin y)(e^{-2y}\cos z) +$$
$$e^{2x}\sin y \sin 3x$$

CONTOH 3.10

Jika $F(x,y,z) = e^{x^2}i + e^{-2z}\cos y\,j + \sin^2 3z\,k$ dan $f(x,y,z) = 2xy^2z$

Tentukan:

a. $(\nabla^2 \cdot F)(-f)$

b. $(\nabla^2 \times F)(2F)$

Penyelesaian:

Diketahui $\quad P = e^{x^2}$

$\qquad Q = e^{-2z}\cos y$

$\qquad R = \sin^2 3z$

a. $\nabla^2 \cdot F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}i + \frac{\partial^2}{\partial y^2}j + \frac{\partial^2}{\partial z^2}k\right)\cdot\left(P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k\right)$

$$= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\,e^{x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-2z}\cos y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin^2 3z\right)$$

$$= 4x^2 e^{x^2} - e^{-2z}\sin y + 6\sin 3z\cos 3z$$

$$= 4x^2 e^{x^2} - e^{-2z}\sin y + 3\sin 6z$$

$$(\nabla^2 \cdot F)(-f) = \left[4x^2 e^{x^2} - e^{-2z}\sin y + 3\sin 6z\right]\left[-2xy^2z\right]$$

$$= -8x^3y^2z\,e^{x^2} + 2xy^2z\,e^{-2z}\sin y - 6xy^2z\sin 6z$$

b. Karena

$P = e^{x^2}$,

$Q = e^{-2z}\cos y$

$R = \sin^2 3z$

Maka

$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xe^{x^2}$, $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x\,e^{x^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{-2z}\sin y$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2e^{-2z}\cos y$

$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0$, $\quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3\sin 6z$

$$(\nabla \times F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & G & H \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) k$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right] i - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right] j - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] k$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-2e^{-2x}\cos y)\right] i - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}0\right) - \frac{\partial}{\partial z}(2xe^{2xy})\right] j +$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(0)\right)\right] k$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(2e^{-2x}\cos y) i + \frac{\partial}{\partial z}(2xe^{2xy}) j$$

$$= -4e^{-2x}\cos y\, i + 4x^2 e^{2xy} j$$

Jadi

$$(\nabla \times F)\cdot(2F) = [-4e^{-2x}\cos y\, i + 4x^2 e^{2xy} j]\cdot[2e^{2xy} i - e^{-2x}\cos y\, j + 2x\cdot 2z\, k]$$

$$= -8e^{-2x+2xy}\cos y + 8x^2 e^{2xy-2x}\cos y + 0$$

$$= -8e^{-2x+2xy}\cos y + 8x^2 e^{2xy-2x}\cos y$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

LATIHAN 1

1. Tentukan div F dan curl F dari :
   a. $F(x, y, z) = x^2 yz\, \mathbf{i} + 2xy^2\, \mathbf{j} + 3xz\, \mathbf{k}$
   b. $F(x, y, z) = e^x \cos x\, \mathbf{i} + e^x \sin y\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$
2. Tentukan ∇f dari:
   a. $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz^2 + 2z$
   b. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
3. Diketahui fungsi vektor $F(x, y, z) = 3x^2 y^2\, \mathbf{i} + 4yz^2\, \mathbf{j} - 2yz^2\, \mathbf{k}$ dan fungsi skalar $\varphi(x, y, z) = 2xz^2 y^2$. Tentukan :
   a. Curl Grad $\varphi(x, y, z)$
   b. $[\nabla \times \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z)]\, \varphi(x, y, z)$
   c. Div Curl $[\nabla \times F(x, y, z)]$
4. Diketahui fungsi vektor $F(x, y, z) = xy^2 z^2\, \mathbf{i} + 3y^2 z^2\, \mathbf{j} - (4xz^2 + 2z)\, \mathbf{k}$ dan $F(x, y, z) = (xy^2 z^2)\, \mathbf{i} - 3y^2 z^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$. Tentukan :
   a. $\frac{\partial}{\partial y}[-F(x, y, z) \times \nabla F(x, y, z)]$
   b. $[\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x, y, z) \wedge \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z)]$
   c. $[-F(x, y, z)] \cdot [\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y}]$

5. Diketahui fungsi vector $V(x,y,z) = 2x^2y^2\,i + 5y^2z^2\,j - 2yz^2\,k$ dan fungsi skalar $\varphi(x,y,z) = 3xz^2y^2$. Tentukan :

   a. Curl Grad $3\varphi(x,y,z)$

   b. $[\nabla \times \frac{\partial}{\partial z} V(x,y,z)]\,\varphi(x,y,z)$

   c. Div Curl $[-V(x,y,z)]$

6. Diketahui fungsi vector $V(x,y,z) = 2x^2y^2z^2\,i + y^2z^2\,j + (5xz^2 + 4x^2)\,k$ dan $F(x,y,z) = 3y^2\,i + 2y^2z^2\,j + 5x^2\,k$ dan fungsi skalar $\varphi(x,y,z) = 4x^2y^2z^2$.

   Tentukan :

   a. $\frac{\partial}{\partial x}[V(x,y,z)] \times \frac{\partial}{\partial x}[V(x,y,z)]$

   b. $[\nabla \times \frac{\partial}{\partial y} 2V(x,y,z)]\,\varphi(x,y,z)$

   c. Div Curl $[V(x,y,z) + F(x,y,z)]$

7. Jika $F(x,y,z) = \sqrt{3x^2 + xyz} + z\ln 3y\,j + \cos^2 3z\,k$ dan $f(x,y,z) = 3xy^2 + \frac{z}{x}$

   Tentukan:

   a. $(\nabla^2 \times F)(-3f)$

   b. $(\nabla^2 \cdot F) \times (\nabla f)$

8. Jika $F(x,y,z) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + yz} - xy\ln 3y\,j + z\cos^2 3z\,k$ dan $f(x,y,z) = \frac{x^2}{3y} + \frac{z}{x}$

   Tentukan:

   a. $(\nabla^2 \times F)(-3f)$

   b. $(\nabla^2 \cdot F) \times (\nabla f)$

BAB 4

INTEGRAL GARIS

> Capaian Pembelajaran :
>
> Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :
>
> 1. Memahami konsep integral garis secara langsung.
> 2. Memahami konsep Teorema Green, ketakterqantungan lintasan.

Deskripsi

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral garis terhadap satu atau lebih lengkungan. Untuk lengkungan tertutup integral garis dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Green. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral garis untuk menghitung divergensi dan sirkulasi.

4.1 Integral Garis Medan Skalar

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di suatu ruang R^n dan $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ suatu fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada C. Maka integral garis dari fungsi f pada C dari titik A ke titik B ditulis (Ash & Ash, 1998)

$$\int_C f(x)\,dS\ ,\ \text{dimana } dS = \text{elemen diferensial busur}$$

Khusus untuk $n=2$ maka $f = f(x, y)$ dan C lengkungan pada bidang xy.

4.2 Definisi Integral Garis

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B. Misalkan $X(t)$ persamaan parameter lengkungan C dengan $t \in [a, b]$. Jadi $X(a) = A$, $X(b) = B$.

Ambil partisi dari $[a, b]$ dan $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ dengan $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Sebut $X(t_i) = A_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. $X(t_0) = A_0 = A$; $X(t_n) = A_n = B$.

Bila C terorientasi positif (arah positif terhadap pertambahan nilai t) maka partisi dari $[a, b]$ menghasilkan pembagian lengkungan C atas n busur-busur kecil.

Sebut Δs_i adalah panjang busur $A_{i-1} A_i$ dan $|P|$ adalah maksimal $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Sekarang ambil titik-titik X_i pada busur $A_{i-1} A_i$ dan bentuk jumlah Riemann (Goodwille, 1991)

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\,\Delta s_i \text{ (jika ada)} = \int_C f(x)\,dS$$

4.3 Menghitung Integral Garis $\int_C f(x)\,dS$

Untuk $n = 2$. Jika $f = f(x, y)$ dan C lengkungan mulus dengan persamaan parameter $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$

Maka

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,dS = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}$$

Untuk $n = 3$. Jika $f = f(x, y, z)$ dan C lengkungan mulus di R^3 dengan persamaan parameter $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$

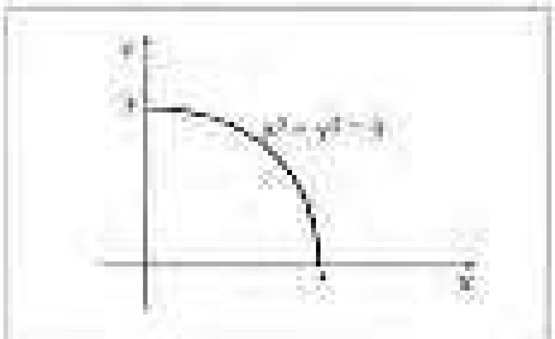
maka

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,dS = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt}$$

CONTOH 4.1

Hitung $\int_C x^2 y \, dS$ jika C busur lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 4.1 Busur $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama

Persamaan parameter C:

$$
\begin{aligned}
\int_C x^2 y \, dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t)^2 \, (3\sin t) \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\cos^2 t \, \sin t \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\cos^2 t \, \sin t \, (3)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81\cos^2 t \, \sin t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81\cos^2 t \, d(-\cos t) \\
&= -81 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, d(\cos t) \\
&= -27 \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 27
\end{aligned}
$$

CONTOH 4.2

Hitung $\int_C (2x + 9z)\, dS$ jika C lengkungan $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dan $0 \le t \le 1$

Penyelesaian:

$$\int_C (2x + 9z)\, dS = \int_0^1 (2t + 9t^3)\ \sqrt{1 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 (2t + 9t^3)\ \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\, dt$$

$$= \int_0^1 (2t + 9t^3)\ \sqrt{(3t^2 + \tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{5}{9}}\, dt$$

Selesaikan lebih dahulu integral $I = \int (2t + 9t^3)\sqrt{(3t^2 + \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{9}}\, dt$

Substitusi $\quad 3t^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5}\tan\theta$

maka $\quad t^2 = \frac{1}{9}\sqrt{5}\tan\theta - \frac{2}{9}$

$$2t\, dt = \frac{1}{9}\sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta$$

dan $\quad 9t^3 dt = 9t^2 . t\, dt$

$$= (\sqrt{5}\tan\theta - 2)\frac{1}{18}\sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta$$

Jadi

$$I = \int \left[\left(\tfrac{2}{9}\sqrt{5}\sec^2\theta + (\sqrt{5}\tan\theta - 2)\right)\tfrac{2}{18}\sqrt{5}\sec^2\theta\right]\sqrt{\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\tan\theta\right)^2 + \tfrac{5}{9}}\, d\theta$$

$$= \int \left[\left(\tfrac{1}{9}\sqrt{5}\sec^2\theta + (\sqrt{5}\tan\theta - 2)\right)\tfrac{1}{18}\sqrt{5}\sec^2\theta\right]\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\sec\theta\, d\theta$$

$$= \int \left[\left(\tfrac{5}{27}\sec^3\theta - \left(\tfrac{5}{54}\sqrt{5}\tan\theta\sec^3\theta - \tfrac{5}{27}\sec^3\theta\right)\right)\right] d\theta$$

$$= \int \left(\tfrac{5}{54}\sqrt{5}\tan\theta\sec^3\theta\right) d\theta$$

$$= \int \left(\tfrac{5}{54}\sqrt{5}\tan\theta\sec\theta\sec^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int \left(\tfrac{5}{54}\sqrt{5}\sec^2\theta\right) d(\sec\theta)$$

$$= \left(\tfrac{5}{162}\sqrt{5}\sec^3\theta\right)$$

$$= \tfrac{5}{162}\sqrt{5}\left(\tfrac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{(3t^2 + \tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{5}{9}}\right)^3$$

$$= \tfrac{1}{6}(9t^4 + 4t^2 + 1)\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

Jadi

$$\int_0^1 (2t + 9t^3)\sqrt{(3t^2 + \tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{5}{9}}\, dt = \tfrac{1}{6}(9t^4 + 4t^2 + 1)\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\,\Big|_0^1$$

$$= \tfrac{1}{6}(14\sqrt{14} - 1)$$

4.4 Integral Garis Medan Vektor

Misalkan $F(x)$ medan vektor dan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di R^n, maka $\int_C F(x).dX$ dikatakan integral garis dari medan vektor F pada C dari titik A ke B.

Untuk $n = 2$, $F(x) = F(x, y) = F_1(x, y)\,i + F_2(x, y)\,j$

$$dX = dx\,i + dy\,j \text{ sehingga}$$

$$\int_C F(x).dX = \int_C F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy$$

Untuk $n = 3$, $\vec{F}(\vec{x}) = F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j} + F_3(x,y,z)\,\vec{k}$

$$d\vec{X} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}, \text{ sehingga}$$

$$\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{X} = \int_C F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$$

Sifat-sifat integral garis sebagai berikut.

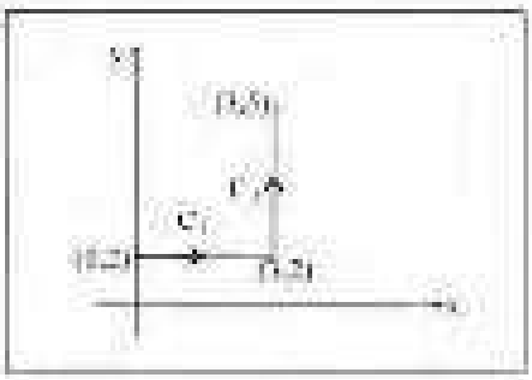
i. $\int_C (\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}) \cdot d\vec{X} = \alpha\int_C \vec{F}\,d\vec{X} + \beta\int_C \vec{G}\,d\vec{X}$, dimana α dan β konstanta.

ii. Jika $C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$, maka $\int_C \vec{F}(\vec{x})\,d\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \vec{F}(\vec{x})\,d\vec{X}$

CONTOH 4.3

Tentukan integral garis $\int_C xy^2\,dx + xy^2\,dy$ di sepanjang lintasan $C = C_1 \cup C_2$ yang menghubungkan titik $(0,2)$, $(3,2)$ dan $(3,5)$.

Penyelesaian:



Gambar 4.2 Lintasan C dari titik $(0,2)$, $(3,2)$ dan $(3,5)$.

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C xy^2\,dx + xy^2\,dy = \left[\int_{C_1} xy^2\,dx + xy^2\,dy\right] + \left[\int_{C_2} xy^2\,dx + xy^2\,dy\right]$$

Pada lintasan C_1, $y = 2$ maka $dy = 0$ sehingga

$$\int_{C_1} xy^2\,dx + xy^2\,dy = \int_0^3 4x\,dx$$

$$= 2x^2 \Big]_1 = 28$$

Pada lintasan C_2, $x = 3$ maka $dx = 0$ sehingga

$$\int_{C_2} xy^2\,dx + xy^2\,dy = \int_2 3y^2\,dy$$

$$= y^3 \Big]_2$$

$$= 125 - 8$$

$$= 117$$

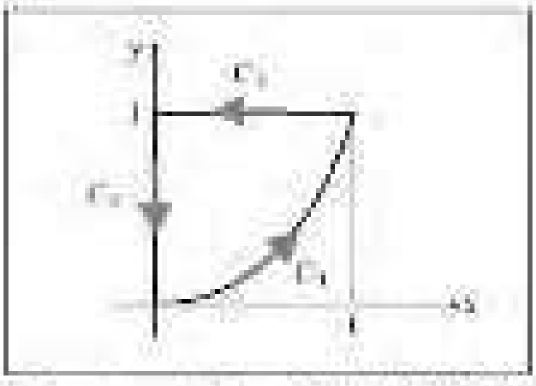
Jadi $\int_C xy^2\,dx + xy^2\,dy = \left[\int_{C_1} xy^2\,dx + xy^2\,dy\right] + \left[\int_{C_2} xy^2\,dx + xy^2\,dy\right]$

$$= 28 + 117$$

CONTOH 4.4

Tentukan $\int_C y\,dx + xy\,dy$ jika C parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ dan segmen garis dari titik $(1,1)$ ke $(0,1)$ kembali ke titik asal.

Penyelesaian:



Gambar 4.3 C dibatasi $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, titik $(1,1)$, $(0,1)$ dan $(0,0)$

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, ditulis $C = C_1 C_2 C_3$

Maka

$$\int_C y\,dx + xy\,dy = \int_{C_1} y\,dx + xy\,dy + \int_{C_2} y\,dx + xy\,dy + \int_{C_3} y\,dx + xy\,dy$$

Pada lintasan C_1, $y = x^2$ maka $dy = 2x dx$

sehingga

$$\int_{C_1} y\,dx + xy\,dy = \int_{C_1} x^2\,dx + x(x^2)\,(2x\,dx)$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 2x^4)\,dx$$

$$= [\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{5}x^5]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$$

Pada lintasan C_2, $y = 1$ maka $dy = 0$

sehingga

$$\int_{C_2} y\,dx + xy\,dy = \int_1^0 dx = 0 - 1 = -1$$

Pada lintasan C_3, $x = 0$ maka $dx = 0$

sehingga $\int_{C_3} y\,dx + xy\,dy = 0$

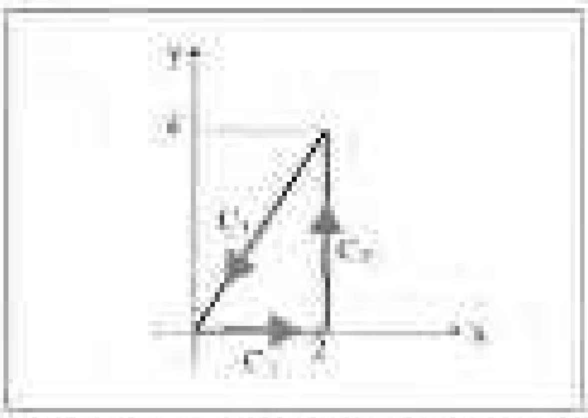
Jadi $\oint_C y\,dx + xy\,dy = \int_{C_1} y\,dx + xy\,dy + \int_{C_2} y\,dx + xy\,dy + \int_{C_3} y\,dx + xy\,dy$

$$= \frac{11}{15} - 1 = -\frac{4}{15}$$

CONTOH 4.5

Tentukan $\oint_C 2xy^2\,dx - 3xy\,dy$ jika C dibatasi oleh $y = 2x$, $y = 0$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:



Gambar 4.4 Lintasan C dibatasi $y = 2x$, $y = 0$ dan $x = 2$

Lintasan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1 C_2 C_3$

Maka $\int_C 2xy^2\,dx - 3xy\,dy =$

$$\int_{C_1} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C_2} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C_3} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy$$

Pada lintasan C_1, $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga

$\int_{C_1} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy = 0$

Pada lintasan C_2, $x = 2$ maka $dx = 0$

sehingga

$$\int_{C_2} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy = -\int_0^2 6y\,dy$$
$$= -3y^2\Big|_0^2 = -12$$

Pada lintasan C_3, $y = 2x$ maka $dy = 2\,dx$

sehingga

$$\int_{C_3} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy = \int_{C_3} 2x(2x)^2\,dx - 3x(2x)(2dx)$$
$$= \int_{C_3} 8x^3\,dx - 12x^2\,dx$$
$$= \int_2^0 (8x^3 - 12x^2)\,dx$$
$$= (2x^4 - 4x^3)_2^0$$
$$= 0 - (32 - 32) = 0$$

Jadi $\int_C y\,dx + xy\,dy$

$= \int_{C_1} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C_2} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy + \int_{C_3} 2xy^2\,dx - 3xy\,dy$

$= -12$

4.5 Aplikasi Integral Garis

Integral Garis dapat diaplikasikan untuk menentukan massa, momen massa dan titik pusat massa jika rapat massa di setiap titik diketahui.

a. Pada ruang R^2

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y)$, maka:

i. Massa = $m = \int_C \rho(x, y)\, dS$.

ii. Momen massa C

- terhadap sumbu x : $M_x = \int_C y\,\rho(x, y)\, dS$.
- terhadap sumbu y : $M_y = \int_C x\,\rho(x, y)\, dS$.

iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$

b. Pada ruang R^3

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y, z)$, maka:

i. Massa = $m = \int_C \rho(x, y)\, dS$

ii. Momen massa C

- terhadap bidang xy : $M_{xy} = \int_C z\,\rho(x, y)\, dS$.
- terhadap bidang yz : $M_{yz} = \int_C x\,\rho(x, y)\, dS$.
- terhadap bidang xz : $M_{xz} = \int_C y\,\rho(x, y)\, dS$.

iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right)$

CONTOH 4.6

Tentukan massa dan titik pusat massa dari kawat dengan persamaan parameter $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t, 0 \le t \le \pi$, dengan rapat massa kz.

Penyelesaian:

- Massa kawat

$$m = \int_C \rho\, dS = \int_C kz\, dS$$
$$= \int_C kz \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$
$$= k\int_0^{\pi} 4t \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2}\, dt$$
$$= 4k\int_0^{\pi} t \sqrt{(9\sin^2 t + 9\cos^2 t) + 16}\, dt$$
$$= 4k\int_0^{\pi} t \sqrt{(9 + 16)}\, dt$$
$$= 20\, k\int_0^{\pi} t\, dt$$
$$= 10\, k\, t^2\Big|_0^{\pi} = 10\, k\, \pi^2$$

- Momen massa terhadap bidang xy

$$M_{xy} = \int_C \rho\, z\, dS = \int_C kz\, z\, dS = \int_C kz^2\, dS$$
$$= k\int_0^{\pi} (16t^2)\, 5\, dt$$
$$= 80k\int_0^{\pi} t^2\, dt$$
$$= \frac{80}{3}\, k\, t^3\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{80}{3}\, k\, \pi^3$$

- Momen massa terhadap bidang xz

$$M_{xz} = \int_C \rho\, y\, dS = \int_C kz\, y\, dS =$$
$$= k\int_0^{\pi} (4t)(3\sin t)\, 5\, dt$$
$$= 60\, k\int_0^{\pi} t(\sin t)\, dt$$
$$= 60k\int_0^{\pi} t\, d(-\cos t)$$
$$= -60k\int_0^{\pi} t\, d(\cos t)$$ (Gunakan Integral Parsial)

$= 60k\,(t\cos t\,|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos t\,dt)$

$= 60k\,(\pi\cos\pi - \sin t\,|_0^{\pi})$

$= 60\,k\,(-\pi)$

$= 60\,k\,\pi$

- Momen massa terhadap bidang yz

$M_{yz} = \int_C \rho\, x\, dS = \int_C kz\, x\, dS =$

$= k\int_0^{\pi}(4t)(3\cos t)5\,dt$

$= 60\,k\int_0^{\pi}(t)(\cos t)\,dt$

$= 60k\int_0^{\pi} t\, d(\sin t)$ (Gunakan Integral Parsial)

$= 60k\,(t\sin t\,|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin t\,dt)$

$= 60k\,(\pi\sin\pi + \cos t\,|_0^{\pi})$

$= 60\,k\,(0-2)$

$= -120\,k$

$y = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{60\,k\,\pi}{10k\pi^2} = \frac{6}{\pi}$

$z = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{[illegible]}{10k\pi^2} = \frac{8}{3}\pi$

- Titik pusat massa $(-\frac{12}{\pi^2}, \frac{6}{\pi}, \frac{8}{3}\pi)$

4.6. Ketaktergantungan Lintasan (Bebas Lintasan)

Definisi :

Untuk setiap lengkungan C dari titik A ke B nilai $\int_C F(x).dx$ tetap harganya maka $\int_C F(x).dx$ dikatakan tidak tergantung lintasan dari A ke B.

Gambar 4.5 Lintasan dari titik A ke titik B

Dalam kasus ini $\int_{C1} F(x).dx = \int_{C2} F(x).dx$

Artinya $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari titik A ke B melalui C_1 atau C_2

Syarat yang harus dipenuhi $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari C akan diperlihatkan oleh Teorema berikut

Teorema 1 : Jika C lengkungan licin dari titik A ke B. Fungsi $f(x)$ terdefinisi dan kontinu pada daerah terbuka yang memuat C, maka : $\int_C \nabla f(x).dx = f(B) - f(A)$

Teorema 2 : Jika $F(x)$ medan vektor yang kontinu pada daerah terbuka D dan tersambung sederhana. Misalkan A dan B dua titik di D. Maka $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari A ke B jika dan hanya jika terdapat medan skalar f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$. $F(x)$ disebut medan konservatif.

Untuk menunjukkan $\vec{F}$ konservatif :

1. Jika $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ maka F konservatif jika memenuhi $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
2. Jika $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ maka F konservatif jika $\text{curl } F = 0$ atau $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

Langkah- langkah untuk menunjukkan ketaktergantungan lintasan dari titik A ke B adalah sebagai berikut.

1. Tunjukkan F konservatif.
2. Tentukan f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$.
3. $\int_c F(x) \cdot dx = f(B) - f(A)$

CONTOH 4.7

Jika $F(x,y) = 2xy\,i + (x^2+4y^3)\,j$ adalah medan vektor. Tentukan:

a. Apakah F konservatif
b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
c. Hitung $\int_c F \cdot dx$ dari titik $A = (1,4)$ ke titik $B = (-2,6)$

Penyelesaian:

a. Dari medan vektor F, diperoleh :

$M(x,y) = 2xy$ dan $N(x,y) = x^2 + 4y^3$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ dan $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ maka F adalah konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$M\,i + N\,j = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

Jadi $\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy$

maka $f(x,y) = x^2y + h(y)$

Selanjutnya akan dicari $R(y)$

dari $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$

$$x^2 + R'(y) = x^2 + 4y^3$$

maka $R'(y) = 4y^3$

sehingga $R(y) = y^4 + C$

Jadi $f(x,y) = x^2y + y^4 + C$

c. $\int_C F(x)\,dX = f(B) - f(A) = [x^2y + y^4]_{(1,4)}^{(-2,8)} = 296$

CONTOH 4.8

Jika $F(x,y,z) = -\frac{y}{z^2}\,i + \frac{1}{z}\,j - 2z\,k$ adalah medan vektor. Tentukan

a. Apakah F konservatif

b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$

c. Hitung $\int_C F\,dX$ dari titik $A = (1,1,2)$ ke titik $B = (2,4,2)$

Penyelesaian:

a. Dari medan vector F, diketahui :

maka $P = -\frac{y}{z^2}$, $Q = \frac{1}{z}$, $R = 2z$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \quad \text{maka} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

Karena $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$

maka Curl $F = 0$

sehingga F adalah konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$P\,i + Q\,j + R\,k = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

Untuk menentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = -\frac{y}{x^2}$$

maka $f(x, y, z) = \frac{y}{x} + H(y, z)$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

dan $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

$\frac{1}{x} + H'(y, z) = \frac{1}{x}$

maka $H'(y, z) = 0$

sehingga $H(y, z) = G(z) + C_1$

$f(x, y, z) = \frac{y}{x} + G(z) + C_1$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

$G'(z) = 2z$

maka $G(z) = z^2 + C_2$

Jadi $f(x, y, z) = \frac{y}{x} + z^2 + C_1 + C_2$

c. $\int_C F(x)\,dx = f(B) - f(A) =$

$= \left[\frac{y}{x} + z^2\right]_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} = 4$

CONTOH 4.9

Jika $F(x, y, z) = 2xyz^2\, i + (x^2z^2 + 3y)\, j + 2x^2yz\, k$ adalah medan vektor.

Tentukan $\int_C F \cdot dX$ jika C lengkungan fair dari titik $A = (2, 0, 1)$ ke titik $B = (0, -1, 1)$.

Penyelesaian:

a. Dari medan vektor F, diketahui :

$$P = 2xyz^2$$
$$Q = x^2z^2 + 3y$$
$$R = 2x^2yz$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2 \quad , \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2x^2z \quad , \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2z \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2z$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz \quad , \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz$$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$

atau Curl $F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$Pi + Qj + Rk = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xyz^2$$

maka $f(x, y, z) = x^2yz^2 + h(y, z)$

Selanjutnya akan dicari $h(y, z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

$x^2z^2 + H'(y,z) = x^2z^2 + 3y$

maka $H'(y,z) = 3y$

sehingga $H(y,z) = \frac{3}{2}y^2 + G(z)$

$f(x,y,z) = f(x,y,z) = x^2yz^2 + \frac{3}{2}y^2 + G(z)$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

$2x^2yz + G'(z) = 2x^2yz$

$G'(z) = 0$

maka $G(z) = C$

Jadi $f(x,y,z) = x^2yz^2 + \frac{3}{2}y^2 + C$

c. $\int_C F(r)\cdot dR = f(B) - f(A)$

$= [x^2yz^2 + \frac{3}{2}y^2]_{[illegible]}^{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$

CONTOH 4.10

Tunjukkan $\int_C F\cdot dR$ tak tergantung lintasan jika $F(x,y,z) = (4xy^2z + \frac{3}{2}z^2)i + (4x^2yz + 4z + 5)j + (2x^2y^2 + 3xz + 4y)k$ adalah medan vektor.

Penyelesaian:

Penyelesaian soal ini harus melalui 2 tahap, pertama tunjukkan F medan vektor konservatif dan tahap kedua tentukan fungsi $f(x,y,z)$

$P = 4xy^2z + \frac{3}{2}z^2$

$Q = 4x^2yz + 4z + 5$

$R = 2x^2y^2 + 3xz + 4y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 8xyz,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$ maka $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$

$\frac{\partial Q}{\partial z} = 4x^2y + 4$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 4x^2y + 4$ maka $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 4x^2y + 4$

$\frac{\partial R}{\partial x} = 4xy^2 + 3z$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 4xy^2 + 3z$ maka $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 4xy^2 + 3z$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

atau Curl $F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$P\,i + Q\,j + R\,k = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

Akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 4xy^2z + \frac{3}{2}z^2$$

maka $f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{2}xz^2 + H(y, z)$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

$$4x^2yz + H'(y, z) = 4x^2yz + 4z + 5$$

maka $H'(y, z) = 4z + 5$

sehingga $H(y, z) = 4yz + 5y + G(z)$

maka

$f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{2}xz^2 + 4yz + 5y + G(z)$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

$$2x^2y^2 + 3xz + 4y + G'(z) = 2x^2y^2 + 3xz + 4y$$

$$G'(z) = 0$$

maka $G(z) = C$

Jadi $f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{2}xz^2 + 4yz + 5y + C$

Maka terbukti $\int_C F \cdot dR$ tak tergantung lintasan

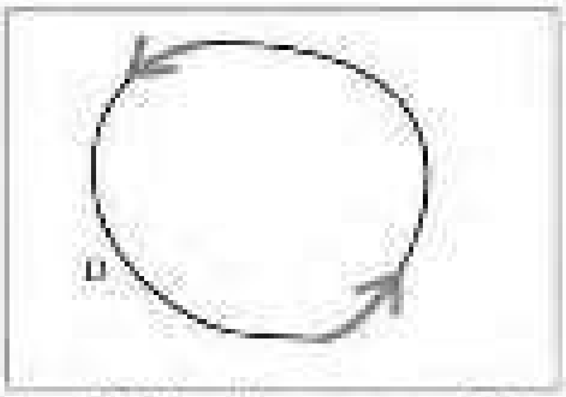
4.7. Teorema Green pada Bidang

Teorema Green :

Jika C lengkungan tertutup sederhana yang merupakan batas daerah D. Misalkan $F(x,y) = M(x,y)\,i + N(x,y)\,j$ suatu medan vektor. Jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ kontinu dan mempunyai turunan parsial pada D dan C. Maka :

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

atau $$\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$



Gambar 4.6 D lengkungan tertutup C

Note : arah positif C adalah berlawanan arah jarum jam.

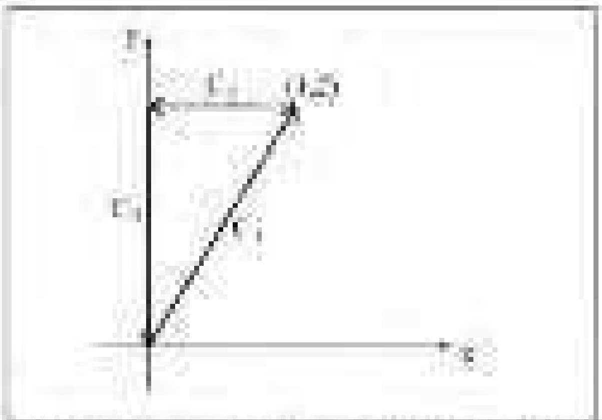
CONTOH 4.11

Misalkan C dibatasi oleh rusuk-rusuk dari segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(0,0)$, $(1,2)$ dan $(0,2)$. Hitung $\oint_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy$ dengan menggunakan:

a. Cara langsung

b. Teorema Green

Penyelesaian:



Gambar 4.7 Lintasan C dibatasi oleh (0,0), (1,2) dan (0,2).

a. Cara Langsung

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Pada C_1 diperoleh $y = 2x$ maka $dy = 2dx$

sehingga $\int_{C_1} 4x^2 y\, dx + 2y\, dy = \int_0^1 (8x^3 + 8x)\, dx$

$$= \left[2x^4 + 4x^2\right]_0^1 = 6$$

Pada C_2 diperoleh $y = 2$ maka $dy = 0$

sehingga $\int_{C_2} 4x^2 y\, dx + 2y\, dy = \int_1^0 8x^2\, dx$

$$= \left[\frac{8}{3}x^3\right]_1^0 = -\frac{8}{3}$$

Pada C_3 diperoleh $x = 0$ maka $dx = 0$

sehingga $\int_{C_3} 4x^2 y\, dx + 2y\, dy = \int_2^0 2y\, dy$

$$= \left[y^2\right]_2^0 = -4$$

Jadi $\oint_C 4x^2 y\, dx + 2y\, dy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$

b. Dengan menggunakan Teorema Green

$$\oint_C F \cdot dR = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_C 4x^2 y\, dx + 2y\, dy = \iint_R (0 - 4x^2)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_{2x}^{2} -4x^2\, dy dx$$

$$= \int_0^1 -4x^2 (2 - 2x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (-8x^2 + 8x^3)\, dx$$

$$= \left[-\frac{8}{3}x^3 + 2x^4\right]_0^1$$

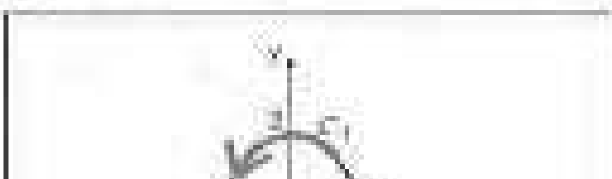
$$= -\frac{2}{3}$$

CONTOH 4.12

Buktikan kebenaran Teorema Green jika diketahui medan vektor $F = x^2 y\, i + 3x\, j$ yang bekerja pada lintasan C yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan sumbu x.

Penyelesaian:

Membuktikan kebenaran Teorema Green yaitu dengan cara membuktikan hasil dengan cara langsung sama dengan hasil menggunakan Teorema Green.



Gambar 4.8 Lintasan C dibatasi $y = 2 - x^2$ dan sumbu x.

a. Cara Langsung

$C = C_1 + C_2$

Pada C_1 persamaan $y = 2 - x^2$ maka $dy = -2x\,dx$

sehingga $\int_{C_1} x^2 y\,dx - 3x\,dy =$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} x^2 (2 - x^2)\,dx - 3x(-2x)\,dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} ((2x^2 - x^4) + 6x^2)\,dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} (8x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \tfrac{8}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 \Big]_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-136}{15}\sqrt{2}$$

Pada C_2 diperoleh $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga $\int_{C_2} x^2 y\,dx - 3x\,dy = 0$

Jadi $\oint_C x^2 y\,dx - 3x\,dy = \frac{-136}{15}\sqrt{2}$

b. Teorema Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_C x^2 y\,dx - 3x\,dy = \iint_D (-3 - x^2)\,dA$$

Karena simetri D di kuadran I (D_1) dan di kuadran II (D_2), maka $D = 2D_1$

$$= 2\iint_{D_1} (-3 - x^2)\,dA$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} (-3 - x^2)\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} (-3 - x^2)\,y \Big]_0^{2-x^2} dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} (-3 - x^2)(2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} (-6 + x^2 + x^4)\,dx$$

$$= 2\left(-6x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5\right)\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-136}{15}\sqrt{2}$$

Hasil secara langsung sama dengan hasil Teorema Green, maka kebenaran Teorema Green terbukti.

4.8 Fluks dan Sirkulasi

4.8.1. Fluks F melalui C

Misalkan C lengkungan licin yang tertutup dan sederhana dengan orientasi berlawanan dengan arah jarum jam. Misalkan C mempunyai persamaan parameter:

$x = x(s)$ dan $y = y(s)$, s parameter panjang busur.

Maka vektor garis singgung satuan T adalah

$$T = \frac{dx}{ds}\,i + \frac{dy}{ds}\,j$$

dan vektor normal satuan n yang arahnya keluar dari daerah D yang dibatasi C adalah

$$n = \frac{dy}{ds}\,i - \frac{dx}{ds}\,j$$

Jika $F(x, y) = M(x, y)\,i + N(x, y)\,j$ suatu medan vector. Maka untuk menghitung Fluks F melalui C yaitu banyaknya fluida (zat cair) yang meninggalkan D. Menghitung Fluks $\oint_C F \cdot n\, dS$ dengan cara sebagai berikut:

$$\oint_C F \cdot n\, dS = \oint_C (Mi + Nj) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\,i - \frac{dx}{ds}\,j\right) ds$$

$$= \oint_C \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

Karena div $F = \nabla \cdot F$

$$\boxed{\text{Jadi } \oint_C F \cdot n\, dS = \iint_D \operatorname{div} F\, dA = \iint_D \nabla \cdot F\, dA = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA}$$

4.6.2 Sirkulasi F melalui C

Misalkan $F(x, y, z) = M(x, y)i + N(x, y)j + 0\,k$, dimana komponen z dari F adalah nol (0). Sirkulasi F kecenderungan fluida untuk berputar pada titik (x_0, y_0). Jika $Curl\ F = 0$ pada D, maka aliran fluida dikatakan tidak dapat berputar.

Untuk menentukan sirkulasi F melalui C dapat menggunakan Teorema Stokes.

Teorema Stokes untuk bidang

Sirkulasi F melalui C adalah :

$$\oint_C F\cdot T\,ds = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

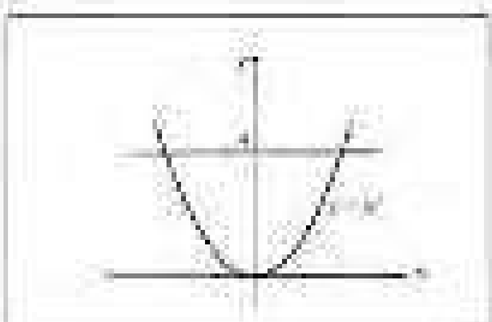
CONTOH 4.13

Jika $F = 3xy\,i + 2xj$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$. Hitunglah:

a. Fluks F melalui C

b. Sirkulasi F sepanjang C

Penyelesaian:



Gambar 4.9 Lintasan C dibatasi $y = x^2$ dan $y = 4$

a. Perpotongan $y = x^2$ dan $y = 4$

diperoleh $4 = x^2$ sehingga $x = \pm 2$

$M = 2xy$ maka

$N = 2x$ maka

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss, maka fluks F melalui C adalah

$$\oint_C F \cdot n \, ds = \iint_S \operatorname{div} F \, dA = \iint_S \nabla \cdot F \, dA$$

$$= \iint_S$$

$$= \iint_S 2y \, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} 2y \, dy \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} \int_{x^2}^{4} 2y \, dy \, dx$$

$$= 2\int_0$$

$$= 2\int_0 [16 - x^4] \, dx$$

$$= 2[16x - \tfrac{1}{5}x^5] = \tfrac{256}{5} \text{ satuan kubik}$$

b. $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x$

Sirkulasi $= \oint_C F \cdot T \, ds = \oint_C M\,dx + N\,dy$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_S (2x - 3x) \, dA$$

$$= \iint_S (-3x) \, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} -3x \, dy \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} \int_{x^2}^{4} -3x \, dy \, dx$$

$$= -6\int_0^2 [xy]_{x^2}^{4} \, dx$$

$$= -6\int_0^2 x(4 - x^2) \, dx$$

$$= -6\int_0^2 [4x - x^3] \, dx$$

$$= -6[2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4]_0^2 = -24$$

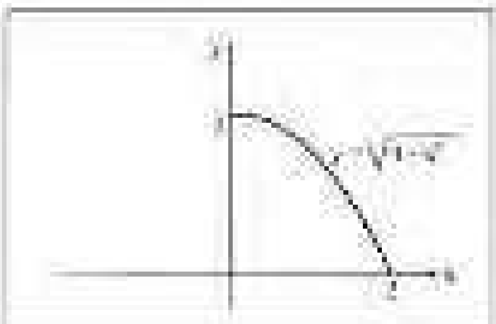
CONTOH 4.14

Jika $F = x^2 i - 4(x+y) j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = \sqrt{(4-x^2)}$ di kuadran pertama. Tentukanlah:

a. Fluks F melalui C

b. Sirkulasi F sepanjang C

Penyelesaian:



Gambar 4.10 Lintasan C dibatasi $y = \sqrt{(4-x^2)}$ di kuadran I

a. $M = x^2$ maka $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$

$N = -4(x+y)$ maka $\frac{\partial N}{\partial y} = -4$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss, maka Fluks F melalui C adalah

$$\begin{aligned}
\oint_C F\cdot n \, dS &= \iint_R \operatorname{div} F \, dA = \iint_R \nabla \cdot F \, dA \\
&= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \\
&= \iint_R (2x-4)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2x-4)\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 (2x-4)\, y \Big]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^2 (2x-4)\sqrt{(4-x^2)}\, dx \\
&= \int_0^2 \left(2x\sqrt{(4-x^2)} - 4\sqrt{(4-x^2)}\right) dx
\end{aligned}$$

Selesaikan terlebih dahulu masing-masing integral

$\int_0^2 (2x\sqrt{(4-x^2)})\, dx$ gunakan metode substitusi $u = 4-x^2,\ du = -2x\,dx$

$$\int (2x\sqrt{(4-x^2)})\, dx = \int \sqrt{u}\,(-du)$$
$$= -\int \sqrt{u}\,(du)$$
$$= -\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$
$$= -\tfrac{2}{3}\left((4-2^2)^{\frac{3}{2}} - (4-0^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= -\tfrac{2}{3}[0-8] = \tfrac{16}{3}$$

$\int_0^2 (4\sqrt{(4-x^2)})\, dx$ gunakan substitusi $x = 2\sin\theta$, maka $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$$\sin\theta = \frac{x}{2}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\int (4\sqrt{4-x^2})\, dx = 4\int (\sqrt{4-4\sin^2\theta})\, 2\cos\theta\, d\theta$$
$$= 4\int 2\cos\theta\, 2\cos\theta\, d\theta$$
$$= 16\int \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= 16\int \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$
$$= 16\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right)$$
$$= 16\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$= 8(\theta + \sin\theta\cos\theta)$$
$$= 8\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2\cdot 2}\right)\Big|_0^2$$
$$= 8[(\arcsin 1 - \arcsin 0) + 0]$$
$$= 8\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 4\pi$$

Maka

$$2\int_0^2 \left(2x\sqrt{(4-x^2)} - 4\sqrt{(4-x^2)}\right) dx = 2\left[\int_0^2 (2x\sqrt{(4-x^2)})\, dx - \int_0^2 (4\sqrt{(4-x^2)})\, dx\right]$$
$$= 2\left(\frac{16}{3} - 4\pi\right)$$
$$= \frac{32}{3} - 8\pi$$

Jadi Fluks $\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \frac{32}{3} - 8\pi$

b. $\frac{\partial N}{\partial x} = -4$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$

Sirkulasi $= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C M\,dx + N\,dy$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_S (-4)\, dA$$

$$= -4 \iint_S dA$$

$$= -16\pi$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuis pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

Latihan 4

1. Tentukan $\int_C y\, dx + x^2\, dy$, jika C segmen-segmen garis dari titik $(0,-1)$ ke $(4,-1)$ dan dilanjutkan ke $(4,3)$.
2. Tentukan $\int_C F \cdot dR$, jika $F(x,y) = y\, i + 3x\, j$ dan C lengkungan $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.
3. Tentukan $\int_C F \cdot dR$, jika $F(x,y,z) = (y + z)\, i + (2y + x - 2z)\, j - 4yz\, k$ dan C segmen garis dari titik $(1,2,1)$ ke $(2,1,0)$.
4. Jika $F(x,y) = (12x^2 + 3y^2 + 5y)\, i + (6xy + 4y^3)\, j$ adalah medan vektor. Tentukan:
   a. Apakah F konservatif
   b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
   c. Hitung $\int_C F \cdot dR$ dari titik $A = (1,-2)$ ke titik $B = (-1,3)$
5. Jika $F(x,y,z) = 3x^2\, i + 6y^2\, j + 9z^2\, k$ adalah medan vektor. Tentukan:
   a. Apakah F konservatif
   b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
   c. Hitung $\int_C F \cdot dR$ dari titik $A = (2,2,1)$ ke titik $B = (0,1,-2)$

6. Hitunglah $\int_C (6xy^2 + 2x^2)\,dx + 9x^2y\,dy + (6z + 1)\,dz$, dimana C lengkungan licin dari titik $(0,2,1)$ ke $(-1,1,2)$.
7. Diberikan $F(x,y,z) = (yz^2 + y^2 + 2x)\,\mathbf{i} + (xz^2 + 2xy)\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$ adalah medan vektor.
   a. Tunjukkan bahwa $\int_C F\,dX$ tak bergantung dari lintasan C dari titik A ke titik B.
   b. Tentukan $\int_C F\,dX$ jika lengkungan licin dari titik $A = (1,0,1)$ ke titik $B = (2,1,2)$.
8. Jika $F = (x+y)\,\mathbf{i} - 2y^2\,\mathbf{j}$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$, $y = x$ dan sumbu y di kuadran I. Hitunglah:
   a. Fluks F melalui C
   b. Sirkulasi F sepanjang C
9. Jika $F = 2xy\,\mathbf{i} + 3xy^2\,\mathbf{j}$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $(x-2)^2 + y^2 = 4$, $y = x$ di kuadran I. Hitunglah:
   a. Fluks F melalui C
   b. Sirkulasi F sepanjang C
10. Hitunglah $\oint_C (e^x + 2y)\,dx + (x^2 + \sin y)\,dy$, dimana C empat persegi panjang dengan titik-titik $(2,1)$, $(6,1)$, $(6,4)$ dan $(2,4)$ dengan menggunakan :
    a. Cara langsung
    b. Teorema Green
11. Hitunglah $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ jika C bagian atas lingkaran satuan yang dimulai dari titik $(1,0)$ dan sampai dengan $(-1,0)$.
12. Tentukan pusat massa dari kawat yang berbentuk setengah lingkaran atas $x^2 + y^2 = a^2$.

13. Periksa apakah $\int_C (y^2 + 2xy)\, dx + (x^2 + 2xy)\, dy$ tak tergantung lintasan dari C, dimana C lengkungan licin dari titik $(-1,2)$ ke $(2,1)$.
14. Periksa apakah $\int_C (e^x \sin y)\, dx + (e^x \cos y)\, dy$ tak tergantung lintasan dari C, dimana C lengkungan licin dari titik $(0,0)$ ke $(1, \frac{\pi}{2})$.

BAB 5

INTEGRAL PERMUKAAN

Capaian Pembelajaran

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

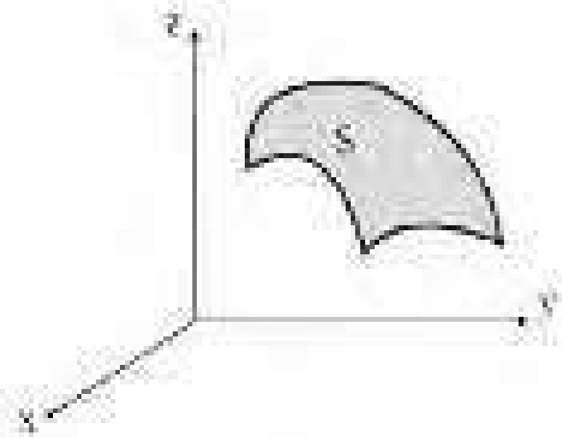
1. Memahami konsep integral permukaan.
2. Memahami penerapan aplikasi integral permukaan untuk menentukan fluks dan sirkulasi.

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral permukaan terhadap benda pada ruang R^3 dan penerapannya menentukan fluks dan sirkulasi .

5.1 Pengertian Integral Permukaan

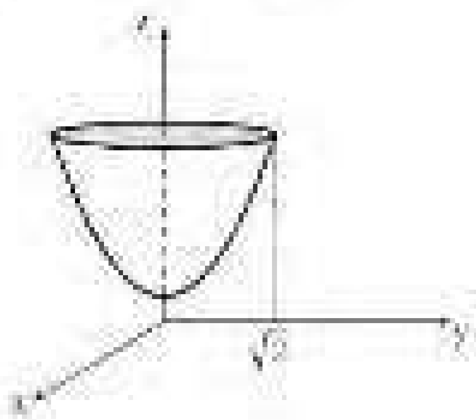
Misalkan S suatu permukaan terbatas luasnya di ruang. Misalkan $g(x,y,z)$ adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada S, maka yang dimaksud dengan integral permukaan dari fungsi g atas S adalah $\iint_S g(x,y,z)\,dS$. Dimana dS adalah elemen differensial luas permukaan. (Goodwillie, 1991)



Gambar 5.1 Ilustrasi Integral Permukaan

CONTOH 5.1

Jika S permukaan paraboloida $z = 2 + x^2 + y^2$ yang terletak di bawah $z = 4$. Misalkan fungsi yang bekerja pada S adalah $g(x,y,z) = 2xy^2z$. Maka integral permukaan $g(x,y,z) = 2xy^2z$ atas S adalah $\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_S 2xy^2z\,dS$



Gambar 5.2 Permukaan $z = 2 + x^2 + y^2$ di bawah $z = 4$

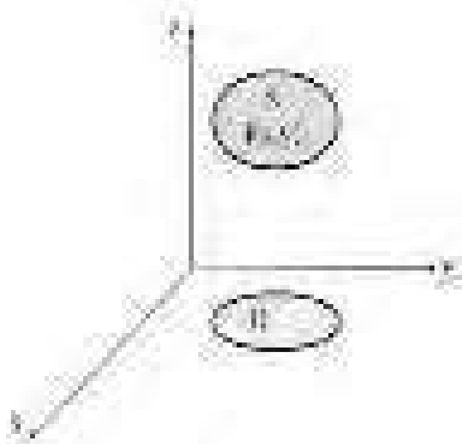
5.2 Tafsiran Integral Permukaan

Misalkan D suatu daerah tertutup di bidang XY dan S adalah bagian dari permukaan

$z = f(x, y)$ dimana (x,y) berada dalam D pada bidang XY maka D adalah proyeksi S pada bidang XY. Jika $f(x, y)$ mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $g(x, y, z) = g(x, y, f(x, y))$ juga kontinu pada D, maka [KREYSZIG, KREYSZIG, & NORMINTON, 201

dimana $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

dS adalah elemen diferensial luas permukaan

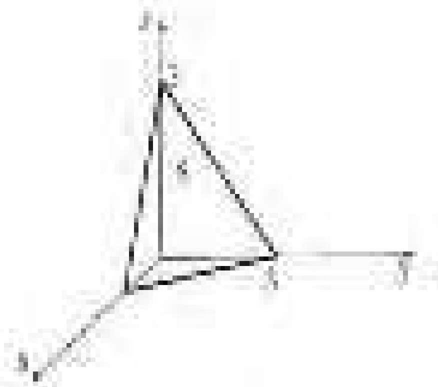


Gambar 5.3 Tafsiran Integral Permukaan

CONTOH 5.2

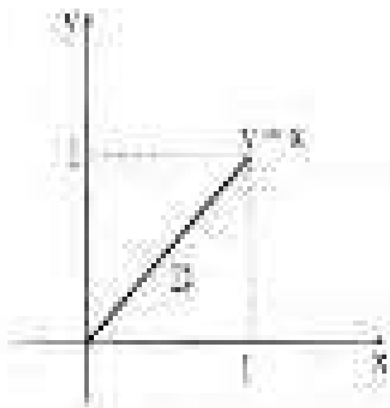
Hitung $\iint_S (xy + z)\,dS$ jika S permukaan $2x + y + z = 2$ yang proyeksinya pada bidang XY adalah segitiga dengan titik-titik (0,0), (1,0), dan (1,1)

Penyelesaian:



Gambar 5.4 Permukaan S dibatasi $2x + y + z = 3$ dan bidang XY

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.5 Proyeksi D dibatasi (0,0), (1,0) dan (1,1)

D adalah proyeksi dari S yang dibentuk oleh titik-titik (0,0), (1,0) dan (1,1) sehingga diperoleh persamaan-persamaan: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$;

$$z = f(x, y) = 3 - 2x - y$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2 \qquad ; \; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

Jadi

$$\iint_S (xy + z)\, dS = \iint_R (xy + 3 - 2x - y)\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R (xy + 3 - 2x - y)\sqrt{6}\, dA$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} (xy + 3 - 2x - y)\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}xy^2 + 3y - 2xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$$= \sqrt{6}\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3 + 3x - \frac{5}{2}x^2\right) dx$$

$$= \sqrt{6}\left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{19}{24}\sqrt{6}$$

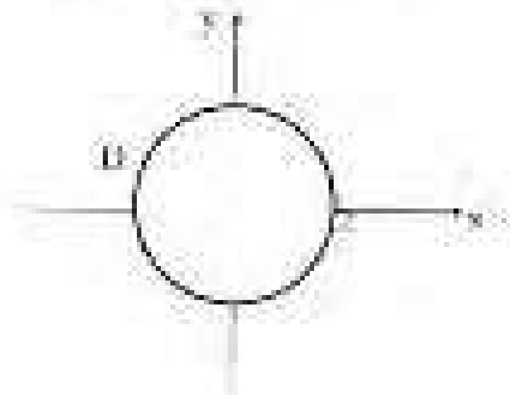
CONTOH 5.3

Hitung $\iint_S (xyz)\, dS$ jika S permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak antara $z = 0$ dan $z = 2$.

Penyelesaian:

Gambar 5.6 Permukaan S dibatasi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$ dan $z = 2$

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.7 D proyeksi S dibatasi $x^2+y^2=4$

$$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dS=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dA$$

Jadi

$$\iint_S (xyz)\,dS=\iint_D \left(xy\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}\,dA$$

$$=\iint_D \left(xy\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\,dA$$

$$=\sqrt{2}\iint_D \left(xy\sqrt{x^2+y^2}\right)dA$$

dengan menggunakan integral lipat dua koordinat Polar

$$= \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r.\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(r^4\cos\theta\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{5}r^5\Big|_{r=0}^{2}\cos\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\sin\theta)\,d(\sin\theta)$$

$$= \frac{16}{5}\sqrt{2}\,\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

5.3 Aplikasi Integral Permukaan

a. Luas Permukaan

Jika $g(x,y,z) = 1$, maka

Luas Permukaan $= S = \iint_S dS$.

b. Massa = m

Jika rapat massa di setiap titik (x,y,z) pada S adalah $\rho(x,y,z)$

maka Massa = m = $\iint_S \rho(x,y,z)\,dS$.

c. Momen massa

- terhadap bidang yz : $M_{yz} = \iint_S x\,\rho(x,y,z)\,dS$
- terhadap bidang xz : $M_{xz} = \iint_S y\,\rho(x,y,z)\,dS$
- terhadap bidang xy : $M_{xy} = \iint_S z\,\rho(x,y,z)\,dS$

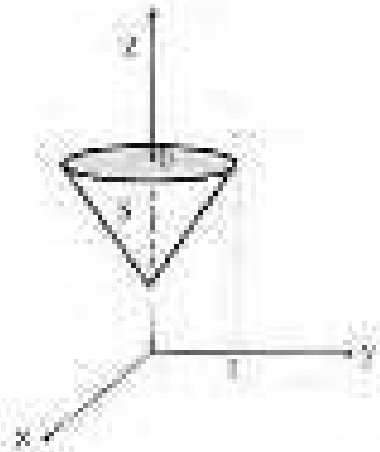
d. Titik Pusat Massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}\ ;\quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}\ ;\quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

CONTOH 5.4

Hitunglah luas permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di bawah z = 6.

Penyelesaian:



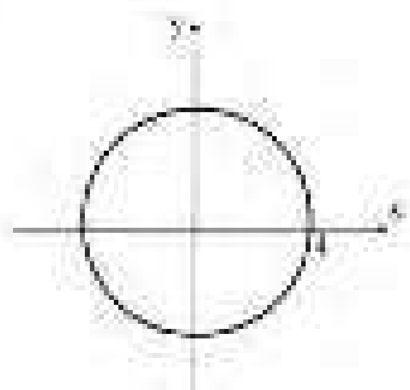
Gambar 5.8 S bagian dari permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan z = 6

Perpotongan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan z = 6

diperoleh $2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$

maka $r = 4$.

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.9 D adalah proyeksi S diatas $x^2 + y^2 = 16$

$z = f(x,y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$

Luas Permukaan $= S = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\, dA$

$= \iint_R \sqrt{2}\, dA$

$= \sqrt{2} \iint_R dA$

$= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} r\, dr\, d\theta$

$= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \dfrac{1}{2} r^2 \Big]_0^4 d\theta$

$= 8\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$

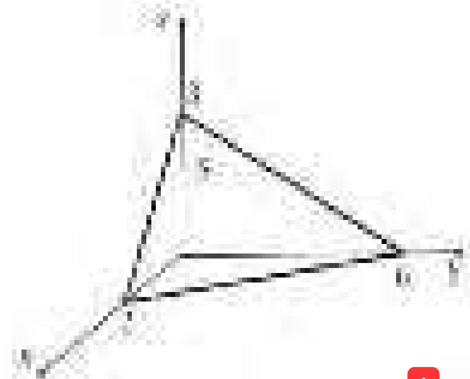
$= 8\sqrt{2}\, \theta \Big]_0^{2\pi}$

$= 16\sqrt{2}\,\pi$ satuan luas

CONTOH 5.5

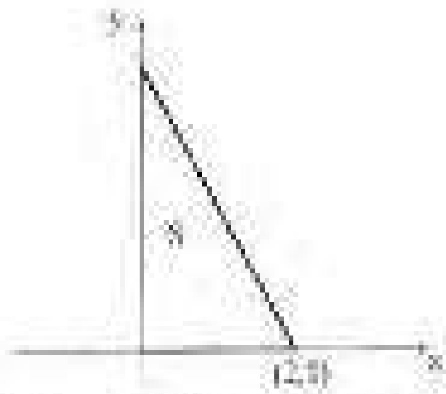
Hitunglah luas permukaan jika S dibatasi oleh $2x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 5.10 S bagian permukaan $3x+y+2z=6$, $x=0$, $y=0$, dan $z=0$.

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.11 D adalah proyeksi S yang dibatasi titik (2,0) dan (0,6)

Persamaan garis yang melalui titik (2,0) dan (0,6) adalah $y=-3x+6$

Dari permukaan $3x+y+2z=6$, maka $z=3-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}x$

Jadi $\quad z=f(x,y)=3-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}x$

Maka $\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{3}{2}$, $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{2}$

$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$

Luas Permukaan $= S = \iint_S dS = \iint_R \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}\, dA$

$$= \iint_R \sqrt{\frac{14}{4}}\, dA$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \iint_R dA$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{-3x+6} dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^{2} y \Big]_0^{-3x+6} dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_0^2 (-3x + 6)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x \right)\Big]_0^2$$

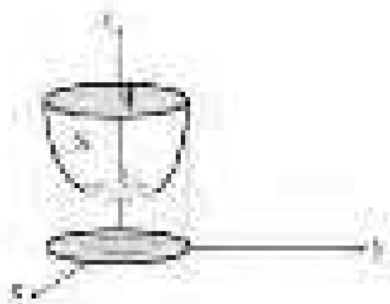
$$= \frac{1}{2}\sqrt{14} \left(-\frac{3}{2}2^2 + 6.2 \right)$$

$= 3\sqrt{14}$ satuan luas

CONTOH 5.6

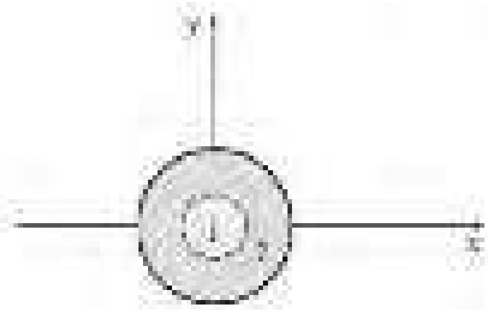
Jika S bagian dari permukaan $z = x^2 + y^2$, yang terletak di antara bidang $z = 1$ dan $z = 4$. Tentukan titik pusat massa S jika rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = kz$, k konstanta.

Penyelesaian:



Gambar 5.12 S bagian permukaan $z = x^2 + y^2$ antara $z = 1$ dan $z = 4$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.13 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$

- Massa $= m = \iint_S \rho\, dS = \iint_S kr\, dS$

$$= \iint_S k\left(x^2 + y^2\right) dS$$

$$= k\iint_R (x^2+y^2)\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,dA$$

$$= k\iint_R (x^2+y^2)\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$$

$$= k\iint_R (x^2+y^2)\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA$$

$$= k\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= k\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{2} r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\right)$$

$$= 2\pi k\left(\int_{r=0}^{2} r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\right)$$

$\int_{r=0}^{2} r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2+1$

$du = 8r\,dr$ maka $\frac{1}{8}du = r\,dr$

$$r^2 = \frac{1}{4}(u-1)$$

Maka

$$\int r^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr = \int \frac{1}{4}(u-1)\sqrt{u}\,\frac{1}{8}\,du$$

$$= \frac{1}{32}\int\left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)du$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\left[4r^2+1\right]^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{80}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}}\Big|_1^2 - \frac{1}{48}\left[4r^2+1\right]^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2$$

$$= 12.983$$

Jadi massa $= 2\pi k \left(\int_{r=1}^{2} r^2\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\right)$

$= 2\pi k\,[12.983] = 25.926\pi k$

- Karena S simetri terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$

Sehingga titik pusat massa $\left(0, 0, \bar{z}\right) = \left(0, 0, \frac{M_{xy}}{m}\right)$

Momen massa terhadap bidang XY :

$$M_{xy} = \iint_S \rho z\, dS = \iint_S kz.z\, dS = \iint_S kz^2\, dS$$

$$= \iint_S k\,(x^2+y^2)^2\, dS$$

$$= k\iint_D (x^2+y^2)^2\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\, dA$$

$$= k\iint_D (x^2+y^2)^2\sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA$$

$$= k\iint_D (x^2+y^2)^2\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dA$$

$$= k\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= k\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{r=1}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\right)$$

$$= 2\pi k\left(\int_{r=1}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\right)$$

$\int_{0}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2 + 1$

$du = 8r\,dr$ maka $\frac{1}{8}du = r\,dr$

$$r^4 = \left(\frac{1}{4}(u-1)\right)^2 = \frac{1}{16}(u^2 - 2u + 1)$$

Maka

$$\int r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = \int \frac{1}{16}(u^2 - 2u + 1)\sqrt{u}\,\frac{1}{8}du$$

$$= \frac{1}{128}\int\left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{128}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{128}\left(\frac{2}{7}\left[4r^2+1\right]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\left(4r^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\int_{0}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr$$

$$= \frac{1}{128}\left(\frac{2}{7}\left[4r^2+\right]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\left[4r^2-1\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\left(4r^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{448}\left[4r^2+1\right]^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{160}\left[4r^2+1\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{192}\left(4r^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$= 37{,}801$$

maka

$$M_{xy} = 2\pi k\left(\int_{0}^{2} r^4\sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\right) = 2\pi k(37{,}801) = 75{,}602\pi k$$

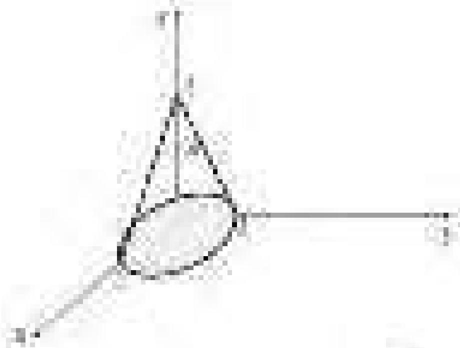
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{75{,}602\pi k}{25{,}926\pi k} = 2{,}916$$

Jadi titik pusat massa $(0, 0, \bar{z}) = (0, 0, 2.916)$

CONTOH 5.7

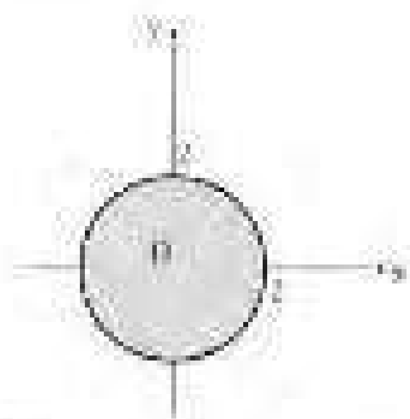
Jika S bagian dari permukaan $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 0$. Tentukan momen massa terhadap bidang XY dan bidang XZ jika rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2}$.

Penyelesaian:



Gambar 5.14 S bagian permukaan $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 0$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.15 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 1}\, dA = \sqrt{2}\, dA$$

- Momen massa terhadap bidang XY :

$$M_o = \iint_S \rho z\, dS = \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2} \cdot z\, dS$$

$$= \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dS$$

$$= 3\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\, dA$$

$$= 3\sqrt{2}\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\,(2 - r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} (2r^2 - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{2} (2r^2 - r^3)\, dr\right)$$

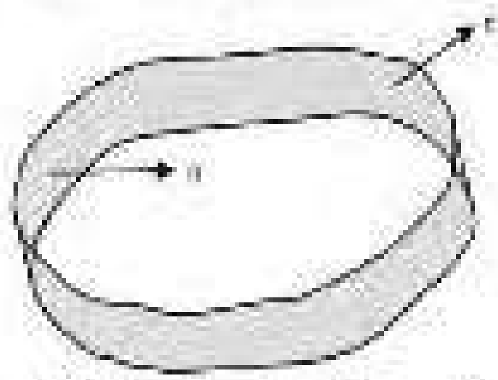
$$= 6\sqrt{2}\pi\left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\right)_0^2$$

$$= 8\sqrt{2}\pi$$

- Momen massa terhadap bidang XZ :

$$
\begin{aligned}
M_{xz} = \iint_S \rho y \, dS &= \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\; y \, dS \\
&= \iint_S 3\sqrt{x^2+y^2}\; y \, dS \\
&= 3\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\; y \sqrt{2}\, dA \\
&= 3\sqrt{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\; y \, dA \\
&= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r\,(r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= 3\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} (r^3 \sin\theta)\, dr\, d\theta \\
&= 3\sqrt{2}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta \, d\theta\right)\left(\int_{r=1}^{2} (r^3)\, dr\right) \\
&= 3\sqrt{2}\pi\,(-\cos\theta)_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4\right)_1^2 \\
&= -\frac{3}{4}\sqrt{2}\pi\,(\cos\theta)_0^{2\pi}(r^4)_1^2 \\
&= -12\sqrt{2}\pi(\cos 2\pi - \cos 0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5.4 Fluks Medan Vektor yang Melalui Permukaan S



Gambar 5.15 Permukaan bersisi satu pita Mobius

Pada permukaan yang bersisi dua seperti pita , dan andaikan terdapat fluida yang dapat mengalir melalui permukaan tersebut dari satu sisi ke sisi yang lain. Andaikan juga permukaan tersebut licin yang berarti mempunyai normal satuan n arah ke atas yang berubah-ubah secara kontinu. Jika S adalah permukaan yang bersisi dua seperti definisi di atas dan diasumsikan S dicelupkan ke dalam fluida dengan medan kecepatan kontinu $F(x,y,z)$, maka :(Lapidus, 1968)scientists, and engineers should find the book to be an excellent introductory text for coursework or self-study as well as worth its shelf space for reference." —MAA ReviewsApplied Mathematics, Fourth Edition is a thoroughly updated and revised edition on the applications of modeling and analyzing natural, social, and technological processes. The book covers a wide range of key topics in mathematical methods and modeling and highlights the connections between mathematics and the applied and natural sciences.The Fourth Edition covers both standard and modern topics, including scaling and dimensional analysis; regular and singular perturbation; calculus of variations; Green's functions and integral equations; nonlinear wave propagation; and stability and bifurcation. The book provides extended coverage of mathematical biology, including biochemical kinetics, epidemiology, viral dynamics, and parasitic disease. In addition, the new edition features:Expanded coverage on orthogonality, boundary value problems, and distributions, all of which are motivated by solvability and eigenvalue problems in elementary linear algebraAdditional MATLAB® applications for computer algebra system calculationsOver 300 exercises and 100 illustrations that demonstrate important conceptsNew examples of dimensional analysis and scaling along with new tables of dimensions and

units for easy referenceReview material, theory, and examples of ordinary differential equationsNew material on applications to quantum mechanics, chemical kinetics, and modeling diseases and virusesWritten at an accessible level for readers in a wide range of scientific fields, Applied Mathematics, Fourth Edition is an ideal text for introducing modern and advanced techniques of applied mathematics to upper-undergraduate and graduate-level students in mathematics, science, and engineering. The book is also a valuable reference for engineers and scientists in government and industry.","author":[{"dropping-particle":"","family":"Lapidus","given":"Leon","non-dropping-particle":"","parse-names":false,"suffix":""}],"container-title":"Industrial and Engineering Chemistry","id":"ITEM-1","issued":{"date-parts":[["1968"]]},"title":"Applied mathematics","type":"article-journal"},"uris":["http://www.mendeley.com/documents/?uuid=7ae05548-fb83-4cb1-90f7-dadeecca3f18"]}],"mendeley":{"formattedCitation":"(Lapidus, 1968

Fluks yang menyeberangi S adalah $= \iint_S F \cdot n\, dS$

Note: Fluks dengan cara di atas disebut cara langsung

TEOREMA

Misalkan S adalah permukaan mulus bernilai dua yang dibentuk oleh $z = f(x, y)$, dimana (x,y) ada di dalam D, dan misalkan n melambangkan normal satuan k arah atas pada S. Jika f mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $F = Mi + Nj + Pk$ adalah medan vektor kontinu, maka fluks F yang menyeberangi S dapat dinyatakan dengan:

$$\text{Fluks F} = \iint_S F \cdot n\, dS = \iint_R \left[-Mf_x - Nf_y + P\right] dA$$

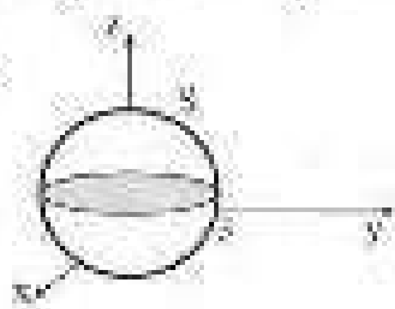
CONTOH 5.8

Hitung fluks arah ke atas dari $F(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ yang menyeberangi bagian dari permukaan bola S yang dibentuk oleh $z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $0 \le x^2 + y^2 \le 4$ dengan menggunakan:

a. Cara Langsung

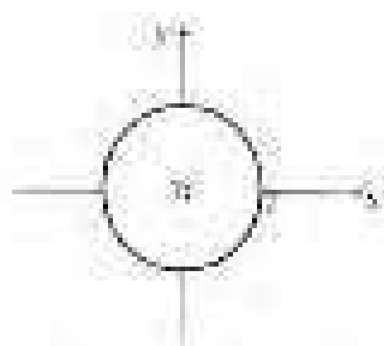
b. Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.17 S bagian permukaan

Proyeksi S terhadap bidang XY adalah $0 \le x^2 + y^2 \le 4$ diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.18 Proyeksi D dibatasi $0 \le x^2 + y^2 \le 4$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif,

$$z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{x}{z}$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}}\, dA = \frac{3}{z}\, dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$H(x, y, z) = z - f(x, y)$

$$= z - \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$\bullet\ n = \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right) i + \left(\frac{y}{z}\right) j + k}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right) i + \left(\frac{y}{z}\right) j + k}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\frac{3}{z}}$$

$$= \left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$= \iint_S F \cdot n \, dS$$

$$= \iint_S (-yi + xj + k) \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k\right) dS$$

$$= \iint_D (-yi + xj + k) \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k\right)\frac{3}{z} \, dA$$

$$= \iint_D dA$$ (Luas lingkaran D dengan jari-jari = r = 2)

$= 4\pi$ satuan kubik

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = -yi + xj + k$ maka $M = -y$, $N = x$, $P = 1$

Maka

Fluks F = $\iint F \cdot n \, dS$ = $\iint_D \left[-Mf_x - Nf_y + P\right] dA$

$$\iint_D \left[y\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right) - x\left(\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right) + 1 \right] dA$$

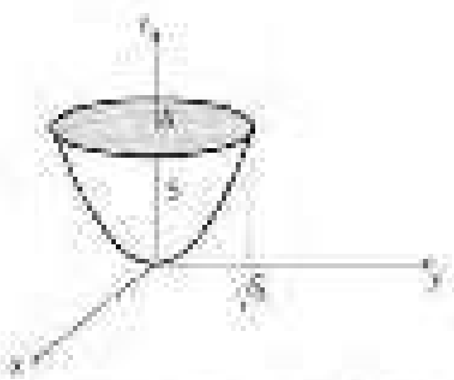
= $\iint dA$ (adalah Luas lingkaran D dengan jari-jari = r = 2)

= 4π satuan kubik

CONTOH 5.9

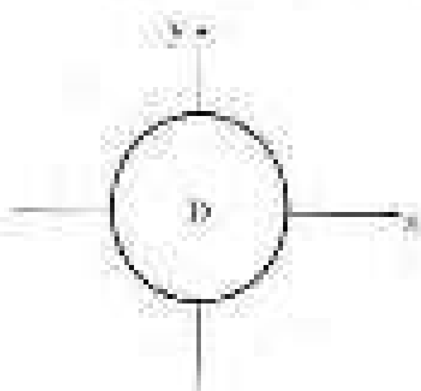
Hitung fluks arah ke atas dari $F(x,y,z) = -2xi + 4k$ yang menyeberangi permukaan S yang dibatasi $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$ dengan menggunakan:
a. Cara Langsung
b. Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.19 S bagian permukaan $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.20 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 6$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x,\quad f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$H(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$= z - (x^2 + y^2) = z - x^2 - y^2$$

$$n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$$

$$= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$$

$$= (-2xi - 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}\right)$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan:

$$= \iint_S F \cdot n\, dS$$

$$= \iint_S (-2yi - 4k) \cdot \left[(-2xi - 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} \right) \right] dS$$

$$= \iint_R (-2yi - 4k) \cdot \left[(-2xi - 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} \right) \right] \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dA$$

$$= \iint_R (4xy + 4)\, dA$$

$$= 4\iint_R (xy + 1)\, dA$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left[(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 1 \right] r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left(r^3 \cos\theta \sin\theta + r \right) dr\, d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3\, dr + 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta\, d(\sin\theta) \int_0^{\sqrt{6}} r^3\, dr + 4\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{6}} r\, dr$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta \right)\Big]_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \right)\Big]_0^{\sqrt{6}} - 4(\theta)\Big]_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \right)\Big]_0^{\sqrt{6}}$$

$$= 0 - 4(2\pi)\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \right)$$

$= 24\pi$ satuan kubik

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x,y,z) = -2yi + 4k$ maka $M = -2y$, $N = 0$, $P = 4$

Maka

$$\text{Fluks F} = \iint_S F \cdot n\, dS = \iint_R \left[-M f_x - N f_y + P\right] dA$$

$$= \iint_{S_{xy}} \left[2y(2x) - 0 + 4\right] dA$$

$$= \iint_S \left[4xy + 4\right] dA$$

$$= 4\iint_S (xy + 1)\, dA$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left[(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 1\right] r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left(r^3 \cos\theta \sin\theta + r\right) dr\, d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3\, dr + 4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}} r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta\, d(\sin\theta) \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3\, dr + 4\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r\, dr$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{6}} + 4(\theta]_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{6}}$$

$$= 0 + 4(2\pi)\left(\frac{1}{2}\cdot 6\right)$$

$$= 24\pi \text{ satuan kubik}$$

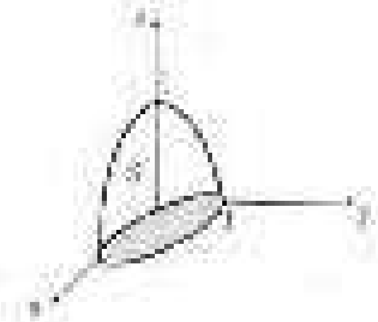
CONTOH 5.10

Hitunglah fluks medan vektor $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yang menyeberangi S bagian dari paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ yang terletak di atas bidang xy, dengan n vektor normal ke arah atas. Selesaikan dengan menggunakan:

a. Cara Langsung

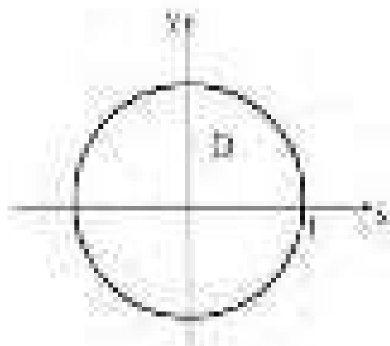
b. Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.21 S bagian permukaan $z = 1-\left(x^2+y^2\right)$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.22 Proyeksi D dibatas $x^2 + y^2 = 1$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x,y) = 1-\left(x^2+y^2\right)$$

Maka $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$H(x, y, z) = z - f(x, y)$

$$= z - [1 - (x^2 + y^2)]$$

$$= z - 1 + x^2 + y^2$$

$$n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$= \frac{(2x)i + (2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$$

$$= \frac{2xi + 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$$

$$= (2xi + 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}\right)$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$= \iint_S F.n\, dS$$

$$= \iint_S (xi + yj + zk).\left((2xi + 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}\right)\right) dS$$

$$= \iint_R (xi + yj + zk)\cdot\left[(2xi + 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\right)\right]\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA$$

$$= \iint_R (2x^2 + 2y^2 + z)\,dA$$

$$= \iint_R (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2)\,dA$$

$$= \iint_R (x^2 + y^2 + 1)\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 + 1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3 + r)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^3 + r)\,dr$$

$$= \left(\theta\right]_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right]_0^1$$

$$= (2\pi)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$= \frac{3}{2}\pi$ satuan kubik

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = xi + yj + zk$ maka $M = x$, $N = y$, $P = z$

Maka

Fluks F = $\iint_S F\cdot n\,dS = \iint_R \left[-Mf_x - Nf_y + P\right]dA$

$$= \iint_R \left[-x(-2x) - y(-2y) + z\right]dA$$

$$= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + z)\,dA$$

$$= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2)\,dA$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2 + 1)\,dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r^2 + 1)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 + r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^3 + r)\, dr$$

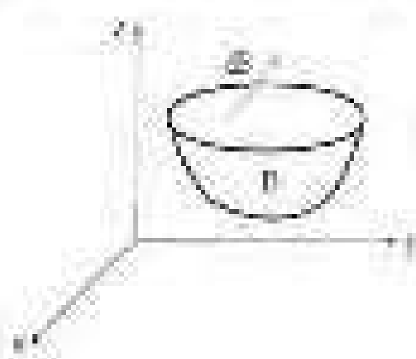
$$= \left(\theta\big|_0^{2\pi}\right)\left(\left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^1\right)$$

$$= (2\pi)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \text{ satuan kubik}$$

5.5 Teorema Divergensi Gauss

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang ditutupi oleh permukaan yang licin bagian demi bagian. (Wahyuni, 2017)



Gambar 5.23 Ruang B yang ditutupi permukaan ∂B

Teorema Divergensi Gauss

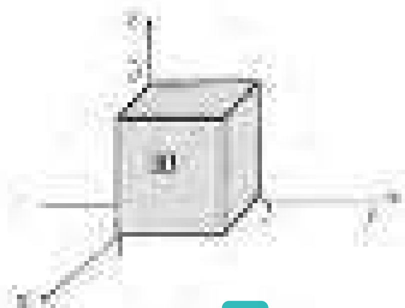
Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ suatu medan vektor dengan M, N dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada S dan ∂S. Jika $\mathbf{n}$ vektor normal satuan keluar pada ∂S, maka

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_S \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_S \left[\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right]dV$$

CONTOH 5.31

Hitung fluks dari medan vektor $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + yz^3\,\mathbf{k}$ melalui permukaan kotak tegak $D = \{(x,y,z): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$ dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss.

Penyelesaian:



Gambar 5.24 Benda B yang dibatasi $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_S \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_S \left[\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right]dV$$

$$= \iiint_S \left[2xy + 0 + 3yz^2\right]dV$$

$$= \int_0^1\int_0^2\int_0^3 (2xy + 3yz^2)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^2 \left[2xyz + yz^3\right]_0^3\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (6xy + 27y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(3xy^2 + \frac{27}{2}y^2 \right)\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 (12x + 54)\,dx$$

$$= 6x^2 + 54x\Big|_0^1 = 60$$

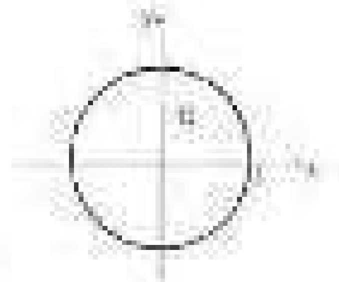
CONTOH 5.12

Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 3$. Jika n adalah vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $F(x,y,z) = (x^3 + \tan yz)\,i + (y^3 - e^{xz})\,j + (3z + x^3)\,k$ maka hitung fluks dari F melalui ∂B.

Penyelesaian :

Gambar 5.25 Benda B yang dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 3$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.28 Proyeksi D di bidang $x^2 + y^2 = 4$

$$div\,F = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + \tan yz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 - e^{xz}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(3z + x^3\right)$$

$$= \left(3x^2 + 3y^2 + 3\right)$$

$$= 3\left(x^2 + y^2 + 1\right)$$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\iint_S F \cdot n\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$= 3\iiint_D \left[\left(x^2 + y^2 + 1\right)\right] dV \quad \text{(gunakan koordinat silinder)}$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 \left(r^2 + 1\right) r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^2\int_0^3 \left(r^3 + r\right) dz\,dr$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^2 \left(r^3 + r\right) z\,\Big]_0^3\,dr$$

$$= 18\pi\left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right)\Big]_0^2$$

$$= 108\pi \text{ satuan kubik}$$

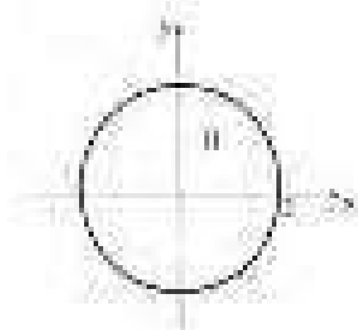
CONTOH 5.13

Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$. Jika n adalah vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $F(x, y, z) = (x^3 + 2yz)i + (3y^2 - 3x)j + (9z + 4x^2)k$ maka hitung fluks dari F melalui ∂B.

Penyelesaian:

Gambar 5.27 Benda B yang dibatasi silinder $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$

Proyeksi B terhadap bidang xy diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.28 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3 - 4x) + \frac{\partial}{\partial z}(9z + 4x^2)$$

$$= (3x^2 + 6y^2 + 9)$$

$$= 3\,(x^2 + 2y^2 + 3)$$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\iint_S F \cdot n\,dS = \iiint_R \operatorname{div} F\,dV$$

$$= 3\iiint_R \left[(x^2 + 2y^2 + 3)\right] dV \quad \text{(gunakan koordinat silinder)}$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta + 3)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^3\cos^2\theta + 2r^3\sin^2\theta + 3r)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (r^3\cos^2\theta + 2r^3\sin^2\theta + 3r)\,z\Big|_0^3\,dr\right) d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (r^3\cos^2\theta + 2r^3\sin^2\theta + 3r)\,dr\right) d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta + \frac{1}{2}r^4\sin^2\theta + \frac{3}{2}r^2\right)\Big|_0^2\,d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta + 8\sin^2\theta + 6)\,d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(4\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] + 8\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] + 6\right) d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\left(\left[2 + 2\cos 2\theta\right] + \left[4 - 4\cos 2\theta\right] + 6\right) d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi}(12 - 2\cos 2\theta)\,d\theta$$

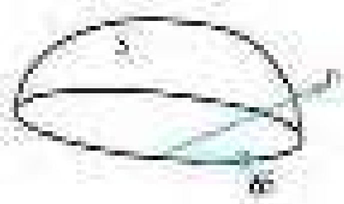
$$= 9\,(12\theta - \sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 9\,(24\pi - 0)$$

$$= 216\pi \text{ satuan kubik}$$

5.6 Teorema Stokes

Misalkan S permukaan dua sisi dengan ∂S (batasnya) merupakan lengkungan sederhana tertutup yang licin bagian demi bagian dan ∂S terorientasi secara konsisten terhadap n (vektor normal satuan arah keluar pada permukaan S), yaitu jika kita berdiri dekat tepi permukaan dengan kepala searah dengan vector n dan jika kita memandang ke arah lengkungan maka permukaan terletak di sebelah kiri kita (Samura & Pangantar, n.d.)



Gambar 5.28 Permukaan S dengan vektor normal n

Teorema Stokes

Misalkan S, ∂S dan n seperti disebutkan di atas. Misalkan $F = Mi + Nj + Pk$ medan vektor dengan M, N, dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada S dan ∂S. Bila T adalah vector satuan singgung pada ∂S, maka

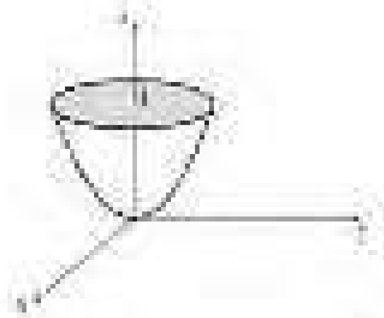
$$\oint_C F \cdot T\, ds = \oint_{\partial S} F \cdot T\, ds = \iint_S (\mathrm{Curl}\, F) \cdot n\, dS$$

CONTOH 5.14

Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $F(x,y,z) = yi - xj + yzk$ jika S adalah permukaan paraboloida

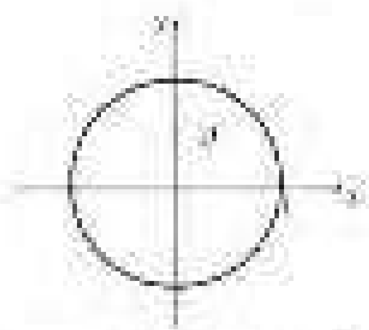
$z = x^2 + y^2$ dengan batas ∂S adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ di bidang $z = 1$.

Penyelesaian:



Gambar 5.30 S bagian permukaan $z = x^2 = y^2$ dan $z = 1$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.31 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$

∂S mempunyai persamaan $x^2 + y^2 = 1$ dan $z = 1$ dan persamaan parameter adalah

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = 1$$

dengan $0 \le t \le 2\pi$ dan $dz = 0$

Ruas Kiri

$$\oint_{\partial S} F.T\, dS = \oint_{C} F.dr$$
$$= \oint_{\partial S} y\, dx - x\, dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[(\sin t)(-\sin t)dt - (\cos t)(\cos t)dt\right]$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t)dt - (\cos^2 t)dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} \left[(\sin^2 t) + (\cos^2 t)\right]dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} dt$$
$$= -2\pi$$

Ruas Kanan

$$\iint_S (Curl\, F).n\, dS$$

$$Curl\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix}$$
$$= zi - 2k$$
$$\rightarrow z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$H(x,y,z) = z - f(x,y)$$
$$= z - x^2 - y^2$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dA$$

$$n = \frac{\nabla H}{H} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$$

$$= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$$

$$= (-2xi - 2yj + k)\left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}\right)$$

Maka

$$\iint_S (Curl\, F)\cdot n\, dS = \iint_S (zi - 2k)\cdot\left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 - y^2) + 1}}\right) dS$$

$$= \iint_S (zi - 2k)\cdot\left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}\right)\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \left[-2x(x^2 - y^2) - 2\right] dA$$

$$= -2\iint_D \left[x\left(x^2+y^2\right)+1\right] dA$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r\cos\theta\left(r^2\right)+1\right] r\,dr\,d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^4\cos\theta + r\right) dr\,d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5}r^5\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5}\cos\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= -2\left(\frac{1}{5}(\sin\theta) + \frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -2\left(0 + \frac{1}{2}.2\pi\right) = -2\pi$$

Jadi $\oint_C F.T\,dS = \iint_S (Curl\ F).n\,dS$

Maka terbukti kebenaran Teorema Stokes

CONTOH 5.15

Misalkan S bagian dari permukaan bola $x^2+y^2+(z-4)^2=10$ yang terletak di bawah bidang z = 1 dan misalkan $F(x,y,z) = yi - xj + yz\hat{k}$. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (Curl\ F).n\,dS$, dimana n vektor normal satuan arah keluar.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa ∂S adalah lingkaran $x^2+y^2+(1-4)^2=10$

$x^2+y^2=1$ (lingkaran yang berjari-jari 1)

(Penyelesaian seperti contoh 5.13)

$$\oint_{\partial S} F.T\, dS = -2\pi$$

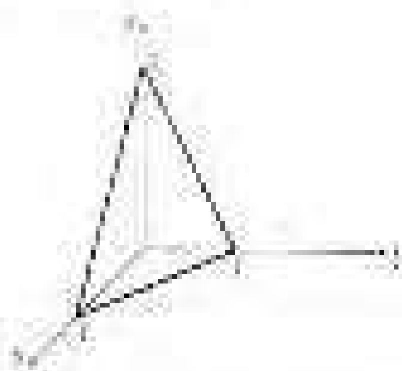
$$\iint_S (Curl\, F).n\, dS = -2\pi$$

CONTOH 5.16

Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\oint_C F.T\, dS$ di-mana $F(x,y,z) = 2z\,i + (8x - 3y)\,j + (3x - y)\,k$ dan C adalah sisi-sisi segitiga yang melalui titik-titik (1,0,0), (0,1,0) dan (0,0,2).

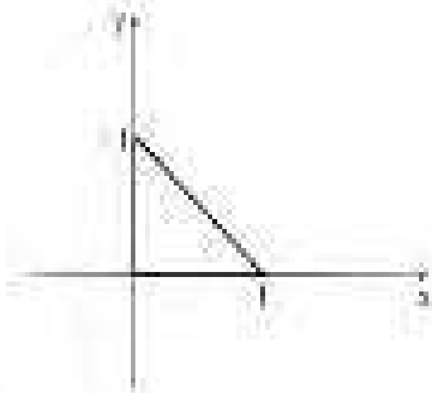
Penyelesaian:

Ambil S permukaan bidang segitiga yang melalui titik-titik (1,0,0), (0,1,0) dan (0,0,2), maka $C = \partial S$



Gambar 5.32 Permukaan ∂S dibatasi (1,0,0), (0,1,0) dan (0,0,2)

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.38 Proyeksi D segitiga melalui (0,0), (1,0) dan (1,1)

Teorema Stokes:

$$\oint_C F.T\,dS = \oint_{\partial S} F.T\,dS = \iint_S (Curl\,F).n\,dS$$

$$Curl\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 8x-3y & 2x+y \end{vmatrix}$$

$$= (1-0)i - (3-2)j + (8-0)k$$

$$= i - j + 8k$$

Vektor n adalah vector normal pada segitiga .
Ambil vector $\vec{a}$ = vector yang melalui titik-titik (1,0,0) dan (0,1,0), yaitu $\vec{a} = (0-1)i + (1-0)j + (0-0)k = -i + j$. Ambil vector $\vec{b}$ = vector yang melalui titik-titik (1,0,0) dan (0,0,2), yaitu $\vec{b} = (0-1)i + (0-0)j + (2-0)k = -i + 2k$.

Maka $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2i - 2j - k$

Jadi

$n = \dfrac{-\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$ (tanda negatif menandakan arahnya keluar)

$= \dfrac{2i + 2j + k}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$

$= \dfrac{2}{3} i + \dfrac{2}{3} j + \dfrac{1}{3} k$

Sehingga

$$\iint_S (Curl\, F) . n\, dS = \iint_S (i - j + 8k) \left(\frac{2}{3} i + \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k \right) dS$$

$$= \iint_S \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right) dS$$

$$= \frac{8}{3} \iint_S dS$$

$$= \frac{8}{3} \text{ (Luas segitiga S)}$$

Ingat bahwa luas segitiga $S = \dfrac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

$= \dfrac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 1}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Jadi

$$\oint_C F.T\,dS = \oint_{C'} F.T\,dS = \iint_S (Curl(F)).n\,dS$$

$$= \frac{8}{3}$$ (Luas segitiga

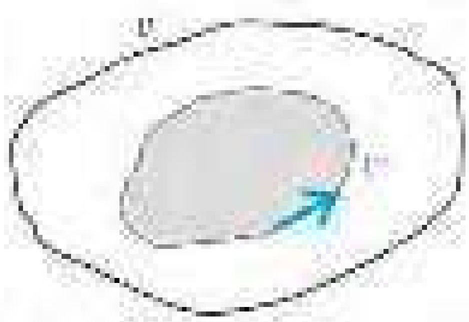
S)

$$= \frac{8}{3}\ \ \frac{3}{2} = 4$$

CONTOH 5.17

Jika F medan vektor konservatif pada daerah D. Tunjukkan bahwa $\oint_C F.dX = 0$ untuk setiap lengkungan tertutup C dalam D.

Penyelesaian:



Gambar 5.36 Lengkungan tertutup C di dalam D

Ambil S permukaan sebarang yang batasnya $\partial S = C$. Maka menurut Teorema Stokes :

Karena F konservatif maka Curl F = 0, sehingga $\oint_C F.dX =$

$$\oint_{C} F\cdot T\,ds = \oint_{C'} F\cdot T\,ds = \iint_{S} (\operatorname{curl} F)\cdot n\,dS = 0$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas presentasi per kelompok yang membahas materi perkuliahan.

LATIHAN 5

1. Hitung $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ jika $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ dan S permukaan bidang $z = x + y + 1$ dengan $0 \le x \le 1$ dan $0 \le y \le 1$.

2. Hitung $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ jika $g(x,y,z) = x + y$ dan S permukaan bidang $z = \sqrt{4 - x^2}$ dengan $0 \le x \le \sqrt{3}$ dan $0 \le y \le 1$.

3. Hitunglah fluks F medan vektor $F = yi - xj + 2k$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \le x \le 5$ dengan menggunakan :
   a. Cara Langsung
   b. Teorema

4. Hitunglah fluks F medan vektor $F(x,y,z) = 2i + 5j + 3k$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, yang berada di dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$.

5. Hitunglah fluks dari medan vektor $F(x,y,z) = xi + yj + zk$ yang menyeberangi $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$ dengan menggunakan Teorema Gauss.

6. Jika $\vec{F}(x,y,z) = (9 - x^2)\,\vec{j}$ adalah medan vector dan S bagian dari permukaan dibatasi $2x + 3y - 6z = 6$ di oktan pertama. Hitunglah fluks yang menyeberangi S dengan menggunakan:
   a. Cara Langsung
   b. Teorema

7. Jika S bagian dari permukaan $z = 9 - x^2 - y^2$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah $\rho = 3(x^2 + y^2)$. Tentukanlah
   a. Luas Permukaan
   b. Massa S
   c. Titik pusat massa S

8. Jika S bagian dari permukaan $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah

   $$\rho = \frac{k}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}, \text{ k konstanta}$$

   Tentukanlah:
   a. Luas Permukaan
   b. Massa S
   c. Titik pusat massa S

9. Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $\vec{F}(x,y,z) = 3y\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + 4z\,\vec{k}$ jika S adalah permukaan paraboloida $z = 4 - (x^2 + y^2)$ dengan batas ∂S adalah lingkaran pada D di bidang z = 2.

10. Jika S bagian dari permukaan $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di atas bidang z = 2 dan misalkan $F(x, y, z) = 2xi + 3yj + 4k$. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung

$$\iint_S (\mathrm{Curl}\, F) \cdot n\, dS$$

Integral dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

ORIGINALITY REPORT

15%	15%	3%	5%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	documents.mx Internet Source	1%
2	vdocuments.mx Internet Source	1%
3	xclmedia.net Internet Source	1%
4	id.scribd.com Internet Source	1%
5	file.upi.edu Internet Source	1%
6	docslide.us Internet Source	1%
7	www.slideshare.net Internet Source	1%
8	Submitted to Universiti Teknologi Malaysia Student Paper	1%
9	es.scribd.com Internet Source	1%
10	doku.pub Internet Source	<1%
11	mecmath.net Internet Source	<1%
12	vaskoedo.wordpress.com Internet Source	<1%
13	blog.ub.ac.id Internet Source	<1%

14	ee.istanbul.edu.tr Internet Source	<1%
15	dspace.uii.ac.id Internet Source	<1%
16	www.coursehero.com Internet Source	<1%
17	docplayer.info Internet Source	<1%
18	foe.mmu.edu.my Internet Source	<1%
19	slidegur.com Internet Source	<1%
20	trenndeirasaid.blogspot.com Internet Source	<1%
21	imada.sdu.dk Internet Source	<1%
22	nanopdf.com Internet Source	<1%
23	fr.slideshare.net Internet Source	<1%
24	qdoc.tips Internet Source	<1%
25	repository.uhamka.ac.id Internet Source	<1%
26	www.cyut.edu.tw Internet Source	<1%
27	123dok.com Internet Source	<1%
28	ismail_muchsin.staff.gunadarma.ac.id Internet Source	<1%
	esa148.weblog.esaunggul.ac.id	

29	Internet Source	<1 %
30	edoc.pub Internet Source	<1 %
31	docobook.com Internet Source	<1 %
32	edoc.site Internet Source	<1 %
33	slideum.com Internet Source	<1 %
34	koivu.oulu.fi Internet Source	<1 %
35	Submitted to Sheffield Hallam University Student Paper	<1 %
36	imath.mathematik.tu-ilmenau.de Internet Source	<1 %
37	macs.citadel.edu Internet Source	<1 %
38	www.math.wisc.edu Internet Source	<1 %
39	www.math.zju.edu.cn Internet Source	<1 %
40	www.sc.ehu.es Internet Source	<1 %
41	euclid.ucc.ie Internet Source	<1 %
42	www.icmc.sc.usp.br Internet Source	<1 %
43	Submitted to Queen Mary and Westfield College Student Paper	<1 %

44	ebin.pub Internet Source	<1 %
45	David M. Bressoud. "Second Year Calculus", Springer Science and Business Media LLC, 1991 Publication	<1 %
46	Peter D. Lax, Maria Shea Terrell. "Multivariable Calculus with Applications", Springer Science and Business Media LLC, 2017 Publication	<1 %
47	eprints.undip.ac.id Internet Source	<1 %
48	idoc.pub Internet Source	<1 %
49	uasuan.blogspot.com Internet Source	<1 %
50	www.math.lsu.edu Internet Source	<1 %
51	repository.iainpare.ac.id Internet Source	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 15 words
Exclude bibliography	On		