

Buku ajar dengan judul "Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3" merupakan lanjutan dari buku ajar Integral Fungsi Satu Variabel dan Penerapannya yang sudah terbit sebelumnya. Buku ini disusun menggunakan referensi dari berbagai literatur buku dan E-book. Materi di buku ini dijelaskan secara rinci sehingga mudah dipelajari juga disertakan contoh-contoh soal dengan penyelesaiannya yang lebih memudahkan untuk dipahami.

Topik-topik yang dibahas dalam buku ini adalah: Integral Lipat Dua dalam Koordinat Cartesien dan Koordinat Polar serta aplikasinya, Integral Lipat Tiga dalam Koordinat Cartesien dan Koordinat Silinder serta aplikasinya, Kalkulus Vektor yang membahas perkalian skalar dan Cross, Integral Garis yang meliputi Teorema Green, Ketaktergantungan lintasan, aplikasinya menentukan fluks dan divergensi dan materi terakhir membahas Integral Permukaan serta aplikasinya untuk menentukan fluks dan divergensi. Materi ini disusun dan disesuaikan dengan Rancangan Pembelajaran Pokok (RPP) dan Rencana Pembelajaran Semester (RPS) yang digunakan di Prodi Teknik Perminyakan Universitas Trisakti.

Pada Program Studi Teknik Perminyakan Universitas Trisakti materi-materi pada buku ini terdapat pada matakuliah Matematika 3 yang disajikan di semester 3 dimana sebelumnya sudah lulus matakuliah Matematika 1 dan Matematika 2. Buku ini juga dapat digunakan untuk mahasiswa teknik Sipil, Elektro, Mesin dan Informatika.

ISBN 978-602-0750-18-3



MATEMATIKA Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

Dra. Lisa Samura, MT
Dra. Mustamina Maulani, MT
Cahaya Rosyidan, S.Si, M.Sc

MATEMATIKA

Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3



PENERBIT UNIVERSITAS TRISAKTI, JAKARTA

MATEMATIKA

INTEGRAL DALAM RUANG DIMENSI 2 DAN 3

DRA. LISA SAMURA, MT
DRA. MUSTAMINA MAULANI, MT
CAHAYA ROSYIDAN, S.SI, MSC

MATEMATIKA

INTEGRAL DALAM RUANG DIMENSI 2 DAN 3



Penerbit Universitas Tri-

Hak Cipta dilindungi oleh Undang-Undang.

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian maupun keseluruhan isi buku ini dalam bentuk apapun, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Judul Buku : Matematika integral dalam ruang dimensi 2 dan 3

Penulis : Lisa Samura, Mustamina Maulani, Cahaya Rosyidan

Diterbitkan Oleh : Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta

Cetakan Pertama :

ISBN : 978-602-0750-16-3

Sanksi Pelanggaran :

Pasal 72 Undang-Undang No. 19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan atau denda paling sedikit Rp 1.000.000,- (satu juta rupiah) atau penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan atau denda paling banyak Rp. 5.000.000.000,- (lima miliar rupiah).
2. Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak terkait sebagaimana dimaksud dalam ayat (1), dipidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan atau denda paling banyak Rp 500.000.000,- (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat, rezeki dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar Matematika dengan judul "Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3 yang menjadi referensi untuk mata kuliah Matematika 3". Buku ini merupakan lanjutan dari buku Integral Fungsi Satu Variabel dan Penerapannya yang sudah diterbitkan sebelumnya dan dilengkapi dengan contoh-contoh soal dengan penyelesaian yang runut sehingga lebih mudah dimengerti. Harapan penulis buku ini dapat membantu mahasiswa lebih mudah memahami teori dan aplikasi Matematika 3.

Materi buku ajar ini terdiri dari : Integral Lipat Dua dan aplikasinya, Integral Lipat Tiga dan aplikasinya, Kalkulus Vektor, Integral Garis dan Integral Permukaan. Buku ini ditulis dengan bahasa yang mudah dimengerti dan dipahami oleh mahasiswa dan pembaca pada umumnya. Selain itu, diharapkan juga buku ini dapat menambah khazanah keilmuan pada bidang matematika.

Buku ini dapat tersusun dengan baik karena bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Afiat Anugrahadi, MS, Dr. Ir. Muhammad Burhannuddinur, MSc dan Dr. Ir. M. Ali Jambak, MT. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rosyida Permatasari, Ph.D dan Dr. M. Supriadi, MT

sebagai *reviewer* dan Maman Djumantara, ST, MT yang telah membantu penulis untuk mengoreksi buku ajar ini.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan buku ajar ini karena penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini masih belum sempurna. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi kita semua.

Jakarta, 15 November 2019

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii
BAB I INTEGRAL LIPAT DUA	1
1.1 Konsep Integral Lipat Dua	2
1.1.1 Definisi Integral Lipat Dua	3
1.1.2 Eksistensi Integral Lipat Dua.....	4
1.1.3 Sifat-sifat Integral Lipat Dua.....	5
1.1.4 Arti Geometris Integral Lipat Dua	6
1.2 Integral Lipat Dua Koordinat Cartesien.....	6
1.2.1 Tafsiran Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Cartesia	6
1.3 Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Kutub (Polar). 14	
1.3.1 Beberapa Daerah D yang Berhubungan dengan Koordinat Polar	17
1.4 Aplikasi Integral Lipat Dua.....	21
Latihan 1.....	32
BAB 2 INTEGRAL LIPAT TIGA.....	35
2.1 Gambar-gambar Bidang di Ruang Tiga Dimensi ..	36
2.1.1 Konsep Integral Lipat Tiga	38
2.1.2 Definisi Integral Lipat Tiga.....	39
2.1.3 Eksistensi Integral Lipat Tiga	40

2.1.4	Sifat-sifat Integral Lipat Tiga.....	40
2.2	Integral Lipat Tiga Koordinat Kartesian	41
2.3	Integral Lipat Tiga Dalam Koordinat Silinder/Tabung	47
2.4	Aplikasi Integral Lipat Tiga.....	53
	Latihan 2.....	63
BAB 3	KALKULUS VEKTOR.....	65
3.1	Fungsi Bernilai Vektor	65
3.2	Diferensial Vektor	67
3.3	Operasi Fungsi	67
3.4	Gradien, Divergensi dan Curl	69
3.4.1	Operator Diferensial Nabla.....	69
3.4.2	Gradien.....	70
3.4.3	Divergensi F / $\text{Div } F$	70
3.4.4	Curl F	72
	Latihan 3.....	81
BAB 4	INTEGRAL GARIS	83
4.1	Integral Garis Medan Skalar.....	83
4.2	Definisi Integral Garis	84
4.3	Menghitung.....	84
4.4	Integral Garis Medan Vektor	87
4.5	Aplikasi Integral Garis.....	92
4.6	Ketaktergantungan Lintasan	95
4.7	Teorema Green pada Bidang.....	102
4.8	Fluks dan Sirkulasi.....	106
4.8.1	Fluks F melalui C	106
4.8.2	Sirkulasi F melalui C	107
	Latihan 4.....	111

BAB 5 INTEGRAL PERMUKAAN	115
5.1 Pengertian Integral Permukaan.....	115
5.2 Tafsiran Integral Permukaan.....	117
5.3 Aplikasi Integral Permukaan	121
5.4 Fluks Medan Vektor yang Melalui Permukaan S.....	132
5.5 Teorema Divergensi Gauss	144
5.6 Teorema Stokes	150
Latihan 5.....	159
DAFTAR PUSTAKA	163
BIODATA PENULIS	167
Lampiran 1 GLOSARIUM	169
Lampiran 2 INDEKS.....	171

BAB 1

INTEGRAL LIPAT DUA

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami konsep Integral lipat dua Koordinat Cartesien dan mampu menyelesaikan integralnya.
2. Memahami konsep Integral lipat dua Koordinat Polar dan mampu menyelesaikan integralnya.
3. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi Integral lipat dua.

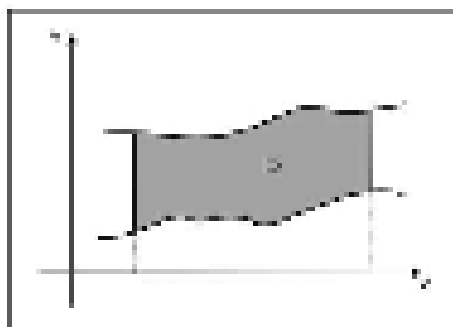
Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral lipat dua di R^2 yang merupakan lanjutan dari integral yang sudah dipelajari pada kalkulus dasar. Integral lipat dua terdiri dari integral lipat dua dalam Koordinat Cartesien dan Koodinat Polar. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat dua untuk menentukan luas daerah, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda. (Lapidus, 1968)

1.1 Konsep Integral Lipat Dua

Jika D suatu daerah di bidang XY dan $f(x,y)$ fungsi yang didefinisikan pada D maka konsep Integral lipat dua dari fungsi $f(x,y)$ pada D adalah

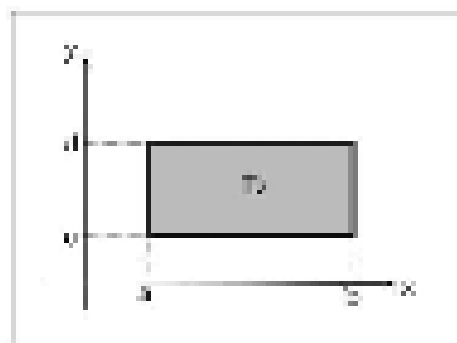
$\iint_D f(x,y) \, dA$ dimana dA adalah diferensial elemen luas (Kreyzig, Kreyzig, & Norminton, 2011) .



Gambar 1.1 Konsep Integral Lipat Dua

CONTOH 1.1

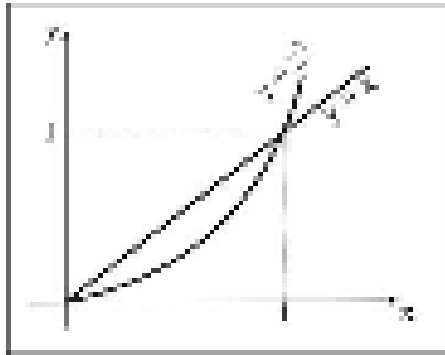
Jika diketahui $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ dan fungsi pada D adalah $f(x,y) = x^2 + xy$. Maka integral lipat dua dari $f(x,y)$ pada D $\iint_D f(x,y) \, dA$



Gambar 1.2 Daerah $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

CONTOH 1.2

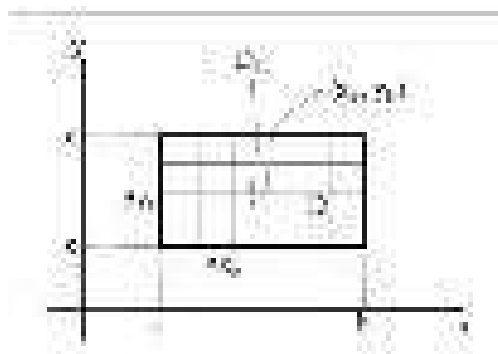
Jika diketahui $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2\}$ dan fungsi pada D adalah $f(x,y) = \sin xy$. Maka integral lipat dua dari $f(x,y)$ pada D adalah



Gambar 1.3. Daerah $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2\}$

1.1.1 Definisi Integral Lipat Dua

Misalkan $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ suatu daerah empat persegi panjang di bidang xy , seperti diilustrasikan pada gambar di bawah.



Gambar 1.4 Definisi Integral Lipat Dua (KREYSZIG et al., 2011)

Bagi empat persegi panjang D menjadi n buah persegi panjang kecil kecil D_k . Misalkan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi D_k . Maka luas D_k adalah $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Selanjutnya ambil titik (x_k, y_k) di dalam D_k dan bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Dimana $f(x,y)$ suatu fungsi yang didefinisikan pada D .

Sebut $|P|$ maksimum panjang diagonal D_k , $k = 1, 2, \dots, n$ dan $|P|$ dikenal sebagai norm partisi P .

Contoh 1.1.1

Bila $f(x,y) = 1$ pada $D = [0,1] \times [0,1]$ maka

$\iint_D f(x,y) dA = \iint_D 1 dA = \int_0^1 \int_0^1 1 dx dy = \int_0^1 x \Big|_0^1 dy = \int_0^1 1 dy = y \Big|_0^1 = 1$

1.1.2 Eksistensi Integral Lipat Dua

Bila f didefinisikan dan terbatas pada empat persegi panjang D dan jika f kontinu pada D maka integral lipat dua (Thomas, Weir, & Hass, 2009)

$$\iint_D f(x,y) dA$$

Harus diperhatikan syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya f masih bisa diskontinu pada sejumlah berhingga lengkungan-lengkungan licin yang mempunyai turunan. Selanjutnya dalam masalah ini hanya fokus pada fungsi f yang

CONTOH 1.3

Diketahui $f(x,y) = \sin xy$ dan $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4\}$. Karena f kontinu dalam D maka $\iint_D f(x,y) dA$ ada.

1.1.3 Sifat-sifat Integral Lipat Dua

Misalkan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ adalah fungsi-fungsi pada daerah D dan c adalah konstanta bilangan Real. (Mathematics, n.d.)

Sifat penting yang dipenuhi oleh integral lipat dua

1. $\int_D (af(x,y) + bg(x,y)) dA = a \int_D f(x,y) dA + b \int_D g(x,y) dA$
2. $\int_D (f(x,y) + g(x,y)) dA = \int_D f(x,y) dA + \int_D g(x,y) dA$
3. $\int_D cf(x,y) dA = c \int_D f(x,y) dA$
4. $\int_D f(x,y) dA = \int_{D_1} f(x,y) dA + \int_{D_2} f(x,y) dA$
5. $\int_D f(x,y) dA = \int_{D_1} f(x,y) dA + \int_{D_2} f(x,y) dA$

CONTOH 1.4

$$\iint_D 15(x^2 + 3xy) dA = 15 \iint_D x^2 dA + 15 \iint_D 3xy dA$$

CONTOH 1.5

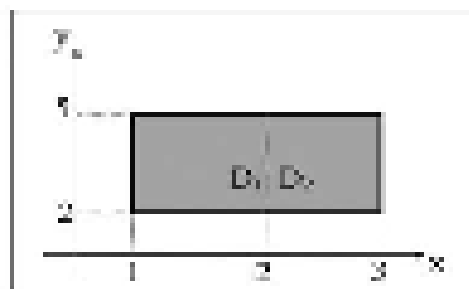
Jika diketahui $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

Misalkan $D_1 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 5\}$

dan $D_2 = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

Maka

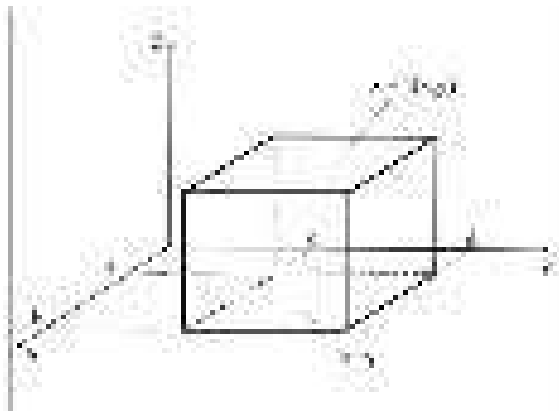
$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$$



Gambar 1.5 Daerah $D = D_1 \cup D_2$

1.1.4 Arti Geometris Integral Lipat Dua

Jika $f(x,y) \geq 0$ dan f didefinisikan pada $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ maka $\iint_D f(x,y) dA$ adalah volume benda pejal yang terletak di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas empat persegi panjang D . Empat persegi panjang D berada di atas bidang XOY yang juga merupakan proyeksi dari volume benda pejal terhadap bidang XOY. (Penerapannya,



Gambar 1.6 Arti geometris Integral Lipat Dua

1.2 Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

1.2.1 Tafsiran Integral Lipat Dua dalam Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D .

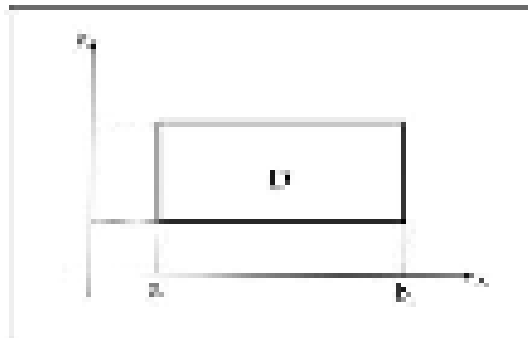
1. Jika D daerah yang dibatasi oleh $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, maka integral lipat dua dapat dinyatakan

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x,y) dy dx$$

Integral ruas kanan disebut juga integral berulang f terhadap y dahulu kemudian diintegrasikan terhadap x .

Integral lipat dua di atas juga dapat ditulis dalam bentuk integral berulang f terhadap x dahulu kemudian diintegrasikan terhadap y , dan dapat dinyatakan dalam bentuk

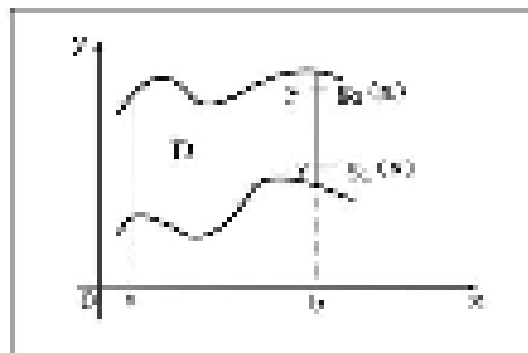
$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$



Gambar 1.7 Tafsiran I Integral Lipat Dua

2. Jika D daerah yang dibatasi $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$,

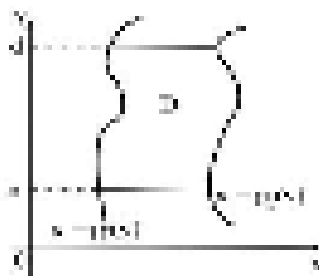
$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$



Gambar 1.8. Tafsiran II Integral Lipat Dua

3. Jika D daerah yang dibatasi $p_1(y) \leq x \leq p_2(y)$, $c \leq y \leq d$,

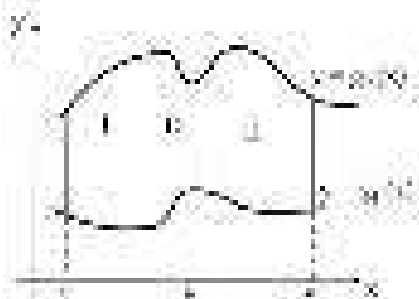
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$



Gambar 1.9. Tafsiran III Integral Lipat Dua

4. Jika $D = D_1 \cup D_2$, dimana D_1 dibatasi $a \leq x \leq b$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ dan D_2 dibatasi oleh $b \leq x \leq c$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Misalkan $f(x,y)$ fungsi yang bekerja pada D maka

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx + \int_b^c \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx \end{aligned}$$

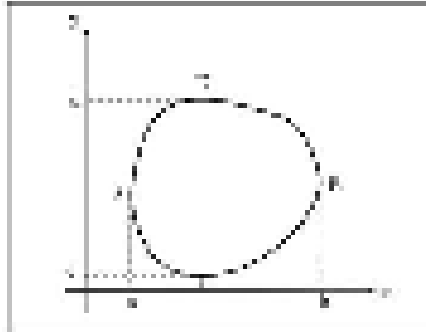


Gambar 1.10. Tafsiran IV Integral Lipat Dua

CONTOH 1.6

Tafsirkan $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} =$
 $\{(x,y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Penyelesaian



Gambar 1.11 Daerah D dibatasi 4 lengkungan

Dari gambar di atas misalkan:

$y = g_1(x)$	adalah lengkungan ACB
$y = g_2(x)$	adalah lengkungan ADB
$x = h_1(y)$	adalah lengkungan CAD
$x = h_2(y)$	adalah lengkungan CBD

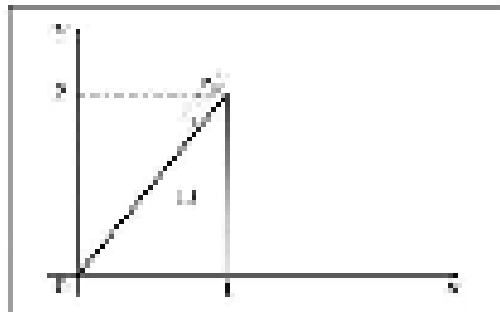
Maka tafsiran $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$

atau $= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$

CONTOH 1.7

Tafsirkan $\iint_D f(x,y)dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = 2x$, $x = 1$ dan sumbu x

Penyelesaian:



Gambar 1.12 Daerah D dibatasi $y=2x$, $x=1$ dan sumbu x

dengan mengundi $y = 2x$ maka $x = \frac{1}{2}y$

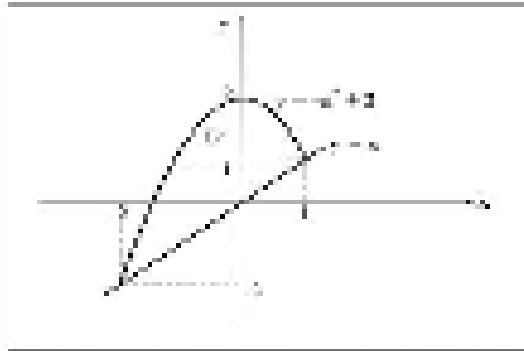
$$\text{maka} \quad \iint_D f(x,y) dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} f(x,y) dy dx$$

$$\text{atau} \quad \int_{y=0}^2 \int_{x=\frac{1}{2}y}^1 f(x,y) dx dy$$

CONTOH 1.8

Tafsirkan $\iint_D f(x,y) dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

Penyelesaian:



Gambar 1.13 Daerah D yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

Diketahui $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

$$\text{diketahui } y = -x^2 + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\text{maka } x = 1 \text{ dan } x = -2$$

Diketahui $y = -x^2 + 2$ maka $x = \pm\sqrt{2 - y}$

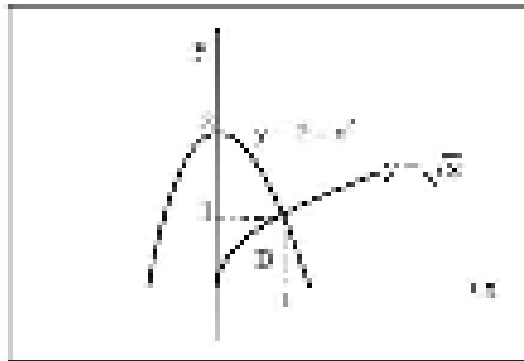
$$\text{maka } \int_{-2}^1 \int_{x=-\sqrt{2-y}}^{x=\sqrt{2-y}} f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-2}^1 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y) dx dy = \int_{-2}^1 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y) dx dy$$

CONTOH 1.9

Diketahui $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} y \, dy \, dx$. Ubahlah batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Penyelesaian :



Gambar 1.14 Daerah D yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = \sqrt{x}$

$$\text{Batas atas dan } y = 2 - x^2 \text{ dan } y = \sqrt{x}$$

$$\text{diketahui } \sqrt{x} = 2 - x^2$$

$$x^4 - 4x + 4 = 0 \text{ atau}$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 4) = 0 \text{ dan } x = 4 \text{ atau}$$

$$\text{maka } x = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^{2-x^2} y \, dy \, dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2-x^2} y \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 (2-x^2) \left(\frac{1}{2} y^2 \right) dx + \int_1^2 (2-x^2) \left(\frac{1}{2} y^2 \right) dx$$

$$= \int_0^1 (2-x^2) dx + \int_1^2 (2-x^2) dx - \int_1^2 (x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (2-x^2) dx + \int_1^2 (2-x^2) dx$$

$$= \left(2x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \left(0 - 0 \right) + \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(2 - \frac{1}{3} \right)$$

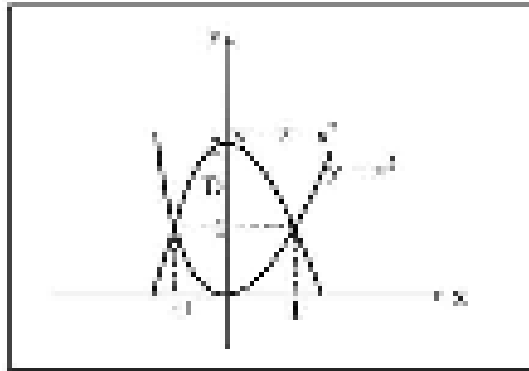
$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \text{ atau } \frac{10}{6}$$

CONTOH 1.10

Diketahui $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} xy \, dy \, dx$. Ubahlah batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Penyelesaian:



Gambar 1.15 Daerah D yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

Sebaliknya $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

diperoleh $x^2 = -x^2 + 2$

$$x^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1 \text{ maka } x = \pm 1$$

dan persamaan lengkung ke 1, agar $y \geq 0$ maka

$$y = 2 - x^2 \text{ maka } x = \pm\sqrt{2 - y}$$

$$y = x^2 \text{ maka } x = \pm\sqrt{y}$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y \right)_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y (\sqrt{2-y})^2 - \frac{1}{2} y (\sqrt{y})^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y (2 - y) dy - \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (2y - y^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1$$

I.3 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub (Polar)

Titik-titik di bidang dapat dinyatakan dalam koordinat Polar $P(r, \theta)$, dimana:

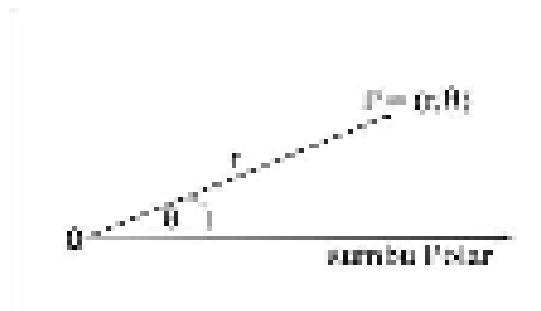
r = jarak titik O dengan P

θ = sudut antara sumbu polar dengan OP

Dengan batasan :

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ atau dengan arah negatif } -\pi \leq \theta \leq \pi$$



Gambar 1.16 Koordinat Polar

Kaitan Koordinat Cartesien dan Koordinat Polar dijabarkan sebagai berikut. Dengan mengambil O sebagai titik polar dan sumbu x positif sebagai sumbu polar diperoleh hubungan (Samura & Pengantar, n.d.)

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

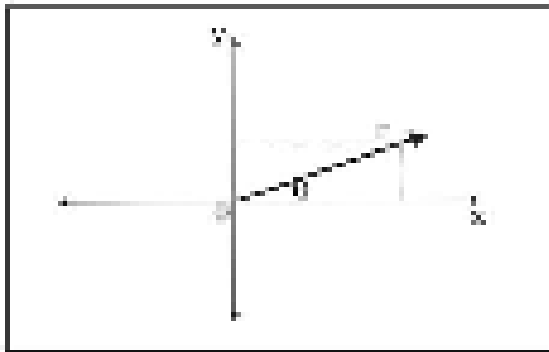
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definisi 1.17. (Metode Jacoby)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

$$(\Delta x \Delta y) = (r \Delta r \Delta \theta) = r \Delta r \Delta \theta$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ (arah θ berlawanan dengan arah jarum jam,
 $\theta = 0^\circ$ adalah sumbu x positif)

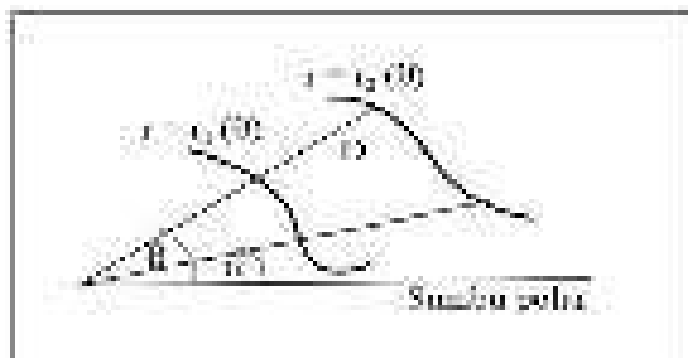


Gambar 1.17. Kaitan Koordinat Cartesian dengan Koordinat Polar

Definisi Integral Lipat Dua Koordinat Polar

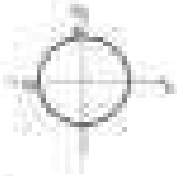
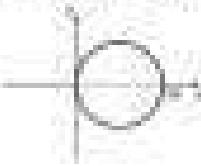
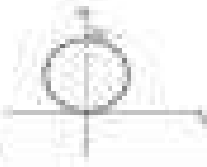
Jika D daerah yang dibatasi oleh $r = r_1(\theta)$ dan $r = r_2(\theta)$ dengan $\theta = \alpha$ sampai $\theta = \beta$, maka tafsiran Integral Lipat dua dalam koordinat Polar adalah

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta) r dr d\theta \right)$$



Gambar 1.18 Tafsiran Integral lipat dua Koordinat Polar (Wahyuni, 2017)

I.3.1 Beberapa Daerah D yang Berhubungan dengan Koordinat Polar

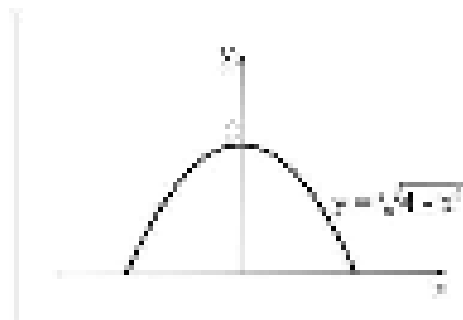
Koordinat Kartesius	Koordinat Polar
Lingkaran : $x^2 + y^2 = a^2$ Pusat $(0,0)$ dan $ x \leq a$, $ y \leq a$. 	$r = \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2$ $r = a$
Lingkaran : $x^2 + y^2 = 2ax$ atau $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ Pusat $(a,0)$ dan $ x \leq a$, $ y \leq a$. 	$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2a r \cos \theta$ atau $r = 2a \cos \theta$
Lingkaran : $x^2 + y^2 = 2ay$ atau $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ Pusat $(0,a)$ dan $ x \leq a$, $ y \leq a$. 	$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2a r \sin \theta$ atau $r = 2a \sin \theta$

Gambar 1.19 Gambar-gambar yang berhubungan dengan koordinat Polar

CONTOH 1.11

Hitung $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan $y = 0$

Penyelesaian:



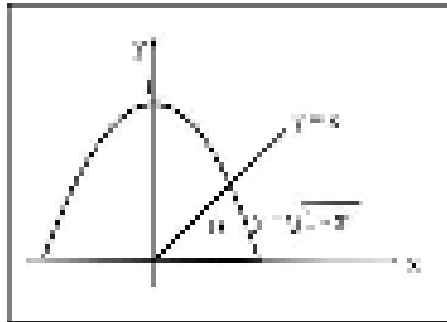
Gambar 1.20 Daerah D yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan $y = 0$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[\frac{2}{3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(\frac{2}{3} (4 - x^2)^{3/2} - \frac{2}{3} x^3 \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{2}{3} (4 - x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 8 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\pi \\ &= \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

CONTOH 1.12

Hitung $\iint_D xy \, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh
 $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, dan $y = 0$.

Penyelesaian :



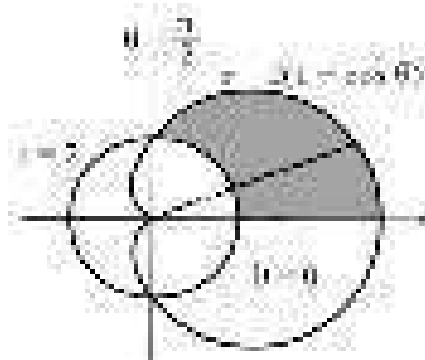
Gambar 1.21 Daerah D yang dibatasi $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dA &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.13

Hitunglah $\iint_D 3y \, dA$ jika D daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam kardioda $r = 2(1 + \cos \theta)$

Penyelesaian:



Gambar 1.22 D daerah di luar $r = 2$ dan di dalam $r = 2(1 + \cos \theta)$

Karena D adalah himpunan sederhana lingkaran r , sehingga soal di atas dapat ditulis sebagai integral lipat dua dengan koordinat polar dimana r sebagai peubah pengintegralan sebelah dalam dari $r = 2$ sampai $r =$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \iint_D 3y \, dA &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} r^2 \sin \theta \right]_2^{2(1+\cos \theta)} d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} (2(1+\cos \theta))^2 \sin \theta - \frac{1}{2} (2)^2 \sin \theta \right] d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) \sin \theta - \sin \theta \right] d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} (2 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta - \sin \theta) d\theta \\ &= 24 \end{aligned}$$

I.4 Aplikasi Integral Lipat Dua

1. Jika D daerah pada bidang XY maka luas D adalah (Mauch, 2002):

$$1 = \iint_D dA, \quad f(x, y) = 1$$

2. Titik Pusat Massa

Jika D daerah pada bidang XY dan $\rho(x, y)$ rapat massa disetiap titik pada D , maka :

- a. Koordinat pusat massa $(\bar{x}, \bar{y})$ adalah
- b. Koordinat pusat massa $(\bar{x}, \bar{y})$ dapat diperoleh dari rumus :
 - Koordinat titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ adalah $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dA$
 - Koordinat titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ adalah $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dA$
 - Koordinat titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ adalah $M = \iint_D \rho(x, y) dA$
- c. Koordinat titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ adalah $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dA$

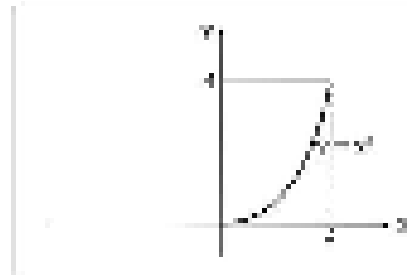
3. Momen Inersia adalah jarak kuadrat dari titik pusat massa ke sumbu

- a. Momen inersia terhadap sumbu x adalah $I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$
- b. Momen inersia terhadap sumbu y adalah $I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$
- c. Momen inersia terhadap sumbu z adalah $I_z = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$
 $= I_x + I_y$

CONTOH 1.14

Hitung luas daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 1.23 Daerah D dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran I.

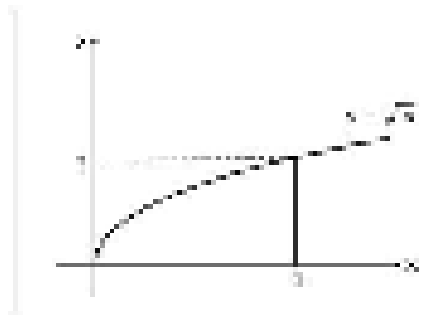
$$\begin{aligned}
 \text{Luas } D &= \iint_D dx dy \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^4 dy dx \\
 &= \int_0^2 (4 - x^2) dx \\
 &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\
 &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.15

Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, tentukan :

- Massa lamina
- Titik pusat massa
- Momen Inersia I_x , I_y dan I_z

Penyelesaian :



Gambar 1.24 Daerah D dibatasi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$

$$\begin{aligned}
 \text{a. Massa lamina} = m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx \\
 &= \int_0^4 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^4 x \left(\frac{1}{2} x \right) dx \\
 &= \int_0^4 \frac{1}{2} x^2 \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^4 \\
 &= \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \quad M_z &= \iint_D x \rho(x, y) \, dA \\
 &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} x \cdot (xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} x^2 y \, dy \, dx \\
 &= \int_{y=0}^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 dx \\
 &= \int_{y=0}^1 x^2 x \left[\frac{1}{2} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 dx \\
 &= \left[\frac{1}{8} x^4 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iint_D y \rho(x, y) \, dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} y \cdot (xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} x y^2 \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 x \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 dx \\
 &= \int_{x=0}^1 x \left[\frac{1}{3} \right] dx \\
 &= \left[\frac{1}{9} x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

$$I = \frac{M_z}{M} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}$$

$$I = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}} = \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{Titik pusat massanya } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3} \right)$$

c. Momen terhadap xy -axis

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \iint_R xy^2 \rho(x,y) \, dA \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-x} xy^2 (xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-x} x y^3 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^1 x \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_0^{2-x} dx \\
 &= \int_{x=0}^1 x^2 \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_R x^2 \rho(x,y) \, dA \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-x} x^2 (xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-x} x^3 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{2-x} dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \frac{1}{2} x^2 \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

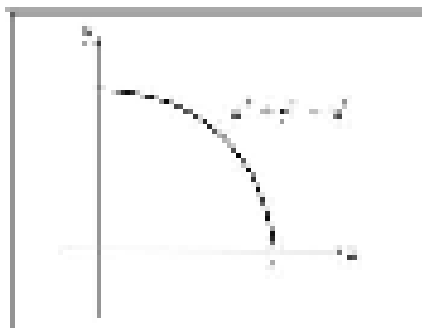
$$\begin{aligned}
 I_x &= I_y + I_{xy} \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.16

Jika D lamina yang berbentuk seperempat lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x,y)$ sebanding dengan jarak titik (x,y) ke pusat lingkaran. Tentukan :

- Massa lamina
- Titik pusat massa
- Momen Inersia I_x , I_y dan I_z

Penyelesaian:



Gambar 1.25 Daerah D dibatasi $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I

■ Diketahui: Titik $P(x,y) = (a\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta})$ dan lamina

$$\begin{aligned}
 \text{Massa lamina} &= M = \iint_D \rho(x,y) \, dA \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (a\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}) \, r \, dr \, d\theta \quad \text{Substitusi ke dalam Integral} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} \, d\theta \\
 &= \frac{a^3}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta \\
 &= \frac{a^3}{6} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{a^3}{6} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
 &= \frac{a^3 \pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_0^1 \int_0^1 x y f(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x y (x^2 y^2 - x^2 y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{5} x^5 y^2 - \frac{1}{3} x^3 y^2 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{5} y^2 - \frac{1}{3} y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 -\frac{2}{15} y^2 \, dy \\ &= -\frac{2}{15} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{45} \end{aligned}$$

[illegible]

Figure 1

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m\lambda}\right)^2 = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

The partial ratios $(F, Y) = \left(\frac{20}{10}, \frac{30}{15}\right)$

2. Momen-Torsten linear

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_R x^2 \cdot z(x, y) \, dA \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} x^2 \sin \theta \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} x^2 \cos^2 \theta \, dx \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \right) \cos^3 \theta \left(\int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} x^2 \, dx \right) d\theta \\
 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \right) \cos^3 \theta \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-\cos \theta}^{\cos \theta} \\
 &= \frac{16}{15} \cos^5 \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iint_R y^2 \cdot z(x, y) \, dA \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} y^2 \sin \theta \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} y^2 \cos^2 \theta \, dx \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \right) \cos^3 \theta \left(\int_{-\cos \theta}^{\cos \theta} y^2 \, dy \right) d\theta \\
 &= 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \right) \cos^3 \theta \left(\frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-\cos \theta}^{\cos \theta} \\
 &= \frac{16}{15} \cos^5 \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_y + I_z \\
 &= \frac{16}{15} \cos^5 \theta + \frac{16}{15} \cos^5 \theta \\
 &= \frac{32}{15} \cos^5 \theta
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.17

Jika D daerah yang dibatasi oleh lingkaran $(x - 2)^2 + y^2 =$

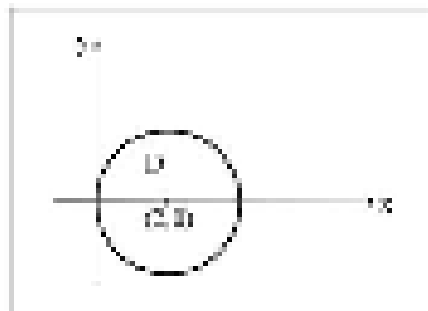
4. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = k(x^2)$. Tentukan :

a. $\int_D \rho(x, y) \, dA$, dimana $\rho(x, y) = 2y$

b. Massa linier

c. Momen kedua I_y

Penyelesaian:



Gambar 1.26. Daerah D dibatasi $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

a. $\int_D \rho(x, y) \, dA$, dimana $\rho(x, y) = 2y$

Salah satu cara untuk melakukan integrasi $\int_D \rho(x, y) \, dA$ adalah dengan menggunakan rumus integral polar. Untuk itu, kita ubah dulu koordinat polar ke koordinat kartesius.

$$\text{a. } \int_D \rho(x, y) \, dA = 2 \int_D y \, dA$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^2 d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{16}{3} (-1 - (-1))$$

$$= \frac{16}{3} (-1 + 1) = \frac{16}{3} (0) = 0$$

$$= \frac{16}{3} (0) = 0$$

$$= \frac{16}{3} (0) = 0$$

$$= \frac{16}{3} (0) = 0$$

$$= \frac{16}{3} (0) = 0$$

$$= \frac{16}{3} (0) = 0$$

(c) $\mathcal{C}_1$ dirangsang oleh $\vec{r}(s, t) = (s, t, \sqrt{s^2 + t^2})$, $\vec{r}_s = (1, 0, s/\sqrt{s^2 + t^2})$, $\vec{r}_t = (0, 1, t/\sqrt{s^2 + t^2})$.

$$\text{Matriks normal} = \vec{r}_s \times \vec{r}_t = \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{r}_s \times \vec{r}_t\| = \sqrt{s^2 + t^2 + 1}.$$

Sehingga $\iint_{\mathcal{C}_1} \sqrt{s^2 + t^2 + 1} \, ds \, dt$ merupakan volume. Maka

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s^2 + t^2 + 1} \, ds \, dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (s^2 + t^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 \, dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (s^2 + t^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{3/2} \, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{5} (s^2 + t^2 + 1)^{5/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{1}{5} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{5/2} \, dt$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^1 \left[\frac{2}{7} (s^2 + t^2 + 1)^{7/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{2}{35} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{7/2} \, dt$$

$$= \frac{2}{35} \int_0^1 \left[\frac{2}{9} (s^2 + t^2 + 1)^{9/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{4}{315} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{9/2} \, dt$$

$$= \frac{4}{315} \int_0^1 \left[\frac{2}{11} (s^2 + t^2 + 1)^{11/2} \right]_0^1 \, dt$$

Dengan cara yang sama kita dapat mencari bahwa

$$= \frac{4}{315} \int_0^1 \left[\frac{2}{13} (s^2 + t^2 + 1)^{13/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{8}{4095} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{13/2} \, dt$$

$$= \frac{8}{4095} \int_0^1 \left[\frac{2}{15} (s^2 + t^2 + 1)^{15/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{16}{122625} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{15/2} \, dt$$

$$= \frac{16}{122625} \int_0^1 \left[\frac{2}{17} (s^2 + t^2 + 1)^{17/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{32}{20848125} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{17/2} \, dt$$

$$= \frac{32}{20848125} \int_0^1 \left[\frac{2}{19} (s^2 + t^2 + 1)^{19/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{64}{3961103625} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{19/2} \, dt$$

$$= \frac{64}{3961103625} \int_0^1 \left[\frac{2}{21} (s^2 + t^2 + 1)^{21/2} \right]_0^1 \, dt = \frac{128}{168406353750} \int_0^1 (s^2 + t^2 + 1)^{21/2} \, dt$$

$$= \frac{128}{168406353750}$$

2. Menentukan integral dua variabel:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 (6 + 20xy + x^2y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(6y + 10x^2y^2 + \frac{1}{3}x^2y^3 \right) \Big|_0^1 \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(6 + 20x^2 + \frac{1}{3}x^2 \right) \, dx \\
 &= \left(6x + \frac{20}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^3 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \left(6 + \frac{20}{3} + \frac{1}{12} \right) - \left(0 + 0 + 0 \right) \\
 &= \frac{73}{4}
 \end{aligned}$$

Sehingga nilai integral dua variabel I_2 adalah $\frac{73}{4}$.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + z)^2 \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz)$$

Sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x + y + z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x + y + z \Rightarrow \int_0^1 (x + y + z) \, dx = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x + y + z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + y + z \Rightarrow \int_0^1 (x + y + z) \, dy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(x^2 + 1 + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x + y + z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x + y + z \Rightarrow \int_0^1 (x + y + z) \, dz = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \, dy + \frac{\partial f}{\partial z} \, dz = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dz$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dz$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \, dz$$

$$\text{Jadi } I_3 = \frac{20}{3} \pi^2$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 2 dan pada pertemuan ke 3 diadakan Quiz di awal perkuliahan.

LATIHAN 1

1. Hitung integral volume berikut ini!
 - a. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dx dy$
 - b. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x^2-y^2) dx dy$
2. Tentukan luas $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x^2-y^2) dx dy$ untuk suatu bidang datar yang memenuhi syarat $x \geq 0$, $y \geq 0$, dan $x+y \leq 1$.
3. Hitung $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ dan D daerah yang dibatasi oleh $x=0$, $y=0$, dan $x+y=1$.
4. Hitung $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
5. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
6. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
7. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
8. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
9. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
10. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
11. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.
12. Tentukan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dx dy$ dan $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) dy dx$ untuk $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yang merupakan fungsi bernilai positif.

12. Diberikan fungsi $f(x, y)$ yang didefinisikan $f(x, y) = x^2 + y^2$. Diketahui bahwa x dan y memenuhi:
- Tidak ada nilai x dan y yang memenuhi $f(x, y) \leq 2$, jika x bernilai x_0 .
 - Terdapat bilangan y sedemikian sehingga $f(x_0, y) = 2$.
13. Diberikan $f(x, y)$ dengan syarat integral $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = 0$ dan diketahui $x^2 + y^2 = 10$ dan $f(x, y) = 0$. Tentukan nilai $f(x, y)$ pada interval $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ konstan.
14. Jika D adalah daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = -\sqrt{4-x^2}$, $x = -2$ dan $x = 2$, tentukan bilangan riil a sedemikian $f(x, y)$ bernilai negatif pada titik-titik lain dari daerah D tersebut.
- $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$
 - $-\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2}$
 - Keduanya bernilai $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$
15. Jika D adalah daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 1$, $x = 1$, $y = 1$ dan $y = -1$, tentukan nilai $f(x, y)$ pada interval $(x, y) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$.
- Tentukan:
- $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$
 - Terdapat bilangan riil yang bernilai $f(x, y)$
 - Tidak ada bilangan riil
 - Terdapat bilangan $f(x, y)$ pada $f(x, y)$

BAB 2

INTEGRAL LIPAT TIGA

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami benda-benda di ruang tiga dimensi
2. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat Cartesien
3. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat silinder
4. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi integral lipat tiga.

Deskripsi:

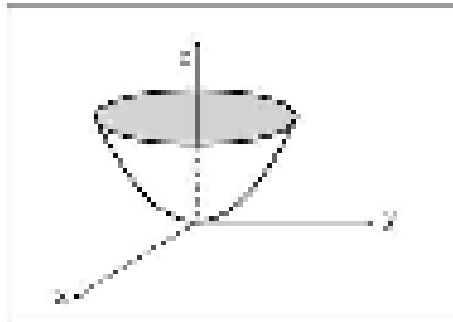
Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari benda-benda di ruang dimensi tiga, pengertian dan definisi integral lipat tiga. Selanjutnya akan dipelajari integral lipat tiga dalam Koordinat Cartesien dan Koodinat Silinder. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat tiga untuk menentukan volume benda, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda.

2. Paraboloida $z = x^2 + y^2$

Cara menggambar:

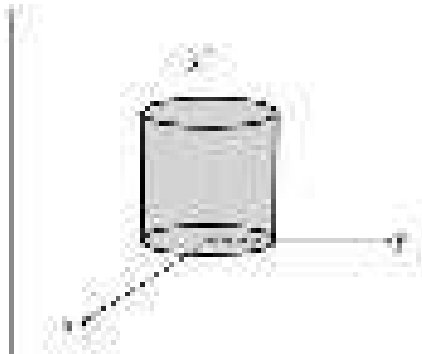
Misal $x = 0 \rightarrow z = y^2$ (di bidang YOZ, berbentuk parabola)

Misal $y = 0 \rightarrow z = x^2$ (di bidang XOZ, berbentuk parabola)



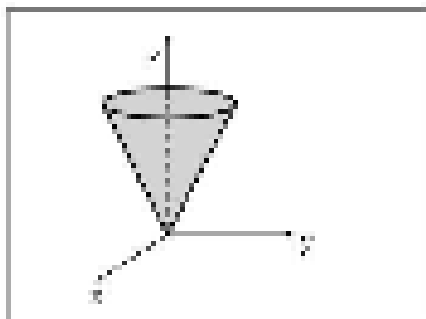
Gambar 2.2 Paraboloida

3. Silinder / Tabung $x^2 + y^2 = r^2$



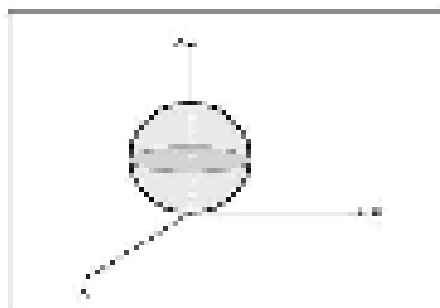
Gambar 2.3. Tabung / silinder

4. Kerucut Tegak $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Gambar 2.4. Kerucut tegak

5. Bola $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

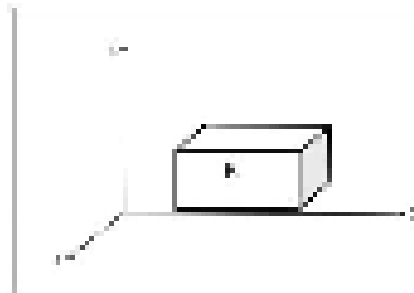


2.1.1 Konsep Integral Lipat Tiga

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan integral lipat dua dapat diperluas dengan cara yang alamiah menjadi integral lipat tiga atau bahkan menjadi integral lipat n .

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang dibatasi oleh beberapa permukaan. Jika $f(x, y, z)$ suatu fungsi yang bekerja pada B maka integral lipat tiga dari fungsi f atas B ditulis

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$



Gambar 2.6 Konsep Integral Lipat Tiga

2.1.2 Definisi Integral Lipat Tiga

Bagi daerah B atas daerah-daerah kecil B_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ yang berbentuk paralelepipedium (kotak) yang sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu x , y dan z . Misalkan volume B_k adalah ΔV_k dan ambil titik (x_k, y_k, z_k) dalam B_k . Kemudian bentuk jumlah Riemann

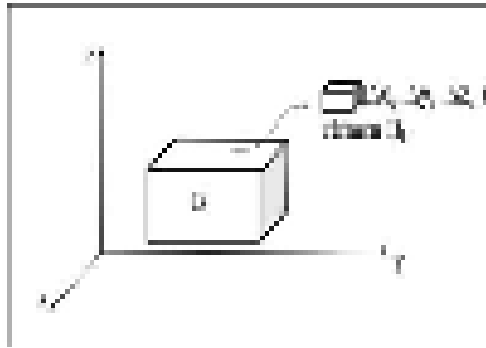
$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

Sebut $|P|$ = panjang diagonal terpanjang dari semua B_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Definisi Integral Lipat Tiga

Sebuah fungsi $f(x, y, z)$ terintegralkan pada daerah B jika

$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = I$ ada, maka I dinamakan integral lipat tiga dari $f(x, y, z)$ pada B .



Gambar 2.7 Definisi Integral Lipat Tiga

2.1.3 Eksistensi Integral Lipat Tiga

Jika f kontinu dan terbatas pada B maka $\iiint_B f(x, y, z) dV$ ada.

Syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya fungsi f masih dapat diskontinu pada sejumlah berhingga permukaan licin sehingga dapat terdiferensial. Pembahasan selanjutnya hanya difokuskan pada f

CONTOH 2.1

Jika diketahui $f(x, y, z) = x^2 yz$ dan $B = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$. Karena f kontinu pada B maka $\iiint_B x^2 yz dV$ ada.

2.1.4 Sifat-sifat Integral Lipat Tiga

Beberapa sifat penting yang dipenuhi integral lipat tiga yaitu:

1. $\iiint_B [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_B f(x, y, z) dV + \iiint_B g(x, y, z) dV$
2. $\iiint_B \alpha f(x, y, z) dV = \alpha \iiint_B f(x, y, z) dV$

3. Untuk B_1 dan B_2 yang memenuhi $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ permukaan, maka

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_{B_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{B_2} f(x, y, z) dV$$

4. Jika $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap (x, y, z) anggota B , maka

$$\iiint_B f(x, y, z) dV \leq \iiint_B g(x, y, z) dV$$

CONTOH 2.2

$$\iiint_B (4x^2 + 3y) dV = \iiint_B 4x^2 dV + \iiint_B 3y dV$$

CONTOH 2.3

Jika $B = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 4\}$.

Misalkan $B_1 = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$ dan

$$B_2 = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4\}$$

Maka $\iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_{B_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{B_2} f(x, y, z) dV$

CONTOH 2.4

Jika $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ dan $B = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$. Karena $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap $(x, y, z) \in B$, maka $\iiint_B f(x, y, z) dV \leq \iiint_B g(x, y, z) dV$.

2.2 Integral Lipat Tiga Koordinat Kartesian

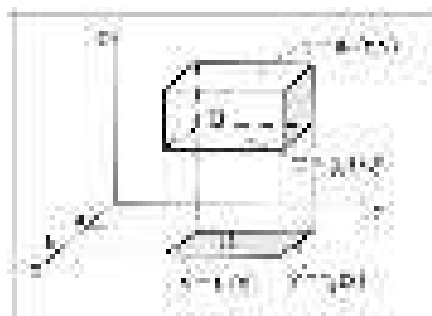
Misalkan B suatu daerah di ruang yang dibatasi di atas oleh permukaan $z = g_2(x, y)$ dan di bawah oleh $z = g_1(x, y)$. Misalkan D adalah proyeksi B pada bidang XY , maka

$\iiint_B f(x, y, z) dV$ dapat ditafsirkan sebagai berikut

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

Integral di ruaskan adalah integral berulang, dimana yang pertama diintegrasikan terhadap z dan kemudian integral lipat

dua seperti yang telah dipelajari pada bab I. Untuk selanjutnya tanda kurung dalam integral berulang dihapuskan dan integral yang paling dalam dikerjakan terlebih dahulu. (Kreyszig, 2014)



Gambar 2.8 Tafsiran Integral Lipat Tiga (Kreyszig, 2006)

Misalkan B daerah yang dibatasi oleh bidang-bidang $x = a$, $x = b$, $y = t_1(x)$, $y = t_2(x)$ dan permukaan $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$.

Jadi $B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, t_1(x) \leq y \leq t_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$ dan $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, t_1(x) \leq y \leq t_2(x)\}$ adalah proyeksi B terhadap bidang XY.

Maka tafsiran Integral lipat tiga

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{t_1(x)}^{t_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

CONTOH 2.5

Selesaikan integral berulang $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx$

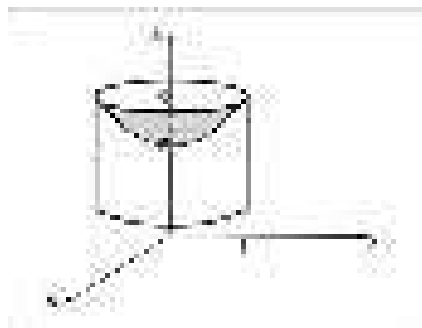
Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2) \right]_0^{1-x-y} dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + (1-x-y)^2) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y + x^2 + y^2 + 2xy) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y - 2xy + x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + xy^2) \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 + (1-x) - 2x(1-x) + x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 + x(1-x)^2) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (-x^3 + x^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3 + 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3 + x(1-x)^2) \right] dx
 \end{aligned}$$

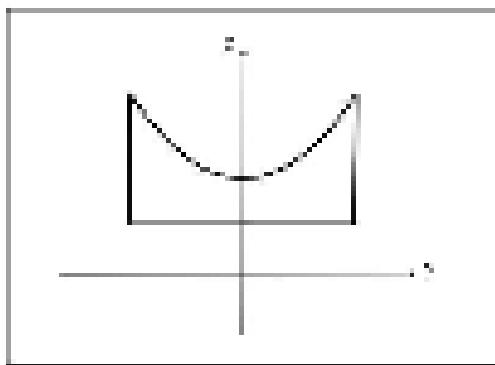
CONTOH 2.6

Tafsirlkan $\iiint_B f(x, y, z) dV$ dimana B daerah yang dibatasi oleh $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$ dan $x^2 + y^2 = 1$

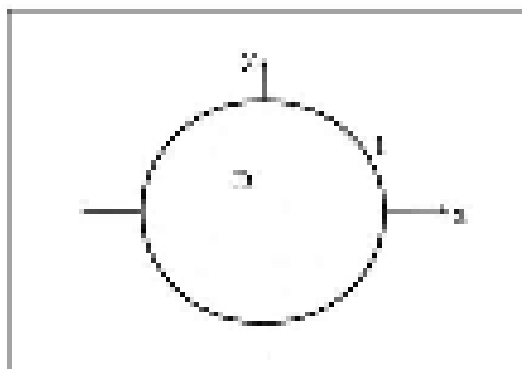
Penyelesaian:



Gambar 2.9 B dibatasi oleh $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$ dan $x^2 + y^2 = 1$



Gambar 2.10 Penampang di bidang YZ



Gambar 2.11 Proyeksi B terhadap bidang XY

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}$$

dan proyeksi B terhadap bidang XY adalah

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

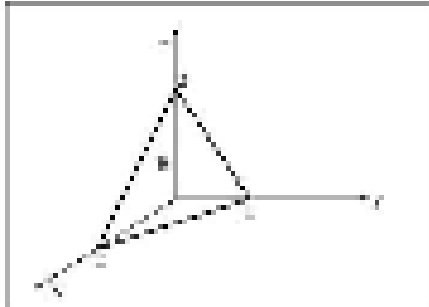
Jadi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_D (2 + x^2 + y^2) \, dA \, dz &= \int_0^1 \int_D (2 + x^2 + y^2) \, dA \, dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_D (2 + x^2 + y^2) \, dA \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + r^2) r \, dr \, d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[r^2 + \frac{r^4}{2} \right]_0^1 d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \right) d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) dz \\ &= \int_0^1 3\pi \, dz \\ &= 3\pi \cdot z \Big|_0^1 \\ &= 3\pi \cdot 1 - 3\pi \cdot 0 \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

CONTOH 2.7

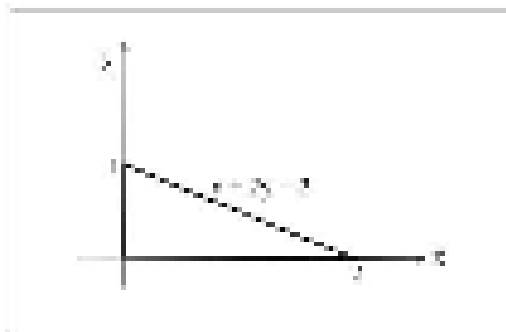
Tentukan $\iiint_B (2x) \, dV$ jika B daerah yang dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 2.12 B dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Proyeksi B pada bidang XY adalah daerah D yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$ dan $x + 2y = 2$



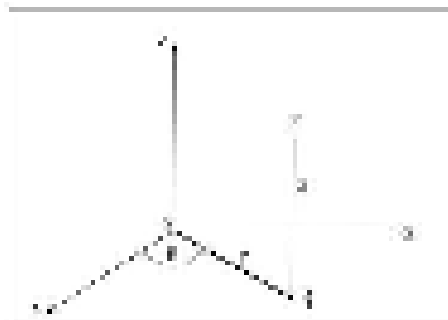
Gambar 2.13 D dibatasi $x + 2y = 2$, $x = 0$, $y = 0$

Jadi

$$\begin{aligned}
 \iint_R (2xy) \, dV &= \int_0^1 \int_{-2x}^{2x-2x^2} (2xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 [2xy^2]_{y=-2x}^{y=2x-2x^2} dx \\
 &= \int_0^1 (2x(2x-2x^2)^2 - 2x(-2x)^2) dx \\
 &= \int_0^1 (4x - 8x^3 + 2x^5 - 4x^3) dx \\
 &= \int_0^1 (4x - 2x^3 + 2x^5) dx \\
 &= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[4x - 2x^3 + 2x^5 \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 \right] dx \\
 &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{21}x^7 \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{21} = \frac{28}{105} - \frac{10}{105} + \frac{5}{105} = \frac{23}{105}
 \end{aligned}$$

2.3 Integral Lipat Tiga Dalam Koordinat Silinder/ Tabung

Ketika sebuah benda B dalam ruang berdimensi tiga mempunyai sebuah sumbu simetri, maka perhitungan integral lipat tiga atas B sering dipermudah dengan menggunakan koordinat silinder. (Kreyszig, 2013)



Gambar 2.14 Koordinat Silinder

Jika P suatu titik di ruang dan P_1 proyeksi P pada bidang XY .

Sebut $OP_1 = r$ adalah jari-jari dan θ adalah sudut yang dibentuk OP_1 dengan sumbu x positif.

Maka koordinat silinder dari P adalah $P(r, \theta, z)$

Hubungan antara kordinat Kartesian dengan koordinat

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Dalam koordinat silinder $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$

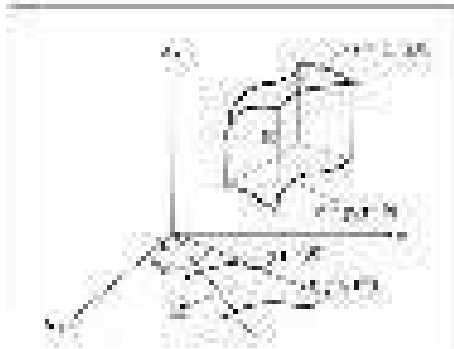
Determinan Matriks Jacobi $J = \begin{vmatrix} x & y & z \\ r & \theta & z \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\iiint_B f(x, y, z) dV &= \iiint_B f(r, \theta, z) |J| dz dr d\theta \\ &= \iiint_B f(r, \theta, z) r dz dr d\theta\end{aligned}$$

Bila B daerah yang dibatasi di bawah oleh permukaan $z = g_1(r, \theta)$, di atas oleh permukaan $z = g_2(r, \theta)$, silinder-silinder $r = r_1(\theta)$, $r = r_2(\theta)$ dan bidang-bidang $\theta = \theta_1$ dan $\theta = \theta_2$.



Gambar 2.15 Tafsiran Integral Lipat tiga Koordinat Silinder

Maka

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

CONTOH 2.8

Tentukan koordinat silinder dari titik $P(1, 1, 2)$

Penyelesaian:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan 1 \text{ maka } \theta = \frac{\pi}{4}$$

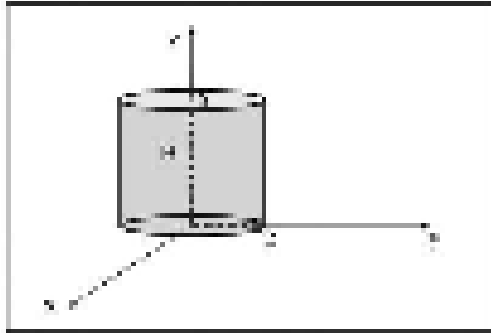
$$z = 2$$

$$\text{Maka } P(r, \theta, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 2\right)$$

CONTOH 2.9

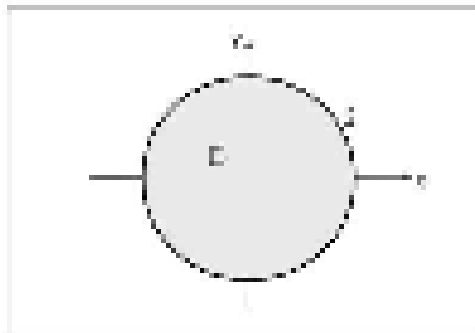
Tentukan $\iiint_B dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ bidang $z = 0, z = 6$

Penyelesaian:



Gambar 2.16 B dibatasi $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ dan $z = 6$.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah



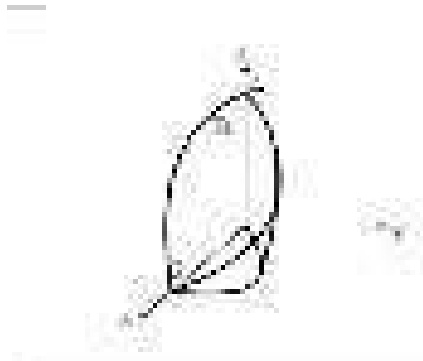
Gambar 2.17 D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned}
 \iiint_B dV &= \int_0^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=0}^1 r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{r=1}^2 [rz]_{z=0}^1 \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{r=1}^2 r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [3r^2]_{r=1}^2 \, d\theta \\
 &= 12 (2\pi) \\
 &= 24\pi
 \end{aligned}$$

CONTOH 2.10

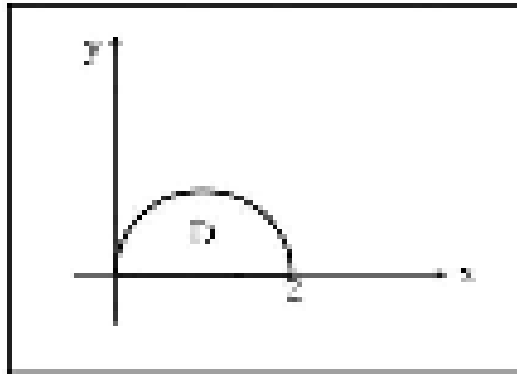
Tentukan $\iiint_B 2xy \, dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ dan $y = 0$ di oktan pertama.

Penyelesaian:



Gambar 2.18 B dibatasi $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ & $y = 0$ di oktan I.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.19 D dibatasi $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$ di kuadran I

Dari permukaan di atas diperoleh

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow (x^2 - 2x) + y^2 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

maka $r = 2 \cos \theta$

Jadi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\cos\theta} r^2 \, dr \, d\theta &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^1 \frac{1}{3} (2\cos\theta)^3 d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (\cos\theta)^3 d\theta = \frac{2}{3} \int_0^1 (\cos\theta)(\cos^2\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (\cos\theta)(1 - \sin^2\theta) d\theta = \frac{2}{3} \int_0^1 (\cos\theta - \cos\theta \sin^2\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left[\int_0^1 \cos\theta d\theta - \int_0^1 \cos\theta \sin^2\theta d\theta \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\sin\theta + \frac{1}{3} \sin^3\theta \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(\sin 1 + \frac{1}{3} \sin^3 1 \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} (2\cos^2 1 - 1) \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos^2 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cos^2 1 \right) = \frac{2}{9} (1 + 4\cos^2 1) \end{aligned}$$

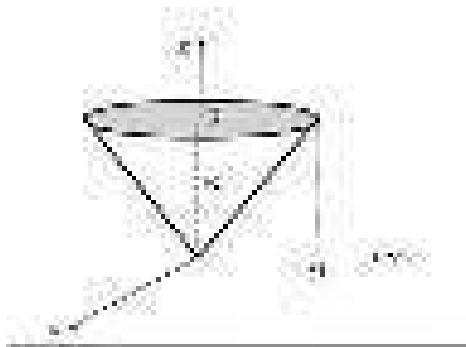
CONTOH 2.11

Tentukan $\iiint_B x^2 y \, dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, dan $z = 9$.

Penyelesaian:

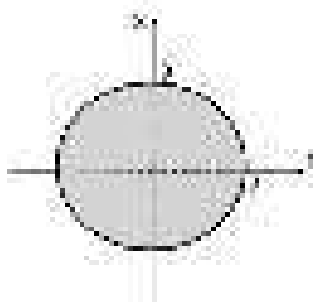
Perpotongan $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ dan $z = 9$

Diperoleh $r = 9$



Gambar 2.20 B dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, dan $z = 9$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.21 D dibatasi oleh $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 9$

Maka

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \, d\phi \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\phi \\
 & = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos \pi + \frac{1}{3} \cos 0 \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\phi = \left[\frac{2}{3} \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \\
 & = \frac{2}{3} (2\pi - 0) = \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$

2.4 Aplikasi Integral Lipat Tiga

1. Volume daerah B adalah : $V = \iiint_B dV$
2. Titik Pusat Massa

Misalkan $\rho(x, y, z)$ rapat massa disetiap titik pada B, maka

- Massa $B = m = \iiint_B \rho \, dV$
- Momen massa (jarak linier titik pusat massa ke bidang).
 - Momen massa terhadap bidang xy ditulis $M_{xy} = \iiint_B \rho z \, dV$

dV

$$dV = \frac{1}{3} \pi r^2 dz$$

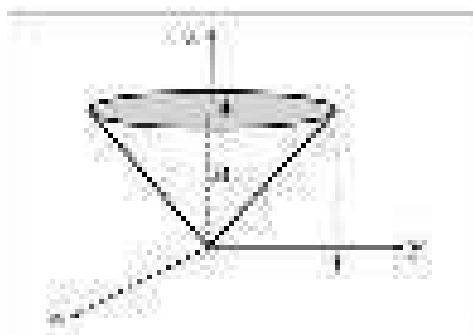
- Momen massa terhadap bidang yz ditulis $M_{yz} = \iiint_B \rho x dV$
- Momen massa terhadap bidang xz ditulis $M_{xz} = \iiint_B \rho y dV$

• Titik pusat massa =

CONTOH 2.12

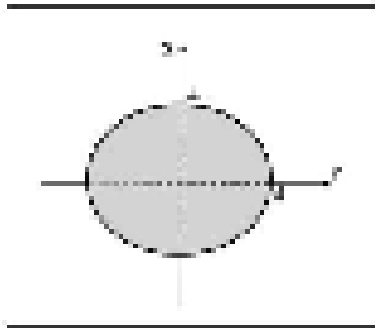
Jika B benda yang dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $3\sqrt{x^2 + y^2}$. Tentukan :

- a. Volume B
- b. Titik pusat massa B
- c. Momen inersia terhadap sumbu z



Gambar 2.22 B yang dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 4$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah.



Gambar 2.23. D dibatasi lingkaran dengan $r = 4$

$$\begin{aligned}
 A &= \text{luas daerah } D = \iint_D dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\sqrt{16-\cos^2\theta}}^{\sqrt{16-\cos^2\theta}} dz \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{16-\cos^2\theta} \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2(4 - \cos^2\theta) \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[2\theta - \frac{1}{2}\theta \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\pi - \frac{1}{2} \right) d\phi = \left(\pi - \frac{1}{2} \right) \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \left(\pi - \frac{1}{2} \right) \phi \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \left(\pi - \frac{1}{2} \right) (2\pi - 0) \\
 &= 2\pi \left(\pi - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 12.56
 \end{aligned}$$

Karena B simetri terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$, jadi cukup dicari momen massa terhadap bidang xy

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_B xz \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3r) r z \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r^3 z \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 z^2 \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (16r^4 - r^4) dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{16}{5} r^5 - \frac{1}{6} r^6 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \frac{24\pi}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi} \\ z = \frac{M_{xy}}{M} &= \left(\frac{24\pi}{5} \right) / (24\pi) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi titik pusat massa} = (0, 0, \frac{1}{5})$$

2.3. Momen Inersia terhadap sumbu z

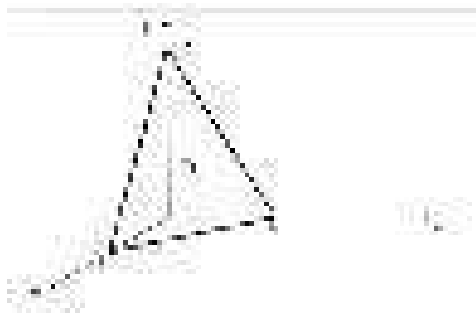
$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_B (x^2 + y^2) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3r) r^3 \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r^4 \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^5 z^2 \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (16r^5 - r^5) dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{16}{6} r^6 - \frac{1}{7} r^7 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

CONTOH 2.13

Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah k , k konstanta. Tentukan:

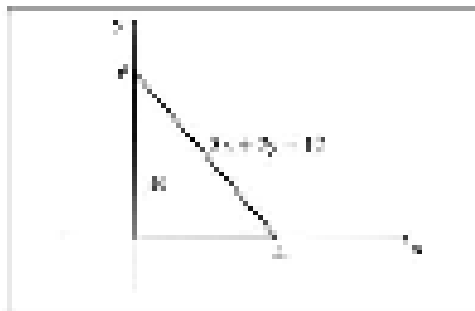
- Volume B
- Momen inersia terhadap sumbu y

Penyelesaian:



Gambar 2.24. B dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah D yang diberikan pada gambar di bawah



Gambar 2.25. D dibatasi oleh $3x + 2y = 12$, sumbu x dan sumbu y

Untuk mencari $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$, dari $3x - 2y + 4z = 12$ diperoleh $z = 12 - 3x + 2y$.

Atau kita bisa menggunakan $U = 12 - 3x + 2y = 12$, maka $y = 3 - \frac{1}{2}x$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{2-x} f(x, y, z) \, dy \, dx &= \iint_R f(x, y, z) \, dy \, dx = \iint_R (x^2 + y^2 + z^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + (12 - 3x + 2y)^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 144 - 72x + 12y + 9x^2 - 36xy + 4y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 (12y - 36y + 9y^2) \Big|_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 \left((2x - \frac{1}{3}x^2) - 24x + \frac{3}{2}x^2 - 18 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= \int_0^2 (7x - 10x - \frac{1}{3}x^2) \, dx = \int_0^2 (-3x - \frac{1}{3}x^2) \, dx \\ &= \int_0^2 (-3x - 10x - \frac{1}{3}x^2) \, dx \\ &= 12x - 5x^2 - \frac{1}{9}x^3 \Big|_0^2 \\ &= 24 - 20 - \frac{8}{9} = 4 - \frac{8}{9} = \frac{28}{9} \end{aligned}$$

b. Momen inersia terhadap sumbu y

$$I_y = \iint_R (x^2 + z^2) \, dA$$

$$= \iint_R (x^2 + z^2) \, dx \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_{-2}^{2-2z} (x^2 + z^2) \, dx \, dz$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + z^2x \right]_{-2+2z}^{2-2z} dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(2-2z)^3 + z^2(2-2z) - \left(\frac{1}{3}(-2+2z)^3 + z^2(-2+2z) \right) \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(2-2z)^3 + z^2(2-2z) - \frac{1}{3}(-2+2z)^3 + z^2(2-2z) \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(2-2z)^3 + z^2(2-2z) - \frac{1}{3}(2-2z)^3 + z^2(2-2z) \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(2-2z)^3 + z^2(2-2z) - \frac{1}{3}(2-2z)^3 + z^2(2-2z) \right) dz$$

$$= \int_0^1 (2z^2 - 2z^3) dz$$

$$= \left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$= \left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$= \left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^6 \left(3200(18 - \frac{1}{2}y) - 1280(18 - \frac{1}{2}y) - 1280^2 y - \frac{1}{4}y^2 + 2560y - \frac{1}{4}y^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2560(18 - \frac{1}{2}y) - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 \right) dy \\
 &= \int_0^6 \left(3200(18 - 18y + 9y^2) - 1280(18 - 18y + 9y^2) + 2560y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\
 &= 3200(18y - 9y^2 + 3y^3) - 1280(18y - 9y^2 + 3y^3) + 1280y^2 - \frac{1}{6}y^3 \Big|_0^6 \\
 &= 3200(108 - 324 + 648) - 1280(108 - 324 + 648) + 1280(36) - \frac{1}{6}(216) \\
 &= 125676
 \end{aligned}$$

CONTOH 2.14

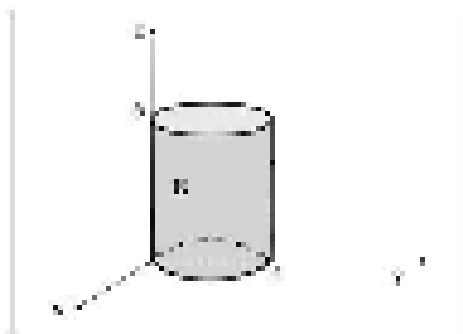
Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Tentukan:

- Volume B
- Massa B

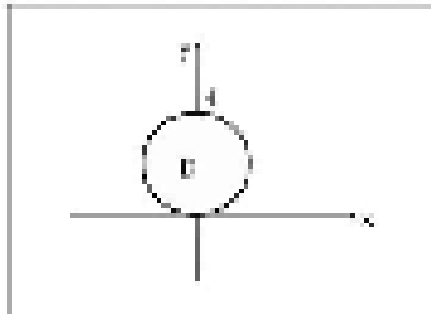
Penyelesaian:

Bidang $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ adalah silinder tegak dengan alas lingkaran yang berpusat di titik $(0, 2, 0)$



Gambar 2.26. B dibatasi $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan gambar di bawah



Gambar 2.27 D dibatasi $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

Jari-jari lingkaran D ditentukan dengan cara:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$r = 4 \sin \theta$$

$$V = \text{Volume } B = \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \sin \theta} \int_0^{4 \sin \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \sin \theta} \left[\frac{1}{3} r^3 \sin \theta \right]_0^{4 \sin \theta} d\theta \, d\phi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (4 \sin \theta)^3 \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \cos \theta + \frac{1}{5} \sin^5 \theta \right]_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \right) \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{5} \sin^5 \theta \cos \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

Be. Misal

$$\begin{aligned}
 &= \iint_R x \, dA \\
 &= 2 \iint_{D_1} \int_{x=0}^1 (1-x) \, dy \, dx + 2 \iint_{D_2} x \, dy \, dx \\
 &= 2 \int_0^1 \int_{x=0}^{1-x} (1-x) \, dy \, dx + 2 \int_0^1 \int_{x=0}^x x \, dy \, dx \\
 &= 2k \int_0^1 (1-x) \, dx + 2k \int_0^1 x \, dx = 2k \cdot 1 + 2k \\
 &= 2k \int_0^1 (1-x) \, dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= 12k \left(\int_0^1 \int_{x=0}^{1-x} 1 \, dy \, dx \right) \\
 &= 12k \left(\int_0^1 x \, dx + \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \, dx \right) \\
 &= 12k \left(\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \, dx + \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \, dx \right) \\
 &= 12k \left(\left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 \right]_0^1 \right) \\
 &= 4k \left[\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) \right] \\
 &= 4k \left(\frac{1}{4} \right) = k
 \end{aligned}$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 5 dan pada pertemuan ke 6 diadakan Quiz di awal pertemuan.

LATIHAN 2

1. Hitunglah integral berulang berikut:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2xyz \, dz \, dy \, dx \\ \text{b. } & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx \\ \text{c. } & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx \\ \text{d. } & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2 z^2 \, dz \, dy \, dx \\ \text{e. } & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx \\ \text{f. } & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx \end{aligned}$$

2. Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah konstanta, tentukanlah:
- Gambar B
 - Volume B
 - Massa B
3. Jika B benda yang dibatasi oleh $z = 6 - (x^2 + y^2)$ dan $z = 2$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, tentukanlah:
- Gambar B
 - Proyeksi B terhadap bidang XY
 - Titik pusat massa B

4. Jika B benda yang dibatasi oleh $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$ tentukanlah:
- Gambar B
 - Proyeksi B terhadap bidang XY
 - Momen inersia terhadap sumbu z . Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2) dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 2 - (x^2 + y^2)$.
5. Tentukan $\iiint_B (y^2) dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2) = 4$ dan $z = 6$.
6. Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2)^{3/2} dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$ dan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
7. Tentukan $\iiint_B xy dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2) - 2y = 0$ dan $z = 0$
8. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 12 - x^2 - y^2$ dan $z = 0$.
- Jika rapat massa $\rho = x^2 + y^2$, tentukan:
- Volume B
 - Massa B
 - Momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y
9. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$ dan $z = 8$. Jika rapat massa $\rho = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$, tentukan momen inersia terhadap sumbu z

BAB 3

KALKULUS VEKTOR

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu :

1. Memahami fungsi bernilai vektor dan differensial vektor.
2. Memahami operasi fungsi vektor.
3. Memahami gradien, divergensi dan curl.

Deskripsi:

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari tentang fungsi vektor, diferensial vektor dan operasi fungsi vektor. Mahasiswa juga diajarkan bagaimana menentukan gradien sebuah fungsi, divergensi dan curl. (Penerapannya, n.d.)

3.1 Fungsi Bernilai Vektor

Jika D suatu himpunan di ruang R^n . Jika F suatu fungsi bernilai vektor di ruang R^m dengan daerah definisi D adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota x di D dengan satu dan hanya satu vektor y di R^m dan ditulis $y = F(x)$.

Selanjutnya vektor di R^m dapat ditulis $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)$.
(Volume, Sirovich, & Marsden, 2009)

CONTOH 3.1

Diberikan $y = f(x)$ fungsi dua variabel dengan nilai vektor di R^3 adalah

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan y di titik $(2, -1)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 + 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(2) + (-1)^2 \\ 3(2)(-1) \\ -(2)(-1) + 2(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Maka } y \text{ di titik } (2, -1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Diferensial Vektor

Jika $F(u) = (F_1, F_2, F_3)$ adalah suatu fungsi vektor. Fungsi vektor tersebut dapat ditulis dalam bentuk $F(u) = F_1(u) i + F_2(u) j + F_3(u) k$

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF_1}{du} i + \frac{dF_2}{du} j + \frac{dF_3}{du} k$$

2. Turunan kedua vektor adalah $F''(u)$ adalah

$$\frac{d^2 F}{du^2} = \frac{d^2 F_1}{du^2} i + \frac{d^2 F_2}{du^2} j + \frac{d^2 F_3}{du^2} k$$

Perhatikan sebuah fungsi F yang menghubungkan sebuah vektor $F(p)$ dengan setiap titik p dalam ruang berdimensi n . Fungsi ini disebut medan vektor. (Wahyuni, 2017)

CONTOH 3.2

1. $F(x, y) = 2xi + \frac{1}{2}y^2 j$. adalah ruang berdimensi 2

2. $F(x, y, z) = 2xi - yj + 4z^2 k$. adalah ruang berdimensi 3

Secara umum medan vektor dalam ruang 3 dimensi ditulis $F(x, y, z) = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k$

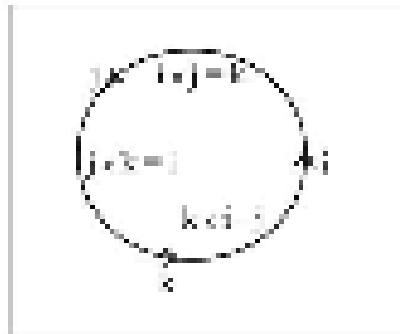
3.3 Operasi Fungsi

Jika F dan G dua fungsi vektor dimana (Mauch, 2002) $F = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ dan $G = G_1 i + G_2 j + G_3 k$ maka berlaku:

- $(F + G) = (F_1 + G_1) i + (F_2 + G_2) j + (F_3 + G_3) k$
- Jika c suatu skalar maka $cF = cF_1 i + cF_2 j + cF_3 k$
- Perkalian skalar $FG = (F_1 G_1) + (F_2 G_2) + (F_3 G_3)$, dimana $i.i = j.j = k.k = 1$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \times (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{e}_1 - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Berikut gambar untuk perkalian cross



Gambar 3.1 Perkalian cross

Perkalian cross menggunakan aturan tangan kanan, dimana (Pandey, 2010): $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$

Jika menggunakan tangan kiri, perkalian crossnya bernilai negatif.

CONTOH 3.3

Jika $F(x, y, z) = z \sin x \, i + 2y e^x \, j + 3z \, k$

dan $G(x, y, z) = 3xyz^2 \, i - 4x \, j + \ln(xz) \, k$

Tentukanlah:

a. $(2F) \cdot G$

b. $F \times (-G)$

Penyelesaian:

a. $(2F) \cdot G = 2[z \sin x \, i + 2y e^x \, j + 3z \, k] \cdot [3xyz^2 \, i - 4x \, j + \ln(xz) \, k]$
 $= [2z \sin x \, i + 4y e^x \, j + 6z \, k] \cdot [3xyz^2 \, i - 4x \, j + \ln(xz) \, k]$
 $= 6xyz^3 \sin x - 16xy e^x + 6z \ln(xz)$

b. $F \times (-G) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ z \sin x & 2y e^x & 3z \\ -3xyz^2 & 4x & -\ln(xz) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z \sin x & 2y e^x & 3z \\ -3xyz^2 & 4x & -\ln(xz) \end{vmatrix}$
 $= (2y e^x)(-\ln(xz)) - (3z)(4x) - (z \sin x)(-16xy e^x) - (3z \sin x)(-4x) - (2y e^x)(-3xyz^2) - (3z)(-3xyz^2)$
 $= -2y e^x \ln(xz) - 12xz - 16xy e^x \sin x + 12xz \sin x + 6xyz^2 e^y + 9xyz^2 \sin x$

3.4 Gradien, Divergensi dan Curl

3.4.1 Operator Diferensial Nabla

Operator Nabla dinotasikan dengan lambang ∇ .
(Pandey, 2010)

Definisi Operator Nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \, i + \frac{\partial}{\partial y} \, j + \frac{\partial}{\partial z} \, k$$

Operator Nabla dapat dipandang sebagai sebuah

vektor.

3.4.2 Gradien

Operator Nabla jika dikenakan pada sebuah fungsi skalar $f(x, y, z)$ akan membentuk gradien dari $f(x, y, z)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

CONTOH 3.4

Jika $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy^3z$. Tentukan gradien ∇f di titik $(2, -1, 4)$

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= (6x + 2y^3z) \mathbf{i} + (6xy^2z) \mathbf{j} + (2xy^3) \mathbf{k} \\ \nabla f(2, -1, 4) &= (24 - 2) \mathbf{i} + (-48) \mathbf{j} + (-2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

3.4.3 Divergensi F / DivF

Divergensi adalah hasil operasi dot antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$, ditulis (Ash & Ash, 1998)

divergensi (F) atau $\text{div } (F)$, dimana $\text{div } (F) = \nabla \cdot F$

$$\begin{aligned} \text{Jika } F &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \\ \text{Maka } \nabla \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Interpretasi fisis divergensi adalah, jika F melambangkan medan kecepatan dari suatu fluida maka $\operatorname{div} F$ di titik p mengukur kecenderungan fluida tersebut untuk menyebar meninggalkan p ($\operatorname{div} F > 0$) atau mengumpul menuju p ($\operatorname{div} F < 0$).

CONTOH 3.5

Jika $F(x, y, z) = \text{densitas} = \frac{1}{r^2} \mathbf{i} + e^{xyz} \mathbf{j}$ tentukan? Nilai $\operatorname{div} F$ di titik $(2, -1, \frac{5}{2})$

Pembahasan:

Diketahui $F = \text{densitas}$

$$Q = -\frac{r^2}{r}$$

$$R = z^{1/2}$$

Maka

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (0 \cdot 0 \cdot \mathbf{j}, 20 \cdot \mathbf{j}, 0 \cdot 0 \cdot \mathbf{k}) = 0 \cdot 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot 0 \cdot \mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot \mathbf{j} + \frac{2^2}{r^2} + 2 \cdot 0 \cdot \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F \left(2, -1, \frac{5}{2} \right) &= 2 \cdot 0 \cdot \frac{2}{r^2} + \frac{2^2}{(-1)^2} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ &= 0 + 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

CONTOH 3.6

Sei $F(x, y, z) = 2xz \sin z \mathbf{i} + (x + \frac{1}{z}) \mathbf{j} - ye^{yz} \mathbf{k}$. Tentukan $\nabla \cdot F$ di titik $(1, 1, \frac{\pi}{2})$.
 Penyelesaian:

$$\text{Maka } u(x, y, z) = 2xz \sin z \quad \text{maka } \frac{\partial u}{\partial x} = 2z \sin z \quad \text{dan } \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$v = \frac{1}{z}$$

$$\text{maka } \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$w = -ye^{yz}$$

$$\text{maka } \frac{\partial w}{\partial y} = -ze^{yz}$$

Maka

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (2z \sin z + 0) + (-ze^{yz})$$

$$= \frac{2\pi}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2}$$

$$= (2 \sin \pi - 4 \sin \pi) + 2 \frac{\pi}{2} - 4 \pi e^{2\pi}$$

Jadi

$$\nabla \cdot F(1, 1, \frac{\pi}{2}) = 2 \sin \pi - 4 \sin \pi + 2 = 2 e^{-1/2} (\frac{\pi}{2})$$

$$= 2 e^{-1/2}$$

3.4.4. Curl F

Curl F adalah hasil operasi cross antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$ dimana $\text{Curl } (F) =$

berbentuk Curl F

$F(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$ maka
 curl dari medan vektor tersebut $\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$$= (R_y - Q_z) \mathbf{i} - (R_x - P_z) \mathbf{j} + (Q_x - P_y) \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & R \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ Q & R \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Interpretasi fisis $\text{curl } F$ menyatakan arah sumbu dimana fluida tersebut berotasi

(melingkar, curl) paling cepat.

$|\text{Curl } F|$ menyatakan laju rotasi. Arah rotasi ini mengikuti aturan tangan kanan.

CONTOH 3.7

Hitung $\text{Curl } F(x, y, z)$ dengan $F = \frac{1}{y^2}(-x^2yz)\mathbf{i} + \ln(x^2y)\mathbf{j} + \frac{1}{x^2}\mathbf{k}$.

Jawab: Misal

$$F_1(x, y, z) = -\frac{x^2yz}{y^2}$$

$$F_2 = \ln(x^2y)$$

$$F_3 = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Curl } F = F_1 \times F_2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{x^2yz}{y^2} & \ln(x^2y) & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}$$

$$= (-y) - 0 + (-1)yz^2 + 2x + 0 - 0 = (-yz^2 + 2x)\mathbf{i}$$

$$= (-yz^2 + 2x)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (-yz^2 + 2x)\mathbf{i}$$

Verifikasi:

$$\begin{aligned} \text{Curl } F_2 \text{ di titik } (2, -\frac{1}{2}, 1) &= (-1 - \frac{1}{2}z^2 + 2x)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &= (-1 - \frac{1}{2} + 4)\mathbf{i} = 2\mathbf{i} \end{aligned}$$

CONTOH 3.8

Jika $F(x, y, z) = e^{2x} \cos y \mathbf{i} - e^{2x} \sin y \mathbf{j} + 9z \mathbf{k}$ dan $f(x, y, z) = 3y + \sqrt{(x^2 + z^2)}$

Tentukan:

- Curl (Curl F)
- Grad (div F)
- Grad (div(grad f))

Penyelesaian:

Diketahui $P = e^{2x} \cos y$

$$Q = -e^{2x} \sin y$$

$$R = 9z$$

$$\text{a. Curl } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (Pe^{2x} \cos y \mathbf{i} - Pe^{2x} \sin y \mathbf{j} + 9z \mathbf{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P \cos y & -P \sin y & 9z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P \cos y & -P \sin y & 9z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P \cos y & -P \sin y \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P \cos y & -P \sin y \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P \cos y & -P \sin y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (P \cos y - P \sin y) \mathbf{i} - (P \cos y + P \sin y) \mathbf{j} + (P \cos y - P \sin y) \mathbf{k}$$

$$= P(\cos y - \sin y) \mathbf{i} - P(\cos y + \sin y) \mathbf{j} + P(\cos y - \sin y) \mathbf{k}$$

$$\text{b. Grad } f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} f \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} f \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 3 & \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3y & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3y & 3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3y & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (3y - 3) \mathbf{i} - (3y - 3) \mathbf{j} + (3y - 3) \mathbf{k}$$

$$= (3y - 3) \mathbf{i} - (3y - 3) \mathbf{j} + (3y - 3) \mathbf{k}$$

• Kurva

$$P = e^{2x} \sin y$$

$$Q = -e^{2x} \cos y$$

$$R = 0$$

Nah

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2e^{2x} \sin y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^{2x} \cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2e^{2x} \cos y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{2x} \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

$$U(x, y, z) = \int P dx + \int \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dy + \int \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dz + f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{x_0}^x 2e^{2t} \sin y dt + \int_{y_0}^y -e^{2x} \sin t dt$$

$$= 2e^{2x} \sin y - e^{2x} \cos y + g(x, y, z)$$

$$= e^{2x} \sin y, \quad g(x, y, z) = 0$$

$$U(x, y, z) = e^{2x} \sin y + \left(\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \right) U$$

$$= \frac{2}{3} e^{2x} \sin y + \frac{1}{3} e^{2x} \cos y$$

$$= 2e^{2x} \sin y (1 - e^{2x} \cos y)$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = 3y - \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{z} \right) + \frac{3}{y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3}{y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3}{y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)$$

$$= \frac{3}{x^2} \left(1 + \frac{1}{z} \right) + \frac{3}{z^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(f) \cdot dV &= (2x + 4y + 1) \cdot dx \, dy \, dz \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} \right) dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z^2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z^2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{\sqrt{2}} \right) dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= \frac{z^2 - 1}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= -\sqrt{2}(1-z) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Grad}(\pm \pi(\operatorname{grad} f)) &= 6\pi \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} \right) dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z^2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z^2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{\sqrt{2}} \right) dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz \\
 &= \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} + \frac{(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{2}(1-z)} dz
 \end{aligned}$$

CONTOH 3.9

Misal $F(x, y, z) = x^{1/2} \sin yz + x^{-1/2} \cos yz + (\sin 2x)^{-1/2} \sin yz$. Carilah $F(x, y, z)$ jika $\nabla F(x, y, z) = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Tentukan:

a. $\nabla F(x, y, z)$

b. $\nabla^2 F(x, y, z)$

Carilah jawaban:

$\nabla F(x, y, z) = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$Q = x^{-1/2} \cos yz$

$R = \ln 2z$

$$\begin{aligned} \text{a. } \nabla F &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \mathbf{k} = F(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_3}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin yz - \frac{1}{2} x^{-3/2} \cos yz + \frac{1}{2} (\sin 2x)^{-1/2} \sin yz \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin yz + \frac{1}{2} x^{-3/2} (-\cos yz) + \frac{1}{2} (\sin 2x)^{-1/2} \sin yz \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin yz - \frac{1}{2} x^{-3/2} \cos yz + \frac{1}{2} (\sin 2x)^{-1/2} \sin yz \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin yz - \frac{1}{2} x^{-3/2} \cos yz + \frac{1}{2} (\sin 2x)^{-1/2} \sin yz = \frac{1}{2} \mathbf{i} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \mathbf{j} = \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial y} \right) \mathbf{j} = \left(\frac{\partial}{\partial y} (x^{1/2} \sin yz) + \frac{\partial}{\partial y} (x^{-1/2} \cos yz) + \frac{\partial}{\partial y} ((\sin 2x)^{-1/2} \sin yz) \right) \mathbf{j} \\ &= \left(\frac{1}{2} x^{1/2} \cos yz - \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin yz + (\sin 2x)^{-1/2} \cos yz \right) \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

c. Carilah:

$P = x^{1/2} \sin yz$

$Q = x^{-1/2} \cos yz$

$R = \ln 2z$

Carilah:

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin yz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^{1/2} \cos yz$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2} x^{1/2} \sin yz$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{2} x^{-3/2} \cos yz$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -x^{-1/2} \sin yz$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -x^{-1/2} \sin yz$

$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{z} \ln 2z$

[illegible]

CONTOH 3.10

Jika $F(x, y, z) = e^{2xz}i + e^{-2z} \cos y j + \sin^2 3z k$ dan $f(x, y, z) = 2xy^2z$

Tentukan:

a. $(\nabla^2 F)(-f)$

b. $(\nabla^2 \times F).(2F)$

Penyelesaian:

Diketahui

$$P = e^{2xz}$$

$$Q = e^{-2z} \cos y$$

$$R = \sin^2 3z$$

$$\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (P i + Q j + R k) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} k$$

$$= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) i + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) j + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (2e^{2xz}) i + \frac{\partial}{\partial y} (-e^{-2z} \sin y) j + \frac{\partial}{\partial z} (2 \sin 3z \cos 3z) k$$

$$= 2e^{2xz} i - e^{-2z} \sin y j + 2 \sin 6z \cos 3z k$$

$$= 2e^{2xz} i - e^{-2z} \sin y j + \sin 6z k$$

$$(\nabla^2 F)(-f) = (2e^{2xz} i - e^{-2z} \sin y j + \sin 6z k) \cdot (-2xy^2z k)$$

$$= -2xy^2z \sin 6z$$

b. Kita tahu

$$P = e^{2xz}$$

$$Q = e^{-2z} \cos y$$

$$R = \sin^2 3z$$

Maka

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2e^{2xz} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{-2z} \sin y \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2e^{-2z} \cos y$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3 \sin 6z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{-2z} \sin y \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2e^{-2z} \cos y$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3 \sin 6z$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3 \sin 6z$$

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \vec{F} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2} & \frac{1}{z^2} \\ \frac{y}{x^2} & \frac{x}{y^2} & \frac{z}{x^2} \\ \frac{x}{y^2} & \frac{y}{z^2} & \frac{z}{y^2} \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) k \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) k \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \right) k \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2} \right) i + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \right) j + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{x^2} \right) k \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2}{x^3} \right) i + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{y^3} \right) j \\
 &= -\frac{6}{x^3} j + \frac{6}{y^3} i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (16) \quad (F \cdot \nabla^2)(\sin y) &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2y} \cos y + \frac{1}{2} e^{2y} \cos y \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sin y + \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-2y} \cos y \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-2y} \cos y + \frac{1}{2} e^{2y} \cos y \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-2y} \cos y + \frac{1}{2} e^{2y} \cos y
 \end{aligned}$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

LATIHAN 3

1. Tentukan $\text{div} F$ dan $\text{curl } F$ dari :

a. $F(x, y, z) = x^3 yz \mathbf{i} + 2xy^2 \mathbf{j} + 3xz \mathbf{k}$

b. $F(x, y, z) = e^x \cos x \mathbf{i} + e^x \sin y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$

2. Tentukan ∇f dari:

a. $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz^2 + 3z$

b. $f(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^3 + y^2 + z^2)$

3. Diketahui fungsi vektor $V(x, y, z) = 3x^3 y^2 \mathbf{i} + 4yz^3 \mathbf{j} - 2y z^5 \mathbf{k}$ dan fungsi skalar $\rho(x, y, z) = 3xz^3 y^2$. Tentukan :

a. $\text{curl } V$ and $\nabla(\rho(x, y, z))$

b. $\nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \right)$ and $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \right)$

c. $\text{Div}(\rho V)$ and $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \right)$

4. Diketahui fungsi vektor $V(x, y, z) = xy^3 z^2 \mathbf{i} + 2y^3 z^3 \mathbf{j} - (4xz^2 + 2z) \mathbf{k}$ dan $F(x, y, z) = (-x^3 z^3) \mathbf{i} - 3y^3 z^2 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$. Tentukan :

a. $\int_C [(-1)xyz^2 \mathbf{i} + 2y^3 \mathbf{j} + 3xz^2 \mathbf{k}] \cdot d\mathbf{r}$

b. $\int_C [F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}] = \int_C F(x, y, z) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$

c. $\text{Div} F(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot F(x, y, z)$

5. Diketahui fungsi vector $V(x, y, z) = 2x^4 y^3 i + 5y^2 z^3 j - 2yz^2 k$ dan fungsi skalar $\rho(x, y, z) = 3xz^3 y^2$. Tentukan :

a. Curl Grad $3\rho(x, y, z)$

b. $\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} V(x, y, z) \right)$

c. $\text{Div} \left(\frac{1}{\rho} V(x, y, z) \right)$

6. Diketahui fungsi vector $V(x, y, z) = 2x^2 y^3 z^2 i + y^4 z^2 j - (6xz^3 + 4z^2) k$ dan $F(x, y, z) = 3x^2 z^4 i - 2y^4 z^2 j + 5z^2 k$ dan fungsi skalar $\rho(x, y, z) = 4x^3 y^2 z^4$.

Tentukan :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} V(x, y, z) \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot V(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot F \times \frac{1}{\rho} V(x, y, z) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (F \times V(x, y, z))$$

$$\nabla \cdot (\text{Div} \left(\frac{1}{\rho} V(x, y, z) \right)) = \text{Div} \left(\frac{1}{\rho} V(x, y, z) \right)$$

$$\nabla \cdot (\rho V(x, y, z)) = \rho \nabla \cdot V(x, y, z) + V(x, y, z) \cdot \nabla \rho \quad \text{Dik: dan } \rho(x, y, z) = 4x^3 y^2 z^4$$

Dik: dan

$$V(x, y, z) = 2x^2 y^3 z^2 i$$

$$+ y^4 z^2 j + (F(x, y, z))$$

$$\nabla \cdot (\rho V(x, y, z)) = \rho \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} + V(x, y, z) \cdot \nabla \rho = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

Tentukan :

$$\nabla \cdot (\rho V(x, y, z)) = \rho \nabla \cdot V$$

$$+ (F(x, y, z)) \cdot \nabla \rho$$

BAB 4

INTEGRAL GARIS

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami konsep integral garis secara langsung.
2. Memahami konsep Teorema Green, ketaktergantungan lintasan.

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral garis terhadap satu atau lebih lengkungan. Untuk lengkungan tertutup integral garis dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Green. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral garis untuk menghitung divergensi dan sirkulasi.

4.1 Integral Garis Medan Skalar

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di suatu ruang R^n dan $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ suatu fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada C . Maka integral garis dari fungsi f pada C dari titik A ke titik B ditulis (Ash & Ash, 1998)

$$\int_C f(x) dS, \text{ dimana } dS = \text{elemen diferensial busur}$$

Khusus untuk $n = 2$ maka $f = f(x, y)$ dan C lengkungan pada bidang xy .

4.2 Definisi Integral Garis

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B . Misalkan $X(t)$ persamaan parameter lengkungan C dengan $t \in [a, b]$. Jadi $X(a) = A, X(b) = B$.

Ambil partisi dari $[a, b]$ dan $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dengan $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Sebut $X(t_i) = A_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. $X(t_0) = A_0 = A$; $X(t_n) = A_n = B$.

Bila C terorientasi positif (arah positif terhadap pertambahan nilai t) maka partisi dari $[a, b]$ menghasilkan pembagian lengkungan C atas n busur-busur kecil.

Sebut Δs_i adalah panjang busur $A_{i-1} A_i$ dan $|P|$ adalah maksimal $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Sekarang ambil titik-titik X_i pada busur $A_{i-1} A_i$ dan bentuk jumlah Riemann (Goodwillie, 1991)

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(X_i) \Delta s_i = \int_C f(x) ds$$

4.3 Menghitung Integral Garis $\int_C f(x) ds$

Untuk $n = 2$. Jika $f = f(x, y)$ dan C lengkungan mulus dengan persamaan parameter $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$

Maka

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

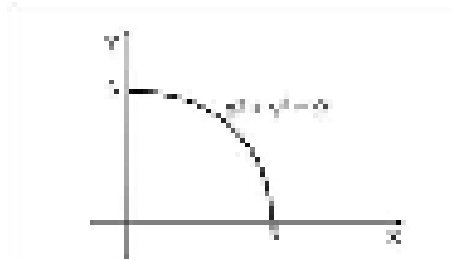
Untuk $n = 3$. Jika $f = f(x, y, z)$ dan C lengkungan mulus di R^3 dengan persamaan parameter $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$ maka

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

CONTOH 4.1

Hitung $\int_C x^2 y \, dS$ jika C busur lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 4.1 Busur $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama

Persamaan parameter C:

$$\begin{aligned}
 \int_C x^2 y \, dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t)^2 (3 \sin t) \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27 \cos^2 t \sin t \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27 \cos^2 t \sin t \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81 \cos^2 t \sin t \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81 \cos^2 t \, d(-\cos t) \\
 &= -31 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, d(\cos t) \\
 &= -31 \left[\cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

CONTOH 4.2

Hitung $\int_C (2x + 9z) \, dS$ jika C lengkungan $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dan $0 \leq t \leq 1$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int_C (2x + 9z) \, dS &= \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{1 + (2t)^2 + (3t^2)^2} \, dt \\&= \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \, dt \\&= \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{(t^2 + 1)^2 + 8t^2} \, dt\end{aligned}$$

$$\text{Sebabkan substitusi integral } t = (2t^2 + 9t^2) \sqrt{(2t^2 + 1)^2 + 8t^2} \cdot \frac{1}{2} \, dt$$

$$\text{Maka substitusi} \quad 2t^2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \tan \theta$$

$$\text{maka} \quad t^2 = \frac{2}{5} \sqrt{5} \tan \theta - \frac{9}{2}$$

$$2t \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\text{Jadi} \quad 2t^2 \, dt = 9t^2 \, (1,1)$$

$$= \left(\frac{2}{5} \tan \theta - \frac{9}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$$

Jadi

[illegible]

Jadi

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}}(2) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2} [(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 4] e^{i\theta} + e^{-i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (14\pi/4 - 4) \end{aligned}$$

4.4 Integral Garis Medan Vektor

Misalkan $F(x)$ medan vektor dan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di R^n , maka $\int_C F(x).dX$ dikatakan integral garis dari medan vektor F pada C dari titik A ke B .

Untuk $n = 2$, $F(x) = F(x, y) = F_1(x, y) i + F_2(x, y) j$

$$dX = dx \, i + dy \, j, \text{ sehingga}$$

$$\int_C F(x) \cdot dX = \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

Untuk $n = 3$, $F(x) = F_1(x, y, z) i + F_2(x, y, z) j + F_3(x, y, z) k$
 $dX = dx i + dy j + dz k$, sehingga

$$\int_C F(x) \cdot dX = \int_C F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

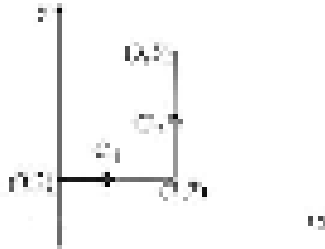
Sifat-sifat integral garis sebagai berikut:

- $\int_C (\alpha F + \beta G) \cdot dX = \alpha \int_C F \cdot dX + \beta \int_C G \cdot dX$, dimana α dan β konstanta.
- Jika $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$, maka $\int_C F(x) \cdot dX = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} F(x) \cdot dX$

CONTOH 4.3

Tentukan integral garis $\int_C xy^2 dx + xy^2 dy$ di sepanjang lintasan $C = C_1 \cup C_2$ yang menghubungkan titik $(0,2)$, $(3,2)$ dan $(3,5)$.

Penyelesaian:



Gambar 4.2 Lintasan C dari titik $(0,2)$, $(3,2)$ dan $(3,5)$.

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C xy^2 dx + xy^2 dy = [\int_{C_1} xy^2 dx + xy^2 dy] + [\int_{C_2} xy^2 dx + xy^2 dy]$$

Pada lintasan C_1 , $y = 2$ maka $dy = 0$ sehingga

$$\int_{C_1} xy^2 dx + xy^2 dy = \int_0^3 4x^3 dx$$

$$= 2x^2 \Big|_0 = 18$$

Pada lintasan C_2 , $x = 3$ maka $dx = 0$ sehingga

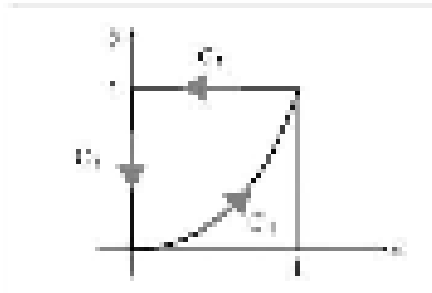
$$\begin{aligned}\int_{C_2} xy^2 dx + xy^2 dy &= \int_2^5 3y^2 dy \\ &= y^3 \Big|_2^5 \\ &= 125 - 8 \\ &= 117\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } \int_C xy^2 dx + xy^2 dy &= [\int_{C_1} xy^2 dx + xy^2 dy] + [\int_{C_2} xy^2 dx + xy^2 dy] \\ &= 18 + 117\end{aligned}$$

CONTOH 4.4

Tentukan $\int_C y dx + xy dy$ jika C parabola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ dan segmen garis dari titik $(1,1)$ ke $(0,1)$ kembali ke titik asal.

Penyelesaian:



Gambar 4.3 C dibatasi $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, titik $(1,1)$, $(0,1)$ dan $(0,0)$

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, ditulis $C = C_1 C_2 C_3$

Maka

$$\int_C y dx + xy dy = \int_{C_1} y dx + xy dy + \int_{C_2} y dx + xy dy + \int_{C_3} y dx + xy dy$$

Pada lintasan $C_1, y = x^2$ maka $dy = 2xdx$
sehingga

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2 dx - xy^2 dy &= \int_0^1 x^4 dx + (x^2)^2 (-2x) dx \\ &= \int_0^1 (x^4 - 2x^5) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{6} x^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}\end{aligned}$$

Pada lintasan $C_2, y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga

$$\int_{C_2} y^2 dx - xy^2 dy = \int_0^2 0 dx = 0$$

Pada lintasan $C_3, x = 2$ maka $dx = 0$

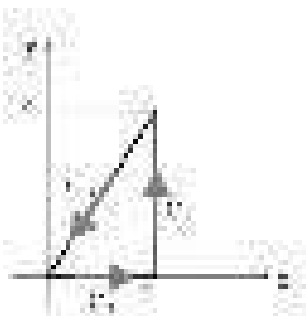
$$\int_{C_3} y^2 dx - xy^2 dy = \int_0^1 0 dy = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } \int_C y^2 dx + xy^2 dy &= \int_{C_1} y^2 dx + xy^2 dy + \int_{C_2} y^2 dx + xy^2 dy + \int_{C_3} y^2 dx + xy^2 dy \\ &= -\frac{2}{15} + 0 + 0 = -\frac{2}{15}\end{aligned}$$

CONTOH 4.5

Tentukan $\int_C 2xy^2 dx - 3xy dy$ jika C dibatasi oleh $y = 2x, y = 0$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:



Gambar 4.4 Lintasan C dibatasi $y = 2x, y = 0$ dan $x = 2$

Lintasan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Maka $\int_C 2xy^2 dx - 3xy dy =$

$$\int_{C_1} 2xy^2 dx - 3xy dy + \int_{C_2} 2xy^2 dx - 3xy dy + \int_{C_3} 2xy^2 dx - 3xy dy$$

Pada lintasan C_1 , $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga

$$\int_{C_1} 2xy^2 dx - 3xy dy = 0$$

Pada lintasan C_2 , $x = 2$ maka $dx = 0$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_{C_2} 2xy^2 dx - 3xy dy &= -\int_0^4 6y dy \\ &= -3y^2 \Big|_0^4 = -48 \end{aligned}$$

Pada lintasan C_3 , $y = 2x$ maka $dy = 2 dx$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_{C_3} 2xy^2 dx - 3xy dy &= \int_{C_3} 2x(2x)^2 dx - 3x(2x)(2dx) \\ &= \int_{C_3} 8x^3 dx - 12x^2 dx \\ &= \int_2^0 (8x^3 - 12x^2) dx \\ &= (2x^4 - 4x^3) \Big|_2^0 \\ &= 0 - (32 - 32) = 0 \end{aligned}$$

Jadi $\int_C y dx + xy dy$

$$\begin{aligned} &= \int_{C_1} 2xy^2 dx - 3xy dy + \int_{C_2} 2xy^2 dx - 3xy dy + \int_{C_3} 2xy^2 dx - 3xy dy \\ &= -48 \end{aligned}$$

4.5 Aplikasi Integral Garis

Integral Garis dapat diaplikasikan untuk menentukan massa, momen massa dan titik pusat massa jika rapat massa di setiap titik diketahui.

a. Pada ruang R^2

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y)$, maka:

- i. Massa $= m = \int_C \rho(x, y) dS$.
- ii. Momen massa C
 - terhadap sumbu $x : M_x = \int_C y \rho(x, y) dS$.
 - terhadap sumbu $y : M_y = \int_C x \rho(x, y) dS$.
- iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$.

b. Pada ruang R^3

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y, z)$, maka:

- i. Massa $= m = \int_C \rho(x, y) dS$.
- ii. Momen massa C
 - terhadap bidang $xy : M_{xy} = \int_C z \rho(x, y) dS$.
 - terhadap bidang $yz : M_{yz} = \int_C x \rho(x, y) dS$.
 - terhadap bidang $xz : M_{xz} = \int_C y \rho(x, y) dS$.
- iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right)$.

CONTOH 4.6

Tentukan massa dan titik pusat massa dari kawat dengan persamaan parameter $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$, $0 \leq t \leq \pi$, dengan rapat massa kz .

Penyelesaian:

- Massa kawat

$$\begin{aligned}
 m &= \int_C \rho \, dS = \int_C kz \, dS \\
 &= \int_C kz \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2)} \, dt \\
 &= k \int_0^\pi 4t \sqrt{((-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2)} \, dt \\
 &= 4k \int_0^\pi t \sqrt{(9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16)} \, dt \\
 &= 4k \int_0^\pi t \sqrt{(9 + 16)} \, dt \\
 &= 20k \int_0^\pi t \, dt \\
 &= 10k [t^2]_0^\pi = 10k\pi^2
 \end{aligned}$$

- Momen massa terhadap bidang xy

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \int_C \rho \, z \, dS = \int_C kz \cdot z \, dS = \int_C kz^2 \, dS \\
 &= k \int_0^\pi (16t^2) 5 \, dt \\
 &= 80k \int_0^\pi t^2 \, dt \\
 &= \frac{80k}{3} [t^3]_0^\pi \\
 &= \frac{80k}{3} \pi^3
 \end{aligned}$$

- Momen massa terhadap bidang xz

$$\begin{aligned}
 M_{xz} &= \int_C \rho \, x \, dS = \int_C kz \cdot x \, dS = \\
 &= k \int_0^\pi (4t)(3 \cos t) 5 \, dt \\
 &= 60k \int_0^\pi t (\cos t) \, dt \\
 &= 60k \int_0^\pi t \, d(-\sin t) \\
 &= -60k \int_0^\pi t \, d(\sin t) \quad (\text{Gunakan Integral Parsial})
 \end{aligned}$$

$$= -60k (t \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi \cos t \, dt)$$

$$= -60k (\pi \cos \pi - \sin t]_0^\pi)$$

$$= -60k (-\pi)$$

$$= 60k\pi$$

- Momen massa terhadap bidang yz

$$Myx = \int_C \rho x \, dS = \int_C kz.x \, dS =$$

$$= k \int_0^\pi (4t)(3 \cos t) 5 \, dt$$

$$= 60k \int_0^\pi (t)(\cos t) \, dt$$

$$= 60k \int_0^\pi t \, d(\sin t) \quad (\text{Gunakan Integral Parsial})$$

$$= 60k (t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t \, dt)$$

$$= 60k (\pi \sin \pi + \cos t]_0^\pi)$$

$$= 60k (0-2)$$

$$= -120k$$

$$M_x = \frac{3k}{4} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{k}{3}$$

$$M_y = \frac{3k}{4} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{k}{3}$$

$$\therefore \text{Titik pusat massa} = \left(-\frac{15}{4}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

4.6. Ketaktergantungan Lintasan (Bebas Lintasan)

Definisi :

Untuk setiap lengkungan C dari titik A ke B nilai $\int_C F(x).dx$ tetap harganya maka $\int_C F(x).dx$ dikatakan tidak tergantung lintasan dari A ke B .



Gambar 4.5 Lintasan dari titik A ke titik B

Dalam kasus ini $\int_{C_1} F(x).dx = \int_{C_2} F(x).dx$

Artinya $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari titik A ke B melalui C_1 atau C_2 .

Syarat yang harus dipenuhi $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari C akan diperlihatkan oleh Teorema berikut.

Teorema 1 :

Jika C lengkungan licin dari titik A ke B . Fungsi $f(x)$ terdefinisi dan kontinu pada daerah terbuka yang memuat C , maka :

$$\int_C \nabla f(x).dx = f(B) - f(A)$$

Teorema 2 :

Jika $F(x)$ medan vektor yang kontinu pada daerah terbuka D dan tersambung sederhana. Misalkan A dan B dua titik di D . Maka $\int_C F(x).dx$ tidak tergantung lintasan dari A ke B jika dan hanya jika terdapat medan skalar f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$. $F(x)$ disebut medan konservatif.

Untuk menunjukkan F konservatif :

1. Jika $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ maka F konservatif jika memenuhi $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
2. Jika $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ maka F konservatif jika $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

Langkah - langkah untuk menunjukkan ketaktergantungan lintasan dari titik A ke B adalah sebagai berikut:

1. Tunjukkan F konservatif.
2. Tentukan f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$.
3. $\int_C F(x) dx = f(B) - f(A)$

CONTOH 4.7

Jika $F(x,y) = 2xy i + (x^2 + 4y^3) j$ adalah medan vektor. Tentukan:

- a. Apakah F konservatif
- b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
- c. Hitung $\int_C F.dX$ dari titik $A = (1,4)$ ke titik $B = (-2,6)$

Penyelesaian:

- a. Dari medan vektor F , diperoleh :

$$M(x,y) = 2xy \text{ dan } N(x,y) = x^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ maka F adalah konservatif

- b. Karena $F = \nabla f$

$$\nabla f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\text{Sehingga diperoleh } \frac{\partial f}{\partial x} = 2y \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 12y^2$$

$$\text{Maka } \frac{\partial f}{\partial x} = 2y = 2 \cdot 4$$

$$\text{Maka } f(x,y) = 8y + g(y)$$

Sehingga, kita dapat tulis:

$$\text{Jadi } \frac{d^2}{dt^2} = 4$$

$$x^2 + h(y) = x^2 + (y^2)$$

$$\text{maka } h'(y) = 2y^2$$

$$\text{Sehingga } h(y) = y^2 + C$$

$$\text{Sehingga } F(x,y) = x^2y + y^2 + C$$

$$\text{a. } \int_C F(x,y) dx = f(0) - f(1) = [x^2y + y^2]_{x=0}^1 = 250$$

CONTOH 4.8

Misal $F(x,y,z) = -\frac{2}{x^2}i + \frac{1}{y}j - 2xz$ adalah medan vektor. Tentukan:

- Apakah F konservatif
- Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
- Hitung $\int_C F dx$ dari titik $A = (1,1,1)$ ke titik $B = (2,4,2)$

Penyelesaian:

- Dari medan vector F , diketahui :

$$\text{maka } \vec{F} = -\frac{2}{x^2}i + \frac{1}{y}j - 2xz$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^3} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad \text{maka } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^3}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad \text{maka } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \text{maka } \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\text{Jadi } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

maka $\text{Curl } F = 0$

sehingga F adalah konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$P i + Q j + R k = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$\text{diperoleh } \frac{\partial f}{\partial x} = 2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2, \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial z} = 2$$

Untuk menentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \Rightarrow f = 2x + g(y, z)$$

$$\text{maka } f(x, y, z) = 2x + g(y, z)$$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

$$\text{dari } \frac{\partial f}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (2x + g(y, z)) = 2$$

$$\text{maka } H'(y, z) = 0$$

$$\text{sehingga } H(y, z) = G(z) + C_1$$

$$f(x, y, z) = 2x + G(z) + C_1$$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

$$\text{dari } \frac{\partial f}{\partial z} = 2$$

$$G'(z) = 2z$$

$$\text{maka } G(z) = z^2 + C_2$$

$$\text{Jadi } f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C$$

$$\text{c. } \int_C F(x) dX = f(B) - f(A) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \right]_A^B =$$

CONTOH 4.9

Jika $F(x, y, z) = 2xyz^2 \mathbf{i} + (x^2 z^2 + 3y) \mathbf{j} + 2x^2 y z \mathbf{k}$ adalah medan vektor.

Tentukan $\int_C F \cdot d\mathbf{X}$ jika C lengkungan licin dari titik $A = (2, 0, 1)$ ke titik $B = (0, -1, 1)$

Penyelesaian:

a. Dari medan vektor F , diketahui :

$$P = 2xyz^2$$

$$Q = x^2 z^2 + 3y$$

$$R = 2x^2 y z$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 2xz^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 2xy \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= 4xy, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2xy \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial z} = 2xy \end{aligned}$$

$$\text{Maka, } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

atau $\text{Curl } F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R$

akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xyz^2$$

maka $f(x, y, z) = x^2 y z^2 + H(y, z)$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

dari

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y$$

$$x^2 z^2 + H'(y, z) = x^2 z^2 + 3y$$

maka $H'(y, z) = 3y$

sehingga $H(y, z) = \frac{3}{2} y^2 + G(z)$

$$f(x, y, z) = x^2 y z^2 + \frac{3}{2} y^2 + G(z)$$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

dari $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

$$2x^2 y z + G'(z) = 2x^2 y z$$

$$G'(z) = 0$$

maka $G(z) = C$

Jadi $f(x, y, z) = x^2 y z^2 + \frac{3}{2} y^2 + C$

c. $\int_c F(x) dX = f(B) - f(A)$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0$$

CONTOH 4.10

Tunjukkan $\int_c F.dX$ tak tergantung lintasan jika $F(x, y, z) = (4xy^2z + \frac{3}{2}z^2)i$

$+ (4x^2yz + 4z + 5)j + (2x^2y^2 + 3xz + 4y)k$ adalah medan

vektor.

Penyelesaian:

Penyelesaian soal ini harus melalui 2 tahap, pertama tunjukkan F medan vektor konservatif dan tahap kedua tentukan fungsi $f(x, y, z)$

$$\begin{aligned} P &= 4xy^2z + \frac{3}{2}z^2 \\ Q &= 4x^2yz + 4z + 5 \\ R &= 2x^2y^2 + 3xz + 4y \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 8xz, \frac{\partial P}{\partial z} = 3z \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 8yz, \frac{\partial Q}{\partial z} = 4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} F_1 &= 4xy - z, & F_2 &= 4xz + 1, & \text{dan} & & F_3 &= 4yz - 4x \\ F_4 &= 4xy^2 + 2z, & F_5 &= 4xy^2 + 2z, & \text{dan} & & F_6 &= 4xz - 4x^2 + 4z \end{aligned}$$

$$\text{Karena } \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_3}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_6}{\partial x}$$

atau $\text{Curl } F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$P i + Q j + R k = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$\text{Sehingga diperoleh } \frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

Akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 4xy^2z + \frac{2}{3}x^3$$

$$\text{maka } f(x, y, z) = \frac{4}{3}xy^2z^2 + \frac{1}{3}x^3 + G(y, z)$$

Selanjutnya akan dicari $H(y, z)$

$$\text{dari } \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

$$4x^2yz + H'(y, z) = 4x^2yz + 4z + 5$$

$$\text{maka } H'(y, z) = 4z + 5$$

$$\text{sehingga } H(y, z) = 4yz + 5y + G(z)$$

maka

$$f(x, y, z) = \frac{4}{3}xy^2z^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4yz + 5y + G(z)$$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

$$\text{dari } \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

$$2x^2yz^2 + 3xz + 4y + G'(z) = 2x^2yz^2 + 3xz + 4y$$

$$G'(z) = 0$$

$$\text{maka } G(z) = C$$

$$\text{Jadi } f(x, y, z) = \frac{4}{3}xy^2z^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4yz + 5y + C$$

Maka terbukti $\int_C F \cdot dX$ tak tergantung lintasan

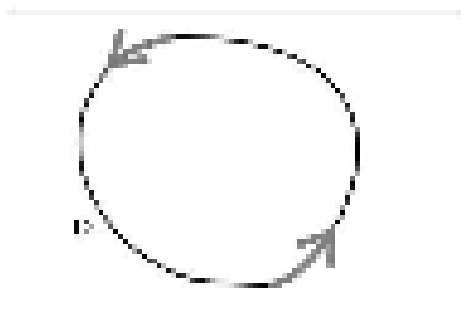
4.7. Teorema Green pada Bidang

Teorema Green :

Jika C lengkungan tertutup sederhana yang merupakan batas daerah D . Misalkan $F(x, y) = M(x, y) i + N(x, y) j$ suatu medan vektor. Jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ kontinu dan mempunyai turunan parsial pada D dan C . Maka :

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$\text{atau} \quad \oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$



Gambar 4.6 D lengkungan tertutup C

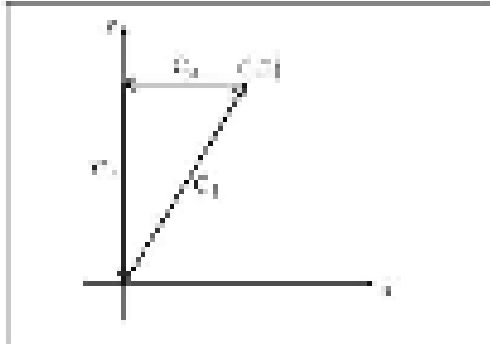
Note : arah positif C adalah berlawanan arah jarum jam.

CONTOH 4.11

Misalkan C dibatasi oleh rusuk-rusuk dari segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(0,0)$, $(1,2)$ dan $(0,2)$. Hitung $\oint_C 4x^2 y dx + 2y dy$ dengan menggunakan

- Cara langsung
- Teorema Green

Penyelesaian:



Gambar 4.7 Lintasan C dibatasi oleh $(0,0)$, $(1,2)$ dan $(0,2)$.

a. Cara Langsung

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Pada C_1 diperoleh $y = 2x$ maka $dy = 2dx$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int_{C_1} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \int_0^1 (8x^3 + 8x) \, dx \\ &= [2x^4 + 4x^2]_0^1 = 6 \end{aligned}$$

Pada C_2 diperoleh $y = 2$ maka $dy = 0$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int_{C_2} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \int_1^0 8x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{8}{3} x^3 \right]_1^0 = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Pada C_3 diperoleh $x = 0$ maka $dx = 0$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int_{C_3} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \int_2^0 2y \, dy \\ &= [y^2]_2^0 = -4 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \oint_C 4x^2 y \, dx + 2y \, dy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$$

b. Dengan menggunakan Teorema Green

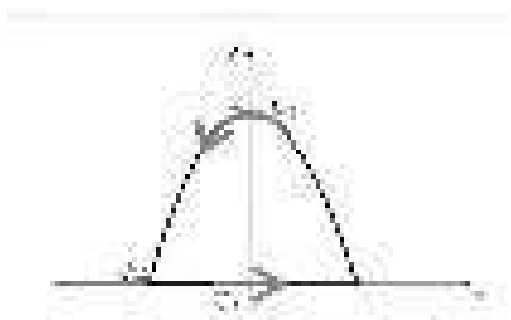
$$\begin{aligned}
 \oint_C F \cdot dX &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \\
 \oint_C 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \iint_D (0 - 4x^2) \, dA \\
 &= \int_0^1 \int_{y=2x}^{y=2} -4x^2 \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 -4x^2 (2 - 2x) \, dx \\
 &= \int_0^1 (-4x^2 + 8x^3) \, dx \\
 &= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^4 \right]_0^1 \\
 &= -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

CONTOH 4.12

Buktikan kebenaran Teorema Green jika diketahui medan vektor $F = x^2 y \, i - 3x \, j$ yang bekerja pada lintasan C yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan sumbu x .

Penyelesaian:

Membuktikan kebenaran Teorema Green yaitu dengan cara membuktikan hasil dengan cara langsung sama dengan hasil menggunakan Teorema Green.



Gambar 4.8 Lintasan C dibatasi $y = 2 - x^2$ dan sumbu x .

a. Cara Langsung

$$C = C_1 + C_2$$

Pada C_1 persamaan $y = 2 - x^2$ maka $dy = -2x \, dx$

sehingga $\int_{C_1} x^2 y \, dx - 3x \, dy =$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 (2 - x^2) \, dx - 3x (-2x) \, dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4) \, dx + 6x^2 \, dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (8x^2 - x^4) \, dx \\ &= \left[\frac{8}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{128}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pada C_2 diperoleh $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga $\int_{C_2} x^2 y \, dx - 3x \, dy = 0$

$$\text{Jadi } \oint_C x^2 y \, dx - 3x \, dy = \frac{-136}{15} \sqrt{2}$$

b. Teorema Green

$$\oint_C F \, dX = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_C x^2 y \, dx - 3x \, dy = \iint_D (-3 - x^2) dA$$

Karena simetri D di kuadran I (D_1) dan di kuadran II (D_2), maka $D = 2D_1$

$$\begin{aligned} &= 2 \iint_{D_1} (-3 - x^2) dA \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{y=2-x^2} (-3 - x^2) dy dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (-3 - x^2) y \Big|_{y=0}^{y=2-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (-3 - x^2) (2 - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (-6 + x^2 + x^4) dx \\ &= 2 \left[-6x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{128}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Hasil secara langsung sama dengan hasil Teorema Green, maka kebenaran Teorema Green terbukti.

4.8 Fluks dan Sirkulasi

4.8.1. Fluks F melalui C

Misalkan C lengkungan licin yang tertutup dan sederhana dengan orientasi berlawanan dengan arah jarum jam. Misalkan C mempunyai persamaan parameter:

$x = x(s)$ dan $y = y(s)$, s parameter panjang busur.

Maka vektor garis singgung satuan T adalah

$$T = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j$$

dan vektor normal satuan n yang arahnya keluar dari daerah D yang dibatasi C adalah

$$n = \frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j$$

Jika $F(x, y) = M(x, y) i + N(x, y) j$ suatu medan vector. Maka untuk menghitung Fluks F melalui C yaitu banyaknya fluida (zat cair) yang meninggalkan D . Menghitung Fluks $\oint_C F \cdot n \, dS$ dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot n \, dS &= \oint_C (Mi + Nj) \cdot \left(\frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j \right) ds \\ &= \oint_C \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy \end{aligned}$$

Karena $\text{div } F = \nabla \cdot F =$

$$\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (M) + \frac{\partial}{\partial y} (N) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

4.8.2 Sirkulasi F melalui C

Misalkan $F(x, y, z) = M(x, y)i + N(x, y)j + 0k$, dimana komponen z dari F adalah nol (0). Sirkulasi / kecenderungan fluida untuk berputar pada titik (x_0, y_0) . Jika $\text{Curl } F = 0$ pada D , maka aliran fluida dikatakan tidak dapat berputar.

Untuk menentukan sirkulasi F melalui C dapat menggunakan Teorema Stokes.

Teorema Stokes untuk bidang

Sirkulasi F melalui C adalah :

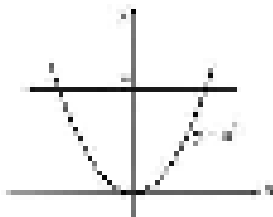
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{Curl } F) \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

CONTOH 4.13

Jika $F = 3xy \, i + 2xj$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$. Hitunglah:

- Fluks F melalui C
- Sirkulasi F sepanjang C

Penyelesaian:



Gambar 4.9 Lintasan C dibatasi $y = x^2$ dan $y = 4$

a. Perpotongan $y = x^2$ dan $y = 4$

diperoleh $4 = x^2$ sehingga $x = \pm 2$

$M = 3xy$ maka

$N = 2x$ maka

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss, maka Fluks F melalui C adalah

$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot n \, dS &= \iint_D \operatorname{div} F \, dA = \iint_D \nabla \cdot F \, dA \\ &= \iint_D 3y \, dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{y=x^2}^4 3y \, dy \, dx \\ &= 2 \int_0^2 \int_{y=x^2}^4 3y \, dy \, dx \\ &= 2 \int_0^2 [16 - x^4] \, dx \\ &= 3 \left[16x - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{144}{5} \text{ satuan kubik}\end{aligned}$$

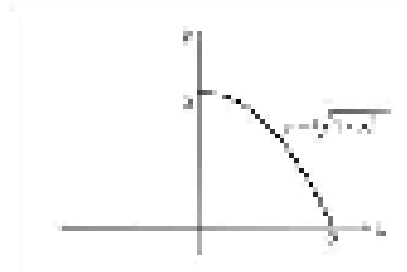
b. $\frac{25}{3} - 3x - \frac{9}{2} - 3x$

$$\begin{aligned}\text{Sirkulasi} &= \oint_C F \cdot T \, dS = \oint_C M \, dx + N \, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (2x - 3x) \, dA \\ &= \iint_D (-3x) \, dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{y=x^2}^4 -3x \, dy \, dx \\ &= 2 \int_0^2 \int_{y=x^2}^4 -3x \, dy \, dx \\ &= -6 \int_0^2 [xy]_{y=x^2}^4 \, dx \\ &= -6 \int_0^2 x [4 - x^2] \, dx \\ &= -6 \int_0^2 [4x - x^3] \, dx \\ &= -6 \left[2x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = -24\end{aligned}$$

CONTOH 4.14

Jika $F = x^2 \mathbf{i} - 4(x+y)\mathbf{j}$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4-x^2}$ di kuadran pertama. Tentukanlah:

- Fluks F melalui C
 - Sirkulasi F sepanjang C
- Penyelesaian:



Gambar 4.10 Lintasan C dibatasi $y = \sqrt{4-x^2}$ di kuadran I

- $M = x^2$ maka $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$
 $N = -4(x+y)$ maka $\frac{\partial N}{\partial y} = -4$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss, maka Fluks F melalui C adalah

$$\begin{aligned}
 \oint_C F \cdot n \, dS &= \iint_D \operatorname{div} F \, dA = \iint_D \nabla \cdot F \, dA \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
 &= \iint_D (2x - 4) \, dA \\
 &= \int_0^2 \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} (2x - 4) \, dy \, dx \\
 &= 2 \int_0^2 (2x - 4) y \Big|_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= 2 \int_0^2 (2x - 4) \sqrt{4-x^2} \, dx \\
 &= 2 \int_0^2 (2x \sqrt{4-x^2} - 4\sqrt{4-x^2}) \, dx
 \end{aligned}$$

Selesaikan terlebih dahulu masing-masing integral

$\int_0 (2x\sqrt{4-x^2}) dx$ gunakan metode substitusi $u = 4 - x^2$, $du = -2x dx$

$$\begin{aligned}\int (2x\sqrt{4-x^2}) dx &= \int \sqrt{u} (-du) \\ &= -\int \sqrt{u} (du) \\ &= -\frac{2}{3} u^{3/2} = -\frac{2}{3} (4-x^2)^{3/2} \\ &= -\frac{2}{3} [0 - 8] = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

$\int_0 (4\sqrt{4-x^2}) dx$ gunakan substitusi $x = 2 \sin \theta$, maka $dx = 2 \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{x}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ \int (4\sqrt{4-x^2}) dx &= 4 \int (\sqrt{4-4\sin^2 \theta}) 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int 2 \cos \theta 2 \cos \theta d\theta \\ &= 16 \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= 16 \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 16 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right] \\ &= 16 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{4} \right] \\ &= 8 (\theta + \sin \theta \cos \theta) \\ &= 8 \left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} \right) \\ &= 8 \left[(\arcsin 1 - \arcsin 0) + 0 \right] \\ &= 8 \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = 4\pi\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}2 \int_0 (2x\sqrt{4-x^2}) - 4\sqrt{4-x^2} dx &= 2 \left[\int_0 (2x\sqrt{4-x^2}) dx - \int_0 (4\sqrt{4-x^2}) dx \right] \\ &= 2 \left(\frac{16}{3} - 4\pi \right) \\ &= \frac{32}{3} - 8\pi\end{aligned}$$

$$\text{Jadi Fluks } \oint_C F \cdot n \, dS = \frac{32}{3} - 8\pi$$

b. 

$$\begin{aligned}
 \text{Sirkulasi} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C Mdx + Ndy \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\
 &= \iint_D (-4) dA \\
 &= -4 \iint_D dA \\
 &= -16\pi
 \end{aligned}$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

Latihan 4

1. Tentukan $\int_C y dx + x^2 dy$, jika C segmen-segmen garis dari titik $(0,-1)$ ke $(4,-1)$ dan dilanjutkan ke $(4,3)$.
2. Tentukan $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$, jika $\mathbf{F}(x,y) = y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j}$ dan C lengkungan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
3. Tentukan $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$, jika $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y) \mathbf{i} + (2y+x-2z^2) \mathbf{j} - 4yz \mathbf{k}$ dan C segmen garis dari titik $(1,2,1)$ ke $(2,1,0)$.
4. Jika $\mathbf{F}(x,y) = (12x^2 + 3y^2 + 5y) \mathbf{i} + (6xy + 4y^3) \mathbf{j}$ adalah medan vektor. Tentukan:
 - a. Apakah $\mathbf{F}$ konservatif
 - b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $\mathbf{F}(x) = \nabla f(x)$
 - c. Hitung $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ dari titik $A = (3,-2)$ ke titik $B = (-1,4)$
5. Jika $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2 \mathbf{i} + 6y^2 \mathbf{j} + 9z^2 \mathbf{k}$ adalah medan vektor. Tentukan:
 - a. Apakah $\mathbf{F}$ konservatif
 - b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $\mathbf{F}(x) = \nabla f(x)$
 - c. Hitung $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ dari titik $A = (2,1,1)$ ke titik $B = (0,4,-2)$

6. Hitunglah $\int_C (6x y^3 + 2z^2) dx + 9x^2 y^2 dy + (4xz + 1) dz$, dimana C lengkungan licin dari titik $(0,2,1)$ ke $(-1,1,2)$.
7. Diberikan $F(x,y,z) = (yz^2 + y^2 + 2x) i + (xz^2 + 2xy) j + 2xyz k$ adalah medan vektor.
 - a. Tunjukkan bahwa $\int_C F.dX$ tak tergantung dari lintasan C dari titik A ke titik B .
 - b. Tentukan $\int_C F.dX$ jika lengkungan licin dari titik $A = (1,0,1)$ ke titik $B = (2,1,2)$.
8. Jika $F = (x+y) i - 2 y^2 j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$, $y = x$ dan sumbu y di kuadran I . Hitunglah:
 - a. Fluks F melalui C
 - b. Sirkulasi F sepanjang C
9. Jika $F = 2xy i + 3x y^2 j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $(x-2)^2 + y^2 = 4$, $y = x$ di kuadran I . Hitunglah:
 - a. Fluks F melalui C
 - b. Sirkulasi F sepanjang C
10. Hitunglah $\oint_C (e^{3x} + 2y)dx + (x^2 + \sin y) dy$, dimana C empat persegi panjang dengan titik-titik $(2,1)$, $(6,1)$, $(6,4)$ dan $(2,4)$ dengan menggunakan :
 - a. Cara langsung
 - b. Teorema Green
11. Hitunglah $\int_C \frac{-y^2}{x^2+y^2} dx + \frac{x^2}{x^2+y^2} dy$ jika C bagian atas lingkaran satuan yang dimulai dari titik $(1,0)$ dan sampai dengan $(-1,0)$.
12. Tentukan pusat massa dari kawat yang berbentuk setengah lingkaran atas $x^2 + y^2 = a^2$.

13. Periksa apakah $\int_C (y^2 + 2xy) dx + (x^2 + 2xy) dy$ tak tergantung lintasan dari C , dimana C lengkungan licin dari titik $(-1,2)$ ke $(2,1)$.
14. Periksa apakah $\int_C (e^x \sin y) dx + (e^x \cos y) dy$ tak tergantung lintasan dari C , dimana C lengkungan licin dari titik $(0,0)$ ke $(1, \frac{\pi}{2})$.

BAB 5

INTEGRAL PERMUKAAN

Capaian Pembelajaran

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

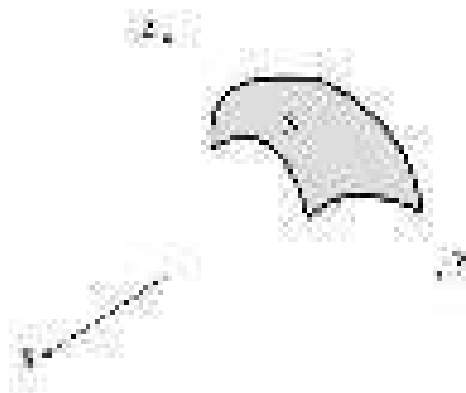
1. Memahami konsep integral permukaan
2. Memahami penerapan aplikasi integral permukaan untuk menentukan fluks dan sirkulasi

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral permukaan terhadap benda pada ruang R^3 dan penerapannya menentukan fluks dan sirkulasi .

5.1 Pengertian Integral Permukaan

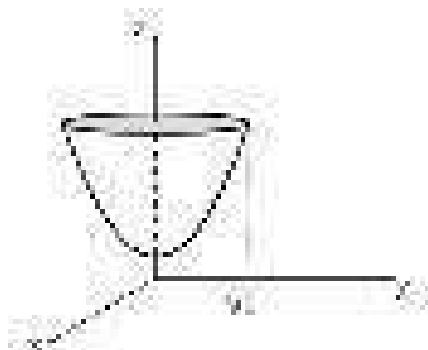
Misalkan S suatu permukaan terbatas luasnya di ruang. Misalkan $g(x, y, z)$ adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada S , maka yang dimaksud dengan integral permukaan dari fungsi g atas S adalah $\iint_S g(x, y, z) dS$. Dimana dS adalah elemen differensial luas permukaan. (Goodwillie, 1991)



Gambar 5.1 Ilustrasi Integral Permukaan

CONTOH 5.1

Jika S permukaan paraboloida $z = 2 + x^2 + y^2$ yang terletak di bawah $z = 4$. Misalkan fungsi yang bekerja pada S adalah $g(x, y, z) = 2xy^2z$. Maka integral permukaan $g(x, y, z) = 2xy^2z$ atas S adalah $\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_S 2xy^2z dS$



Gambar 5.2 Permukaan $z = 2 + x^2 + y^2$ di bawah $z = 4$.

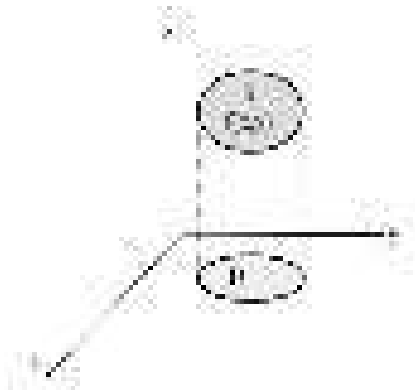
5.2 Tafsiran Integral Permukaan

Misalkan D suatu daerah tertutup di bidang XY dan S adalah bagian dari permukaan

$z = f(x, y)$ dimana (x, y) berada dalam D pada bidang XY maka D adalah proyeksi S pada bidang XY . Jika $f(x, y)$ mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $g(x, y, z) = g(x, y, f(x, y))$ juga kontinu pada D , maka (KREYSZIG, KREYSZIG, & NORMINTON, 201

dimana $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

dS adalah elemen diferensial luas permukaan

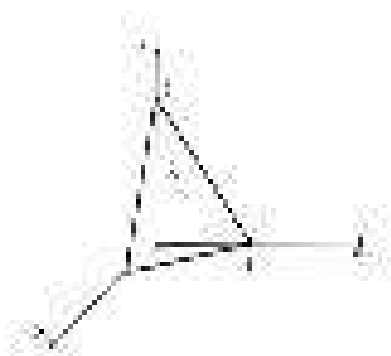


Gambar 5.3 Tafsiran Integral Permukaan

CONTOH 5.2

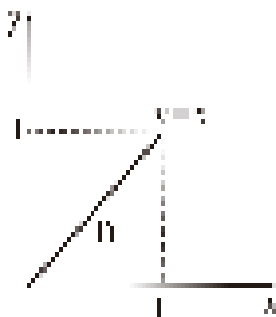
Hitung $\iint_S (xy + z) dS$ jika S permukaan $2x + y + z = 3$ yang proyeksinya pada bidang XY adalah segitiga dengan titik-titik $(0,0)$, $(1,0)$, dan $(1,1)$.

Penyelesaian:



Gambar 5.4 Permukaan S dibatasi $2x + y + z = 3$ dan bidang XY

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.5 Proyeksi D dibatasi $(0,0)$, $(1,0)$ dan $(1,1)$

D adalah proyeksi dari S yang dibentuk oleh titik-titik $(0,0)$, $(1,0)$ dan $(1,1)$ sehingga diperoleh persamaan-persamaan $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

$$z = f(x, y) = 3 - 2x - y$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

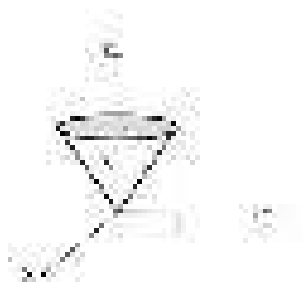
Jadi

$$\begin{aligned} \iint_S (xy + z) dS &= \iint_D (xy + 3 - 2x - y) \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D (xy + 3 - 2x - y) \sqrt{6} dA \\ &= \sqrt{6} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x (xy + 3 - 2x - y) dy dx \\ &= \sqrt{6} \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{2} xy^2 + 3y - 2xy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^x dx \\ &= \sqrt{6} \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{2} x^3 + 3x - 2x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= \sqrt{6} \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{2} x^3 + 3x - \frac{5}{2} x^2 \right) dx \\ &= \sqrt{6} \left[\frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{5}{6} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{19}{24} \sqrt{6} \end{aligned}$$

CONTOH 5.3

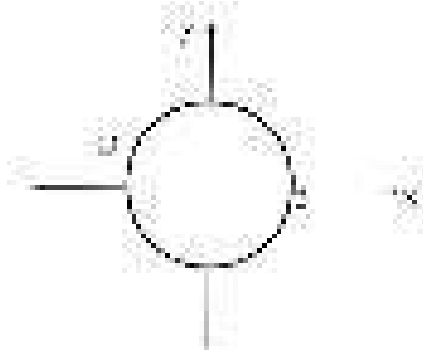
Hitung $\iint_S (xyz) dS$ jika S permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak antara $z = 0$ dan $z = 2$.

Penyelesaian:



Gambar 5.6 Permukaan S dibatasi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$ dan $z = 2$

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.7 D proyeksi S dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

Jadi

$$\begin{aligned} \iint_S (xyz) dS &= \iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2} \right) \sqrt{2} dA \\ &= \sqrt{2} \iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2} \right) dA \end{aligned}$$

dengan menggunakan integral lipat dua koordinat Polar

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (r \cos \theta) (r \sin \theta) r \cdot r \, dr \, d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (r^4 \cos \theta \sin \theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{5} r^5 \right)_{r=0}^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\
 &= \frac{32}{5} \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\cos \theta \sin \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{32}{5} \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\sin \theta) \, d(\sin \theta) \\
 &= \frac{16}{5} \sqrt{2} [\sin^2 \theta]_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

5.3 Aplikasi Integral Permukaan

a. Luas Permukaan

Jika $g(x, y, z) = 1$, maka

$$\text{Luas Permukaan} = S = \iint_S dS.$$

b. Massa = m

Jika rapat massa di setiap titik (x, y, z) pada S adalah $\rho(x, y, z)$ maka Massa = $m = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS$.

c. Momen massa

- terhadap bidang yz , $M_{yz} = \iint_S x \rho(x, y, z) \, dS$.

- terhadap bidang xz , $M_{xz} = \iint_S y \rho(x, y, z) \, dS$

- terhadap bidang xy , $M_{xy} = \iint_S z \rho(x, y, z) \, dS$

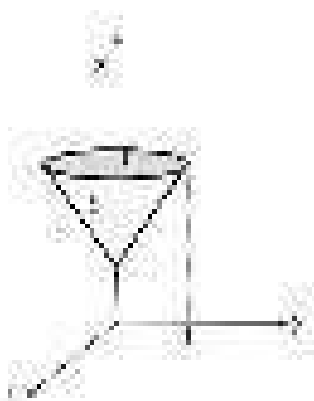
d. Titik Pusat Massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

CONTOH 5.4

Hitunglah luas permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di bawah $z = 6$

Penyelesaian:



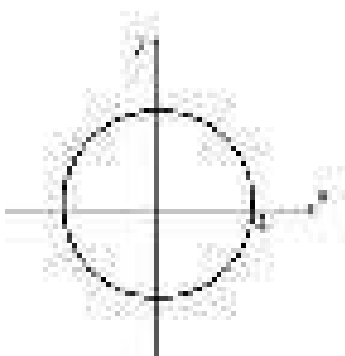
Gambar 5.8 S bagian dari permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 6$

Perpotongan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 6$

diperoleh $2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$

maka $r = 4$.

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.9 D adalah proyeksi S dibatasi $x^2 + y^2 = 16$

$$z = f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

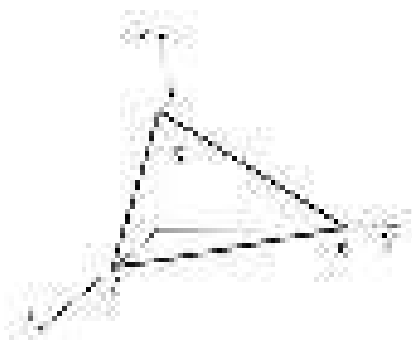
$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan} = S &= \iint_S dS = \iint_D \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \sqrt{2} dA \\ &= \sqrt{2} \iint_D dA \\ &= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^4 r dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^4 d\theta \\ &= 8\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \\ &= 8\sqrt{2} \theta \Big|_{\theta=0}^{2\pi} \\ &= 16\sqrt{2} \pi \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

CONTOH 5.5

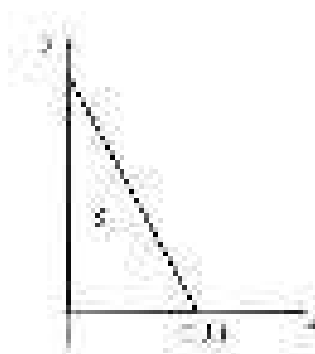
Hitunglah luas permukaan jika S dibatasi oleh $3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 5.10 S bagian permukaan $3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.11 D adalah proyeksi S yang dibatasi titik (2,0) dan (0,6)

Persamaan garis yang melalui titik (2,0) dan (0,6) adalah

$$y = -3x + 6$$

Dari permukaan $3x + y + 2z = 6$, maka $z = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x$

Jadi
$$z = f(x, y) = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x$$

Maka
$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3}{2}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

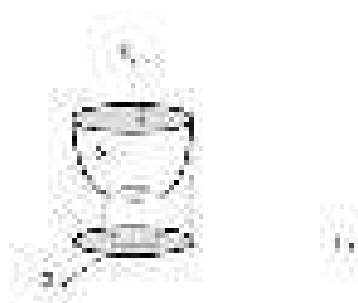
$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan} = S &= \iint_S dS = \iint_D \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{14}{4}} dA \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \iint_D dA \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{y=-3x+6} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \int_{x=0}^2 y \Big|_{y=0}^{-3x+6} dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \int_{x=0}^2 (-3x + 6) dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \left(-\frac{3}{2} x^2 + 6x \right) \Big|_{x=0}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \left(-\frac{3}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \right) \\ &= 3\sqrt{14} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

CONTOH 5.6

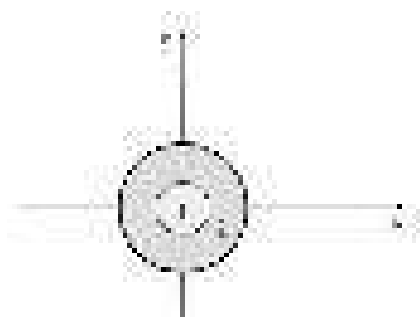
Jika S bagian dari permukaan $z = x^2 + y^2$, yang terletak di antara bidang $z = 1$ dan $z = 4$. Tentukan titik pusat massa S jika rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = kz$, k konstanta.

Penyelesaian:



Gambar 5.12 S bagian permukaan $z = x^2 + y^2$ antara $z = 1$ dan $z = 4$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.13 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$\begin{aligned} \text{- Massa} = m &= \iint_S \rho dS = \iint_S kz dS \\ &= \iint_S k(x^2 + y^2) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA \\
&= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\
&= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \\
&= k \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\
&= k \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{r=1}^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \right) \\
&= 2\pi k \left(\int_{r=1}^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \right)
\end{aligned}$$

$\int_{r=1}^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2 + 1$

$$\begin{aligned}
du = 8r dr \quad \text{maka} \quad \frac{1}{8} du &= r dr \\
r^2 &= \frac{1}{4}(u - 1)
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\int r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr &= \int \frac{1}{4}(u - 1) \sqrt{u} \frac{1}{8} du \\
&= \frac{1}{32} \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du \\
&= \frac{1}{32} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C \\
&= \frac{1}{32} \left(\frac{2}{5} [4r^2 + 1]^{5/2} - \frac{2}{3} [4r^2 + 1]^{3/2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{80} [4r^2 + 1]^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{48} [4r^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2$$

$$= 12.963$$

Jadi massa $= 2\pi k \left(\int_{r=1}^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \right)$

$$= 2\pi k (12.963) = 25.926\pi k$$

- Karena S simetri terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$

Sehingga titik pusat massa $\left(0, 0, \bar{z} \right) = \left(0, 0, \frac{M_{xy}}{m} \right)$

Momen massa terhadap bidang XY :

$$M_{xy} = \iint_S \rho z dS = \iint_S k z \cdot z dS = \iint_S k z^2 dS$$

$$= \iint_S k (x^2 + y^2)^2 dS$$

$$= k \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA$$

$$= k \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$$

$$= k \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA$$

$$= k \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta$$

$$= k \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{r=1}^2 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \right)$$

$$= 2\pi k \left(\int_{r=1}^2 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \right)$$

$\int_{r=1}^2 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2 + 1$

$$du = 8r dr \quad \text{maka} \quad \frac{1}{8} du = r dr$$

$$r^4 = \left(\frac{1}{4}(u-1)\right)^2 = \frac{1}{16}(u^2 - 2u + 1)$$

Maka

$$\begin{aligned} \int r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr &= \int \frac{1}{16}(u^2 - 2u + 1) \sqrt{u} \frac{1}{8} du \\ &= \frac{1}{128} \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{2}{7} [4r^2 + 1]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} [4r^2 + 1]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} [4r^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad \int_{r=1}^2 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{2}{7} [4r^2 + 1]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} [4r^2 + 1]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} [4r^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{448} [4r^2 + 1]^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{160} [4r^2 + 1]^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{192} [4r^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \\ &= 37.801 \end{aligned}$$

maka

$$M_{xy} = 2\pi k \left(\int_{r=1}^2 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \right) = 2\pi k (37.801) = 75.602\pi k$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{75.602\pi k}{25.926\pi k} = 2.916$$

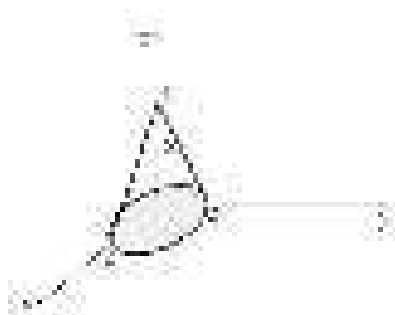
Jadi titik pusat massa $(0, 0, \bar{z}) = (0, 0, 2.916)$

CONTOH 5.7

Jika S bagian dari permukaan $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 0$.

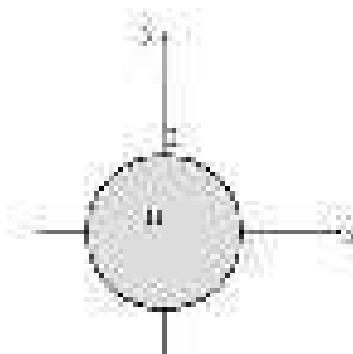
Tentukan momen massa terhadap bidang XY dan bidang XZ jika rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2}$.

Penyelesaian:



Gambar 5.14 S bagian permukaan $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 0$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.15 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{Maka } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} dA$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 1} dA = \sqrt{2} dA$$

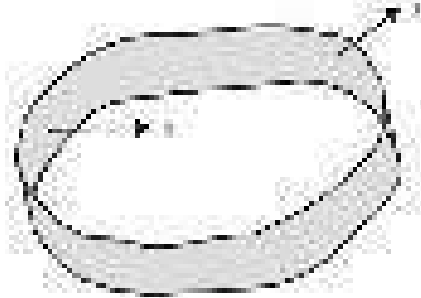
- Momen massa terhadap bidang XY :

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_S \rho z dS = \iint_S 3\sqrt{x^2 + y^2} \cdot z dS \\ &= \iint_S 3\sqrt{x^2 + y^2} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dS \\ &= 3 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2} dA \\ &= 3\sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dA \\ &= 3\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 r (2 - r) r dr d\theta \\ &= 3\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (2r^2 - r^3) dr d\theta \\ &= 3\sqrt{2} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{r=0}^2 (2r^2 - r^3) dr \right) \\ &= 6\sqrt{2}\pi \left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 \right)_0^2 \\ &= 8\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

- Momen massa terhadap bidang XZ :

$$\begin{aligned}
 M_{xz} &= \iint_S \rho y \, dS = \iint_S 3\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y \, dS \\
 &= \iint_S 3\sqrt{x^2 + y^2} \, y \, dS \\
 &= 3 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, y \, \sqrt{2} \, dA \\
 &= 3\sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, y \, dA \\
 &= 3\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 r (r \sin\theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= 3\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (r^3 \sin\theta) \, dr \, d\theta \\
 &= 3\sqrt{2} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_{r=0}^2 (r^3) \, dr \right) \\
 &= 3\sqrt{2}\pi (-\cos\theta)_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \right)_0^2 \\
 &= -\frac{3}{4} \sqrt{2}\pi (\cos\theta)_0^{2\pi} (r^4)_0^2 \\
 &= -12\sqrt{2}\pi (\cos 2\pi - \cos 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

5.4 Fluks Medan Vektor yang Melalui Permukaan S



Gambar 5.16 Permukaan bersisi satu pita Mobius

Pada permukaan yang bersisi dua seperti pita, dan andaikan terdapat fluida yang dapat mengalir melalui permukaan tersebut dari satu sisi ke sisi yang lain. Andaikan juga permukaan tersebut licin yang berarti mempunyai normal satuan n arah ke atas yang berubah-ubah secara kontinu. Jika S adalah permukaan yang bersisi dua seperti definisi di atas dan diasumsikan S dicelupkan ke dalam fluida dengan medan kecepatan kontinu $F(x, y, z)$, maka :

(Lapidus, 1968) scientists, and engineers should find the book to be an excellent introductory text for coursework or self-study as well as worth its shelf space for reference." —MAA Reviews

Applied Mathematics, Fourth Edition is a thoroughly updated and revised edition on the applications of modeling and analyzing natural, social, and technological processes. The book covers a wide range of key topics in mathematical methods and modeling and highlights the connections between mathematics and the applied and natural sciences. The Fourth Edition covers both standard and modern topics, including scaling and dimensional analysis; regular and singular perturbation; calculus of variations; Green's functions and integral equations; nonlinear wave propagation; and stability and bifurcation. The book provides extended coverage of mathematical biology, including biochemical kinetics, epidemiology, viral dynamics, and parasitic disease. In addition, the new edition features:

- Expanded coverage on orthogonality, boundary value problems, and distributions, all of which are motivated by solvability and eigenvalue problems in elementary linear algebra
- Additional MATLAB® applications for computer algebra system calculations
- Over 300 exercises and 100 illustrations that demonstrate important concepts
- New examples of dimensional analysis and scaling along with new tables of dimensions and

units for easy reference Review material, theory, and examples of ordinary differential equations New material on applications to quantum mechanics, chemical kinetics, and modeling diseases and viruses Written at an accessible level for readers in a wide range of scientific fields, Applied Mathematics, Fourth Edition is an ideal text for introducing modern and advanced techniques of applied mathematics to upper-undergraduate and graduate-level students in mathematics, science, and engineering. The book is also a valuable reference for engineers and scientists in government and industry.

,"author": [{"dropping-particle": "", "family": "Lapidus", "given": "Leon", "non-dropping-particle": "", "parse-names": false, "suffix": ""}], "container-title": "Industrial and Engineering Chemistry", "id": "ITEM-1", "issued": {"date-parts": [{"1968"}]}, "title": "Applied mathematics", "type": "article-journal", "uris": [{"http": "http://www.mendeley.com/documents/?uuid=7ae05548-fb83-4cb1-90f7-deddecce3f18"}]}, "mendeley": {"formattedCitation": "(Lapidus, 1968

Fluks yang menyeberangi S adalah $= \iint_S F \cdot n \, dS$

Note: Fluks dengan cara di atas disebut cara langsung

TEOREMA

Misalkan S adalah permukaan mulus bersisi dua yang dibentuk oleh $z = f(x, y)$, dimana (x, y) ada di dalam D, dan misalkan n melambangkan normal satuan ke arah atas pada S. Jika f mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $F = Mi + Nj + Pk$ adalah medan vektor kontinu, maka fluks F yang menyeberangi S dapat dinyatakan dengan:

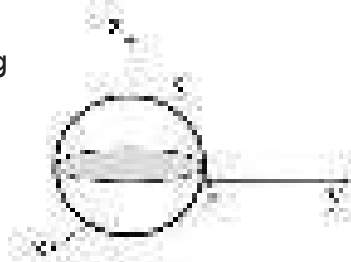
$$\text{Fluks } F = \iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D [-Mf_x - Nf_y + P] \, dA$$

CONTOH 5.8

Hitung fluks arah ke atas dari $F(x, y, z) = -yi + xj + k$ yang menyeberangi bagian dari permukaan bola S yang dibentuk oleh $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ dengan menggunakan:

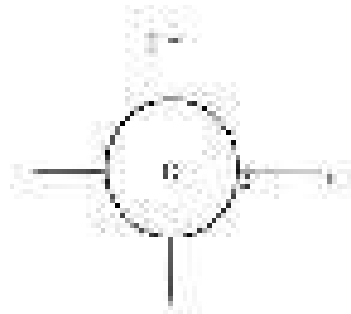
- Cara Langsung
- Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.17 S bagian permukaan

Proyeksi S terhadap bidang XY adalah $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.18 Proyeksi D dibatasi $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

- Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Maka } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{\left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} dA = \frac{3}{z} dA \end{aligned}$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= z - f(x, y) \\ &= z - \sqrt{9-x^2-y^2} \\ &= n = \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \\ &= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{x}{z}\right)i + \left(\frac{y}{z}\right)j + k}{\frac{3}{z}} \\
&= \left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k
\end{aligned}$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
&= \iint_S F \cdot n \, dS \\
&= \iint_S (-yi + xj + k) \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k \right) dS \\
&= \iint_D (-yi + xj + k) \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{z}{3}k \right) \frac{3}{z} dA \\
&= \iint_D dA \quad (\text{Luas lingkaran } D \text{ dengan jari-jari } = r = 2) \\
&= 4\pi \text{ satuan kubik}
\end{aligned}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = -yi + xj + k$ maka $M = -y$,
 $N = x$, $P = 1$

Maka

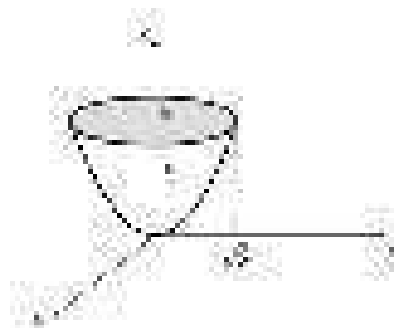
$$\begin{aligned}
\text{Fluks } F &= \iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D [-Mf_x - Nf_y + P] dA \\
&= \iint_D \left[y \left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \right) - x \left(-\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \right) + 1 \right] dA \\
&= \iint_D dA \quad (\text{adalah Luas lingkaran } D \text{ dengan jari-jari } = r = 2) \\
&= 4\pi \text{ satuan kubik}
\end{aligned}$$

CONTOH 5.9

Hitung fluks arah ke atas dari $F(x, y, z) = -2yi + 4k$ yang menyeberangi permukaan S yang dibatasi $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$ dengan menggunakan:

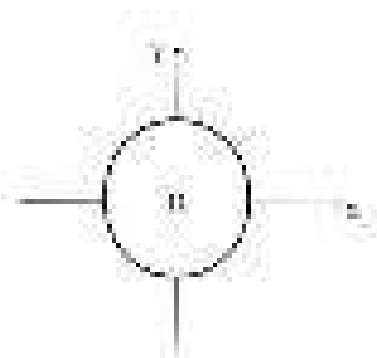
- Cara Langsung
- Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.19 S bagian permukaan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.20 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 6$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{Maka } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \end{aligned}$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= z - f(x, y) \\ &= z - (x^2 + y^2) = z - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \\ &= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\ &= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\ &= (-2xi - 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \end{aligned}$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S F \cdot n \, dS \\
 &= \iint_S (-2yi + 4k) \cdot \left((-2xi - 2y j + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \right) dS \\
 &= \iint_D (-2yi + 4k) \cdot \left((-2xi - 2y j + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \right) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dA \\
 &= \iint_D (4xy + 4) \, dA \\
 &= 4 \iint_D (xy + 1) \, dA \\
 &= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} [(r \cos \theta)(r \sin \theta) + 1] r \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} (r^3 \cos \theta \sin \theta + r) \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3 \, dr + 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r \, dr \\
 &= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta \, d(\sin \theta) \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3 \, dr + 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r \, dr \\
 &= 4 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} + 4(\theta) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} \\
 &= 0 + 4(2\pi) \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \right) \\
 &= 24\pi \text{ satuan kubik}
 \end{aligned}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = -2yi + 4k$ maka $M = -2y$,
 $N = 0$, $P = 4$

Maka

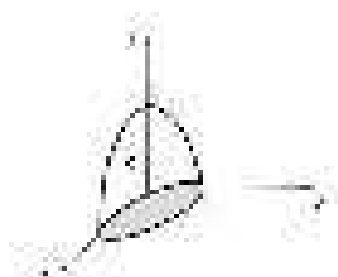
$$\begin{aligned}
\text{Fluks } F &= \iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D [-Mf_x - Nf_y + P] \, dA \\
&= \iint_D [2y(2x) - 0 + 4] \, dA \\
&= \iint_D (4xy + 4) \, dA \\
&= 4 \iint_D (xy + 1) \, dA \\
&= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} [(r \cos \theta)(r \sin \theta) + 1] r \, dr \, d\theta \\
&= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} (r^3 \cos \theta \sin \theta + r) \, dr \, d\theta \\
&= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3 \, dr + 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r \, dr \, d\theta \\
&= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta \, d(\sin \theta) \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r^3 \, dr + 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{6}} r \, dr \\
&= 4 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} + 4(\theta) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} \\
&= 0 + 4(2\pi) \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \right) \\
&= 24\pi \text{ satuan kubik}
\end{aligned}$$

CONTOH 5.10

Hitunglah fluks medan vektor $F = xi + yj + zk$ yang menyebar dari bagian S dari paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ yang terletak di atas bidang xy, dengan n vektor normal ke arah atas. Selesaikan dengan menggunakan:

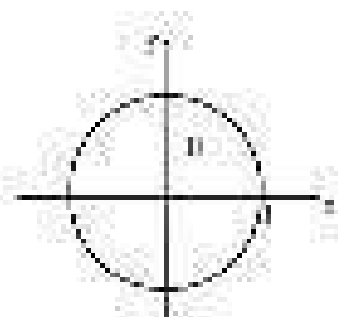
- Cara Langsung
- Teorema

Penyelesaian:



Gambar 5.21 S bagian permukaan $z = 1 - (x^2 + y^2)$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.22 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dA \\
&= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\
&= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA
\end{aligned}$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbb:

$$\begin{aligned}
H(x, y, z) &= z - f(x, y) \\
&= z - [1 - (x^2 + y^2)] \\
&= z - 1 + x^2 + y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \\
&= \frac{(2x)i + (2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\
&= \frac{2xi + 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\
&= (2xi + 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right)
\end{aligned}$$

Maka fluks F yang menyeberangi S dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
&= \iint_S F \cdot n \, dS \\
&= \iint_S (xi + yj + zk) \cdot \left((2xi + 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \right) dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D (xi + yj + zk) \cdot \left((2xi + 2y j + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \right) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \\
 &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + z) dA \\
 &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) dA \\
 &= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r^2 + 1) r dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r^3 + r) dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^1 (r^3 + r) dr \\
 &= (\theta]_0^{2\pi}) \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^1 \\
 &= (2\pi) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \pi \text{ satuan kubik}
 \end{aligned}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = xi + yj + zk$ maka $M = x$,
 $N = y$, $P = z$

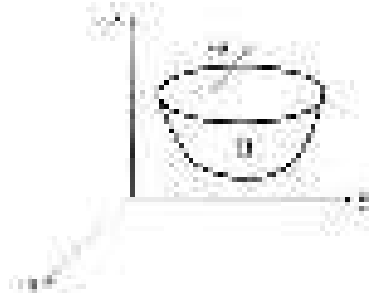
Maka

$$\begin{aligned}
 \text{Fluks F} &= \iint_S F \cdot n dS = \iint_D [-Mf_x - Nf_y + P] dA \\
 &= \iint_D [-x(-2x) - y(-2y) + z] dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + z) dA \\
&= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) dA \\
&= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r^2 + 1) r dr d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r^3 + r) dr d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^1 (r^3 + r) dr \\
&= (\theta)_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^1 \\
&= (2\pi) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \pi \text{ satuan kubik}
\end{aligned}$$

5.5 Teorema Divergensi Gauss

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang ditutupi oleh permukaan yang licin bagian demi bagian. (Wahyuni, 2017)



Gambar 5.23 Bidang B yang ditutupi permukaan ∂B

Teorema Divergensi Gauss

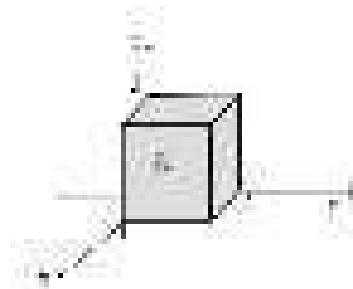
Misalkan $F = Mi + Nj + Pk$ suatu medan vektor dengan M , N dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada B dan ∂B . Jika n vektor normal satuan keluar pada ∂B , maka

$$\iint_{\partial B} F \cdot n \, dS = \Delta_B \operatorname{div} F \, dV = \Delta_B \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dV$$

CONTOH 5.11

Hitung fluks dari medan vektor $F(x, y, z) = x^2 yi + 2xz j + yz^3 k$ melalui permukaan kotak tegak $B = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss

Penyelesaian:



Gambar 5.24 Benda B yang dibatasi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$

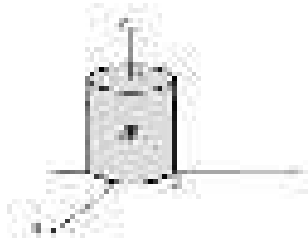
$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} F \cdot n \, dS &= \Delta_B \operatorname{div} F \, dV = \Delta_B \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dV \\ &= \Delta_B [2xy + 0 + 3yz^2] dV \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2xy + 3yz^2) dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (2xyz + yz^3) \Big|_{z=0}^3 dy \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^2 (6xy + 27y) dy dx \\
&= \int_0^1 \left(3xy^2 + \frac{27}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^2 dx \\
&= \int_0^1 (12x + 54) dx \\
&= 6x^2 + 54x \Big|_0^1 = 60
\end{aligned}$$

CONTOH 5.12

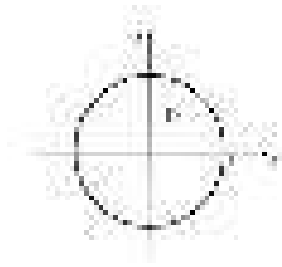
Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$, $z=0$ dan $z=3$. Jika $\mathbf{n}$ adalah vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + \tan yz)\mathbf{i} + (y^3 - e^{xz})\mathbf{j} + (3z + x^3)\mathbf{k}$ maka hitung fluks dari $\mathbf{F}$ melalui ∂B .

Penyelesaian:



Gambar 5.25 Benda B yang dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 4$, $z=0$ dan $z=3$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.26 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + \tan yz) + \frac{\partial}{\partial y} (y^3 - e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial z} (3z + x^3) \\
 &= (3x^2 + 3y^2 + 3) \\
 &= 3(x^2 + y^2 + 1)
 \end{aligned}$$

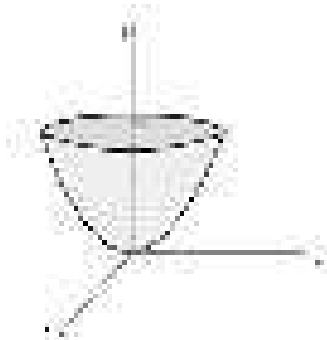
Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial B} F \cdot n \, dS &= \iiint_B \operatorname{div} F \, dV \\
 &= 3 \iiint_B [(x^2 + y^2 + 1)] \, dV \quad (\text{gunakan koordinat silinder}) \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + 1) r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 \int_0^3 (r^3 + r) \, dz \, dr \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 (r^3 + r) z \Big|_0^3 \, dr \\
 &= 18\pi \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^2 \\
 &= 108\pi \text{ satuan kubik}
 \end{aligned}$$

CONTOH 5.13

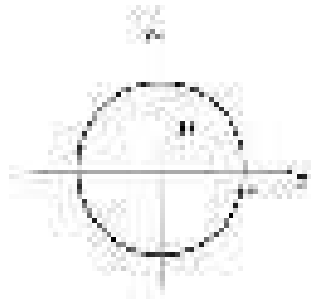
Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$. Jika n adalah vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $F(x, y, z) = (x^3 + 2yz)i + (3y^3 - 3x)j + (9z + 4x^3)k$ maka hitung fluks dari F melalui ∂B .

Penyelesaian:



Gambar 5.27 Benda B yang dibatasi silinder $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$

Proyeksi B terhadap bidang xy diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.28 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3 - 3x) + \frac{\partial}{\partial z}(9z + 4x^3) \\ &= (3x^2 + 6y^2 + 9) \end{aligned}$$

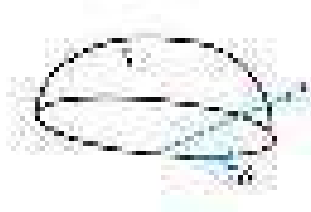
$$= 3 (x^2 + 2y^2 + 3)$$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} F \cdot n \, dS &= \iiint_B \operatorname{div} F \, dV \\ &= 3 \iiint_B [(x^2 + 2y^2 + 3)] dV \quad (\text{gunakan koordinat silinder}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta + 3) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^3 \cos^2 \theta + 2r^3 \sin^2 \theta + 3r) \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r^3 \cos^2 \theta + 2r^3 \sin^2 \theta + 3r) z \Big|_0^3 \, dr \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r^3 \cos^2 \theta + 2r^3 \sin^2 \theta + 3r) \, dr \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^4 \sin^2 \theta + \frac{3}{2} r^2 \right) \Big|_0^2 d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta + 6) \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(4 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] + 8 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] + 6 \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left([2 + 2 \cos 2\theta] + [4 - 4 \cos 2\theta] + 6 \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} (12 - 2 \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= 9 (12\theta - \sin 2\theta) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 9 (24\pi - 0) \\ &= 216\pi \text{ satuan kubik} \end{aligned}$$

5.6 Teorema Stokes

Misalkan S permukaan dua sisi dengan ∂S (batasnya) merupakan lengkungan sederhana tertutup yang licin bagian demi bagian dan ∂S terorientasi secara konsisten terhadap n (vektor normal satuan arah keluar pada permukaan S), yaitu jika kita berdiri dekat tepi permukaan dengan kepala searah dengan vector n dan jika kita memandang ke arah lengkungan maka permukaan terletak di sebelah kiri kita. (Samura & Pengantar, n.d.)



Gambar 5.29 Permukaan S dengan vektor normal n

Teorema Stokes

Misalkan S , ∂S dan n seperti disebutkan di atas. Misalkan $F = Mi + Nj + Pk$ medan vektor dengan M , N , dan P mempunyai turunan–turunan parsial pertama yang kontinu pada S dan ∂S . Bila T adalah vector satuan singgung pada ∂S , maka

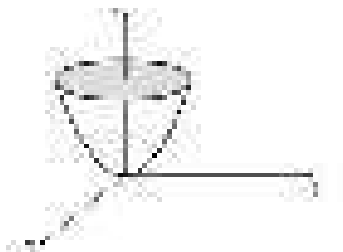
$$\oint_C F \cdot T \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot T \, dS = \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS$$

CONTOH 5.14

Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $F(x, y, z) = yi - xj + yzk$ jika S adalah permukaan paraboloida

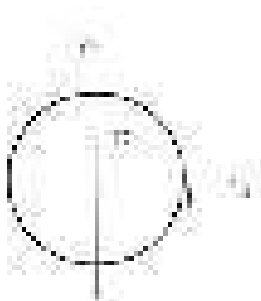
$z = x^2 + y^2$ dengan batas ∂S adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ di bidang $z = 1$.

Penyelesaian:



Gambar 5.30 S bagian permukaan $z = x^2 + y^2$ dan $z = 1$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.31 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$

∂S mempunyai persamaan $x^2 + y^2 = 1$ dan $z = 1$ dan persamaan parameter adalah:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = 1$$

dengan $0 \leq t \leq 2\pi$ dan $dz = 0$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} F \cdot T \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot dX \\
&= \oint_{\partial S} y \, dx - x \, dy \\
&= \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) \, dt - (\cos t)(\cos t) \, dt] \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t) \, dt - (\cos^2 t) \, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} [\sin^2 t + (\cos^2 t)] \, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS$$

$$\begin{aligned}
\text{Curl } F &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix} \\
&= zi - 2k \\
&= z = f(x, y) = x^2 + y^2
\end{aligned}$$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$\begin{aligned}
H(x, y, z) &= z - f(x, y) \\
&= z - x^2 - y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA \\
 &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA \\
 &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\
 &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \\
 &= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\
 &= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\
 &= (-2xi - 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right)
 \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n dS &= \iint_S (zi - 2k) \left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) dS \\
 &= \iint_D (zi - 2k) \left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \\
 &= \iint_D (-2x(x^2 + y^2) - 2) dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \iint_D (x(x^2 + y^2) + 1) dA \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r \cos \theta (r^2) + 1] r dr d\theta \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^4 \cos \theta + r] dr d\theta \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} r^5 \cos \theta + \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^1 d\theta \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \cos \theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\
&= -2 \left(\frac{1}{5} (\sin \theta) + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= -2 \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \right) = -2\pi
\end{aligned}$$

Jadi $\oint_{\partial S} F \cdot T dS = \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n dS$

Maka terbukti kebenaran Teorema Stokes

CONTOH 5.15

Misalkan S bagian dari permukaan bola $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 10$ yang terletak di bawah bidang $z = 1$ dan misalkan $F(x, y, z) = yi - xj + yzk$. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\text{Curl } F) \cdot n dS$, dimana n vektor normal satuan arah keluar.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa ∂S adalah lingkaran $x^2 + y^2 + (1 - 4)^2 = 10$
 $x^2 + y^2 = 1$ (lingkaran yang berjari-jari 1)

(Penyelesaian seperti contoh 5.13)

$$\oint_{\partial S} F \cdot T \, dS = -2\pi$$

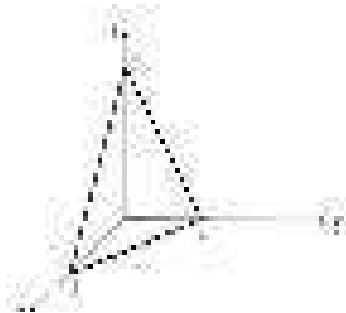
$$\iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS = -2\pi$$

CONTOH 5.16

Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\oint_C F \cdot T \, dS$ di mana $F(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + (8x - 3y)\mathbf{j} + (3x + y)\mathbf{k}$ dan C adalah sisi-sisi segitiga yang melalui titik-titik $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ dan $(0,0,2)$.

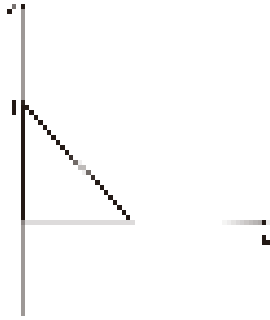
Penyelesaian:

Ambil S permukaan bidang segitiga yang melalui titik-titik $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ dan $(0,0,2)$, maka $C = \partial S$



Gambar 5.32 Permukaan ∂S dibatasi $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ dan $(0,0,2)$

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.33 Proyeksi D segitiga melalui $(0,0)$, $(1,0)$ dan $(1,1)$

Teorema Stokes:

$$\oint_C F \cdot T \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot T \, dS = \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS$$

$$\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 8x - 3y & 3x + y \end{vmatrix}$$

$$= (1-0)i - (3-2)j + (8-0)k$$

$$= i - j + 8k$$

Vektor n adalah vector normal pada segitiga .

Ambil vector $\vec{a}$ = vector yang melalui titik-titik $(1,0,0)$ dan $(0,1,0)$, yaitu $\vec{a} = (0-1)i + (1-0)j + (0-0)k = -i + j$. Ambil vector $\vec{b}$ = vector yang melalui titik-titik $(1,0,0)$ dan $(0,0,2)$, yaitu $\vec{b} = (0-1)i + (0-0)j + (2-0)k = -i + 2k$.

$$\begin{aligned} \text{Maka } \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2i - 2j - k \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} n &= \frac{-\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \quad (\text{tanda negatif menandakan arahnya keluar}) \\ &= \frac{2i + 2j + k}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \\ &= \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \iint_s (\text{Curl } F) \cdot n dS &= \iint_s (i - j + 8k) \cdot \left(\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k \right) dS \\ &= \iint_s \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right) dS \\ &= \frac{8}{3} \iint_s dS \\ &= \frac{8}{3} \quad (\text{Luas segitiga } S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ingat bahwa luas segitiga } S &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sqrt{9} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Jadi

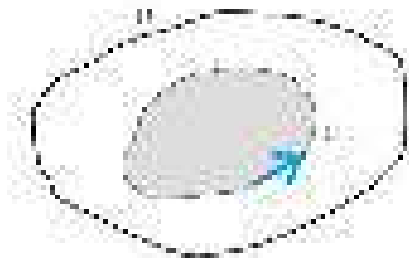
$$\begin{aligned}
 \oint_C F \cdot T \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot T \, dS = \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS \\
 &= \frac{8}{3} \cdot (\text{Luas segitiga}) \\
 &= \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 4
 \end{aligned}$$

S)

CONTOH 5.17

Jika F medan vektor konservatif pada daerah D . Tunjukkan bahwa $\oint_C F \cdot dX = 0$ untuk setiap lengkungan tertutup C dalam D .

Penyelesaian:



Gambar 5.34 Lengkungan tertutup C di dalam D

Ambil S permukaan sebarang yang batasnya $\partial S = C$. Maka menurut Teorema Stokes :

Karena F konservatif maka $\text{Curl } F = 0$, sehingga $\oint_C F \cdot dX =$

$$\oint_C F \cdot T \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot T \, dS = \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS = 0$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuiz pada akhir pertemuan dan tugas presentasi per kelompok yang membahas materi perkuliahan .

LATIHAN 5

1. Hitung $\iint_S g(x, y, z) \, dS$ jika $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ dan S permukaan bidang $z = x + y + 1$ dengan $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$.
2. Hitung $\iint_S g(x, y, z) \, dS$ jika $g(x, y, z) = x + y$ dan S permukaan bidang $z = \sqrt{4 - x^2}$ dengan $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ dan $0 \leq y \leq 1$.
3. Hitunglah fluks F medan vektor $F = yi - xj + 2k$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leq x \leq 5$ dengan menggunakan :
 - a. Cara Langsung
 - b. Teorema
4. Hitunglah fluks F medan vektor $F(x, y, z) = 2i + 5j + 3k$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, yang berada di dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$.
5. Hitunglah fluks dari medan vektor $F(x, y, z) = xi + yj + zk$ yang menyeberangi $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ dengan menggunakan Teorema Gauss.

6. Jika $F(x, y, z) = (9 - x^2)j$ adalah medan vektor dan S bagian dari permukaan dibatasi $2x + 3y + 6z = 6$ di oktan pertama. Hitunglah fluks yang menyeberangi S dengan menggunakan:
- Cara Langsung
 - Teorema
7. Jika S bagian dari permukaan $z = 9 - x^2 - y^2$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah $\rho = 3(x^2 + y^2)$. Tentukanlah:
- Luas Permukaan
 - Massa S
 - Titik pusat massa S
8. Jika S bagian dari permukaan $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah
- $$\rho = \frac{k}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}, \text{ k konstanta}$$
- Tentukanlah:
- Luas Permukaan
 - Massa S
 - Titik pusat massa S
9. Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $F(x, y, z) = 3xi - yj + 4zk$ jika S adalah permukaan paraboloida $z = 4 - (x^2 + y^2)$ dengan batas ∂S adalah lingkaran pada D di bidang $z = 2$.

10. Jika S bagian dari permukaan $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di atas bidang $z = 2$ dan misalkan $F(x, y, z) = 2xi + 3y j + 4k$.
Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung

$$\iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS$$

Integral dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

by Lisa Samura

Submission date: 05-Dec-2021 01:13PM (UTC+0700)

Submission ID: 1720822085

File name: Bk_ajar-Matematika3-compressed.pdf (2.86M)

Word count: 15668

Character count: 65164

Buku ini merupakan salah satu hasil dari Program Pengembangan Sumber Daya Manusia (SDM) dosen dan tenaga kependidikan di perguruan tinggi yang dilaksanakan oleh Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. Buku ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang signifikan terhadap peningkatan kualitas pendidikan matematika di perguruan tinggi.

Buku ini juga diharapkan dapat memberikan manfaat yang signifikan bagi dosen dan tenaga kependidikan di perguruan tinggi yang terlibat dalam proses pembelajaran matematika. Buku ini juga diharapkan dapat memberikan kontribusi yang signifikan terhadap peningkatan kualitas pendidikan matematika di perguruan tinggi.

Buku ini juga diharapkan dapat memberikan manfaat yang signifikan bagi dosen dan tenaga kependidikan di perguruan tinggi yang terlibat dalam proses pembelajaran matematika. Buku ini juga diharapkan dapat memberikan kontribusi yang signifikan terhadap peningkatan kualitas pendidikan matematika di perguruan tinggi.



di

MATEMATIKA Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

Eko, Uta Samudra MT
Drs. Muchlisin Pratiwi LPT
Carano Paryadon, S.Si, M. Sc

MATEMATIKA

Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3



MATEMATIKA

INTEGRAL DALAM RUANG DIMENSI 2 DAN 3

1

Hak Cipta dilindungi oleh Undang-Undang.

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian maupun keseluruhan isi buku ini dalam bentuk apapun, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Judul Buku

Matematika Integral dalam ruang dimensi 2 dan 3

Pemula

Liba Samudra, Mustanisa Maulati, Cahya Roy-
Khan

Diterbitkan oleh : Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta

Cetakan Pertama :

3

Salah Pelanggaran :

Pasal 72 Undang-Undang No. 19 Tahun 2002 tentang Hak Cipta

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan atau denda paling sedikit Rp. 1.000.000,- (satu juta rupiah) atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan atau denda paling banyak Rp. 5.000.000.000,- (lima miliar rupiah);
2. Barang siapa dengan sengaja menyebarkan, memamerkan, mengedarkan atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak terkait sebagaimana dimaksud dalam ayat (1) dipidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan atau denda paling banyak Rp. 500.000.000,- (lima ratus juta rupiah).

Datta [3]

DRA. LISA SAMUDRA MT
DRA. MUSTAMINA MATHANI MT
CAHAYA ROSYIDAN S.Si, MSc

MATEMATIKA

INTEGRAL DALAM RUANG DIMENSI 2 DAN 3



Penerbit Universitas Tri

KATA PENGANTAR

Fuji syukur kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat, rezek dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar Matematika dengan judul "Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3" yang menjadi referensi untuk mata kuliah Matematika 3". Buku ini merupakan lanjutan dari buku Integral Fungsi Satu Variabel dan Penerapannya yang sudah diterbitkan sebelumnya dan dilengkapi dengan contoh-contoh soal dengan penyelesaian yang runtut sehingga lebih mudah dimengerti. Harapan penulis buku ini dapat membantu mahasiswa lebih mudah memahami teori dan aplikasi Matematika 3.

Materi buku ajar ini terdiri dari : Integral Lipat Dua dan aplikasinya, Integral Lipat Tiga dan aplikasinya, Kalkulus Vektor, Integral Gark dan Integral Permukaan. Buku ini ditulis dengan bahasa yang mudah dimengerti dan dipahami oleh mahasiswa dan pembaca pada umumnya. Selain itu, diharapkan juga buku ini dapat menanamkan khazanah keilmuan pada bidang matematika.

Buku ini dapat tersusun dengan baik karena bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Afiat Anugrahadi, MS, Dr. Ir. Muhammad Burhanrudinnur, MSc dan Dr. Ir. M. Ali Jambek, MT. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rosyida Permatasari, Ph.D dan Dr. M. Supriadi, MT

sebagai *reviewer* dan Maman Djumarsara, ST, MT yang telah membantu penulis untuk mengoreksi buku ajar ini.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan buku ajar ini karena penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini masih belum sempurna. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi kita semua.

Jakarta, 15 November 2019

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii
BAB 1 INTEGRAL LIPAT DUA	1
1.1 Konsep Integral Lipat Dua	2
1.1.1 Definisi Integral Lipat Dua	3
1.1.2 Eksistensi Integral Lipat Dua	4
1.1.3 Sifat-sifat Integral Lipat Dua	5
1.1.4 Arti Geometris Integral Lipat Dua	6
1.2 Integral Lipat Dua Koordinat Cartesius	6
1.2.1 Teori integral Lipat Dua Dalam Koordinat Cartesius	8
1.3 Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Kutub (Polar)	14
1.3.1 Beberapa Daerah D yang Bertubungan dengan Koordinat Polar	17
1.4 Aplikasi Integral Lipat Dua	21
Latihan 1	32
BAB 2 INTEGRAL LIPAT TIGA	35
2.1 Gambar-gambar Bidang di Ruang Tiga Dimensi	36
2.1.1 Konsep Integral Lipat Tiga	38
2.1.2 Definisi Integral Lipat Tiga	39
2.1.3 Eksistensi Integral Lipat Tiga	40

2.1.4	Stateifet Integral Lipat Tiga	40
2.2	Integral Lipat Tiga Koordinat Kartesian	41
2.3	Integral Lipat Tiga Dalam Koordinat Silinder/Tabung	47
2.4	Apikas Integral Lipat Tiga.....	53
	Latihan 2	63
BAB 3	KALKULUS VEKTOR.....	65
3.1	Fungsi Bernilai Vektor	65
3.2	Diferensial Vektor	67
3.3	Operasi Fungsi	67
3.4	Gradien, Divergensi dan Curl	69
3.4.1	Operator Diferensial Rector	69
3.4.2	Gradien.....	70
3.4.3	Divergensi $F / \text{Div } F$	70
3.4.4	Curl F	72
	Latihan 3	81
BAB 4	INTEGRAL GARIS	83
4.1	Integral Garis Medan Skalar.....	83
4.2	Definisi Integral Garis	84
4.3	Menghitung.....	84
4.4	Integral Garis Medan Vektor	87
4.5	Apikas Integral Garis.....	92
4.6	Ketaktergantung Lintasan	95
4.7	Teorema Green pada Bidang	102
4.8	Fluks dan Sirkulasi.....	106
4.8.1	Fluks F melalui C	106
4.8.2	Sirkulasi F melalui C	107
	Latihan 4	111

BAB 5 INTEGRAL PERMUKAAN	115
5.1 Pengertian Integral Permukaan	115
5.2 Tafsiran Integral Permukaan	117
5.3 Aplikasi Integral Permukaan	121
5.4 Fluks Medan Vektor yang Melalui Permukaan S	132
5.5 Teorema Divergensi Gauss	145
5.6 Teorema Stokes	151
Latihan 5	160
DAFTAR PUSTAKA	(file tidak ada)
BIOGRAFI PENULIS	(file tidak ada)
Lampiran 1 GLOSARIUM	(file tidak ada)
Lampiran 2 INDEKS	(file tidak ada)

BAB 1

INTEGRAL LIPAT DUA

Capaian Pembelajaran:

Dari ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

1. Memahami konsep integral lipat dua Koordinat Kartesian dan mampu menyelesaikan integrasinya
2. Memahami konsep Integral lipat dua Koordinat Polar dan mampu menyelesaikan integrasinya
3. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi integral lipat dua

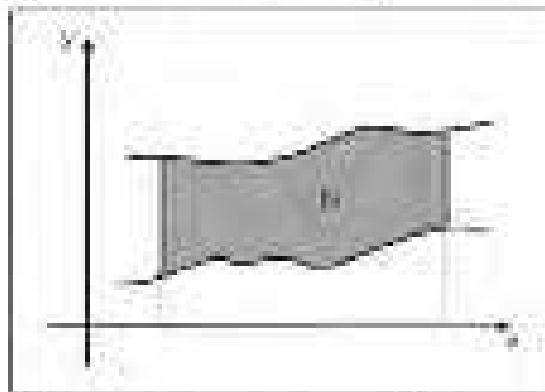
Deskripsi:

Dalam kuriah ini mahasiswa akan mempelajari integral lipat dua di $\mathbb{R}^2$ yang merupakan lanjutan dari integral yang sudah dipelajari pada kalkulus dasar. Integral lipat dua terdiri dari integral lipat dua dalam Koordinat Kartesian dan Koordinat Polar. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat dua untuk menentukan luas daerah, titik pusat massa dan momen inersia pada benda benda dengan rapat massa berbeda. (Lapetus, 1968)

1.1 Konsep Integral Lipat Dua

Jika D suatu daerah di bidang xy dan $f(x,y)$ fungsi yang didefinisikan pada D maka konsep integral lipat dua dari fungsi $f(x,y)$ pada D adalah

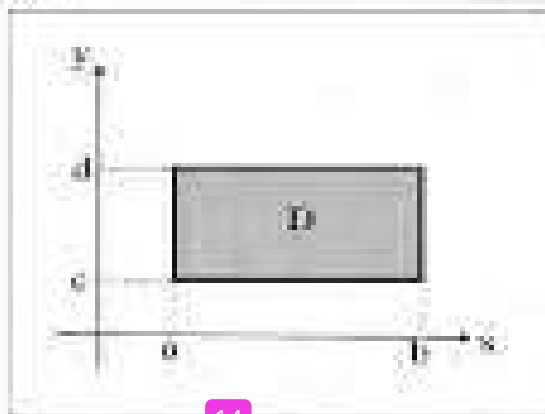
$\iint_D f(x,y) dA$, dimana dA adalah diferensial elemen luas (Kreyszig, Kreyszig, & Norminton, 2011).



Gambar 1.1 Konsep Integral Lipat Dua

CONTOH 1.1

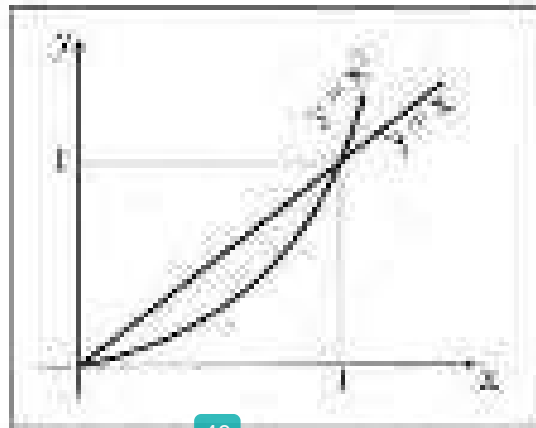
Jika diketahui $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ dan fungsi pada D adalah $f(x,y) = x^2 + xy$. Maka integral lipat dua dari $f(x,y)$ pada D $\iint_D x^2 + xy dA$.



Gambar 1.2 Daerah $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

CONTOH 1.2

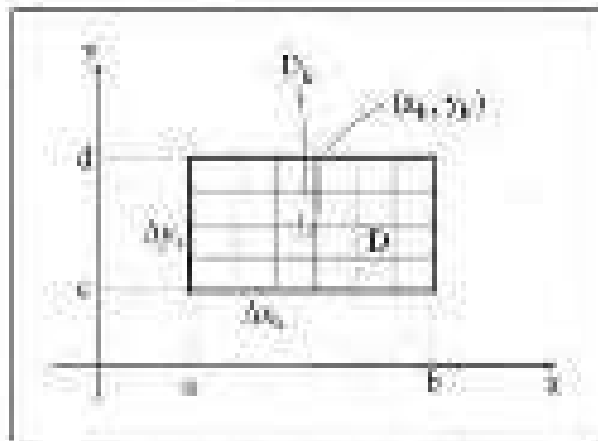
Jika diketahui $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2\}$ dan fungsi pada D adalah $f(x,y) = \sin xy$. Maka integral lipat dua dari $f(x,y)$ pada D $\iint_D \sin xy \, dA$.



Gambar 1.3. Daerah $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2\}$

1.1.1 Definisi Integral Lipat Dua

Misalkan $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ suatu daerah empat persegi panjang di bidang xy , seperti diilustrasikan pada gambar di bawah.



Gambar 1.4 Definisi Integral Lipat Dua (KREYSGIS et al., 2011)

Bagi empat persegi panjang D menjadi n buah persegi panjang kecil D_k . Misalkan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi D_k . Maka luas D_k adalah $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Selanjutnya ambil titik (x_k, y_k) di dalam D_k dan bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Dimana $f(x, y)$ suatu fungsi yang didefinisikan pada D .

Sebut $|P|$ maksimum panjang diagonal D_k , $k = 1, 2, \dots, n$ dan

$|P|$ dikena sebagai norma partisi P .

Definisi Integral Lipat Dua

Jika $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$ ada, kita tuliskan

$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_D f(x, y) dA$. Maka f dikatakan terintegralkan pada D .

1.1.2 Eksistensi Integral Lipat Dua

Bila f didefinisikan dan terbatas pada empat persegi panjang D dan jika f kontinu pada D maka integral lipat dua (Thomas, Weir, & Hass, 2009)

$$\iint_D f(x, y) dA \text{ ada}$$

Harus diperhatikan syarat f kontinu terlalu kuat, sebenarnya f masih bisa diskontinu pada sejumlah berhingga engkungan-engkungan kecil yang mempunyai turunan. Selanjutnya dalam masalah ini hanya fokus pada fungsi f yang

Contoh 1.1

Diketahui $f(x, y) = \sin xy$ dan $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4\}$. Karena f kontinu dalam D maka $\iint_D \sin xy \, dA$ ada.

31

1.1.3 Sifat-sifat Integral Lipat Dua

Misalkan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ adalah fungsi-fungsi pada daerah D dan c adalah konstanta bilangan Real. (Mathematics, n.d.)

Sifat penting yang dipenuhi oleh integral lipat dua

1. $\int_{D_1} c f(x,y) dA = c \int_{D_1} f(x,y) dA$ untuk setiap $c \in \mathbb{R}$
2. $\int_{D_1} [f(x,y) + g(x,y)] dA = \int_{D_1} f(x,y) dA + \int_{D_1} g(x,y) dA$
3. Untuk D_1 dan D_2 yang memenuhi $D = D_1 \cup D_2$ dan $D_1 \cap D_2$ adalah kosong maka, maka $\int_D f(x,y) dA = \int_{D_1} f(x,y) dA + \int_{D_2} f(x,y) dA$
4. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk setiap (x,y) termasuk dalam D , maka $\int_{D_1} f(x,y) dA \leq \int_{D_1} g(x,y) dA$

CONTOH 1.4

$$\iint_D 15(x^2 + 3xy) dA = 15 \iint_D x^2 dA + 15 \iint_D 3xy dA.$$

CONTOH 1.5

39

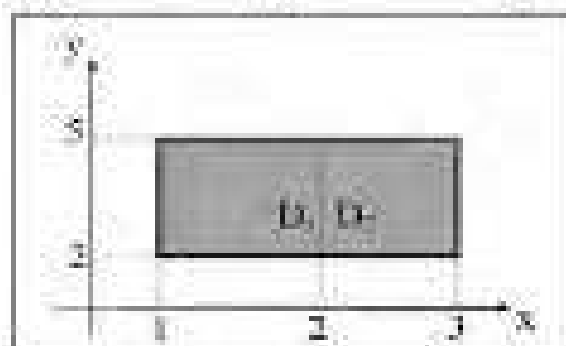
Jika diketahui $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

Misalkan $D_1 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 5\}$

dan $D_2 = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

Maka

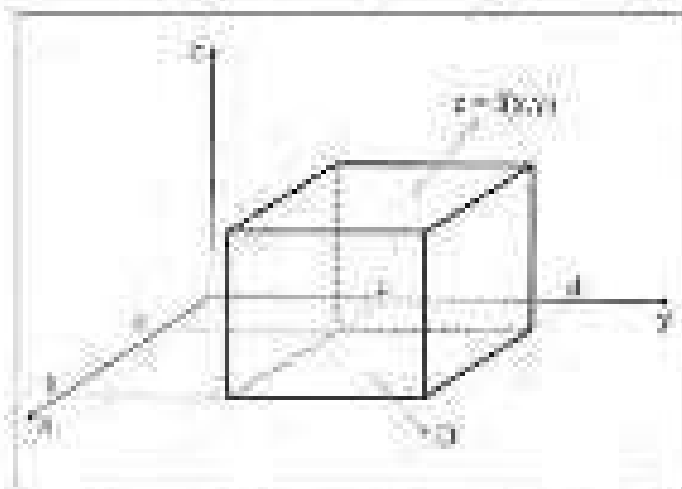
$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$$



Gambar 1.5 Daerah $D = D_1 \cup D_2$

1.1.4 Arti Geometris Integral Lipat Dua

Jika $f(x,y) \geq 0$ dan f didefinisikan pada $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ maka $\iint_D f(x,y) dA$ adalah volume benda padat yang terletak di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas empat persegi panjang D . Empat persegi panjang D berada di atas bidang XY yang juga merupakan proyeksi dari volume benda padat terhadap bidang XY . (Penerapannya,



Gambar 1.5 Arti geometris Integral Lipat Dua

1.2 Integral Lipat Dua Koordinat Cartesian

1.2.1 Tafsiran Integral Lipat Dua dalam Koordinat Cartesian

Ada beberapa tafsiran integral lipat dua dalam Koordinat Cartesian yang dipengaruhi oleh fungsi-fungsi yang membangun D .

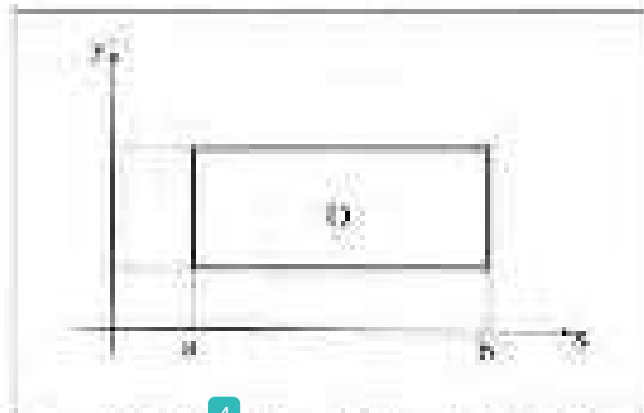
1. Jika D daerah yang dibatasi oleh $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, maka integral lipat dua dapat dinyatakan

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x,y) dy dx$$

Integral ruas kanan disebut juga integral berurutan f terhadap y dahulu kemudian diintegrasikan terhadap x .

Integral lipat dua di atas juga dapat ditulis dalam bentuk integral berulang f terhadap x dahulu kemudian diintegrasikan terhadap y , dan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{y=a}^d \int_{x=a}^b f(x, y) dx dy$$

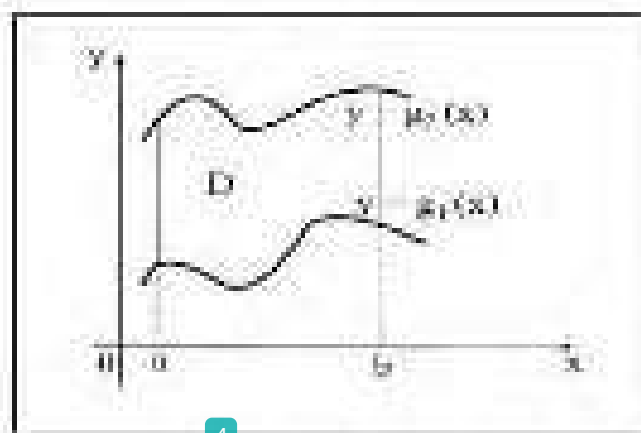


4

Gambar 1.7. Tafsiran I Integral Lipat Dua

2. Jika D daerah yang dibatasi $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$,

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

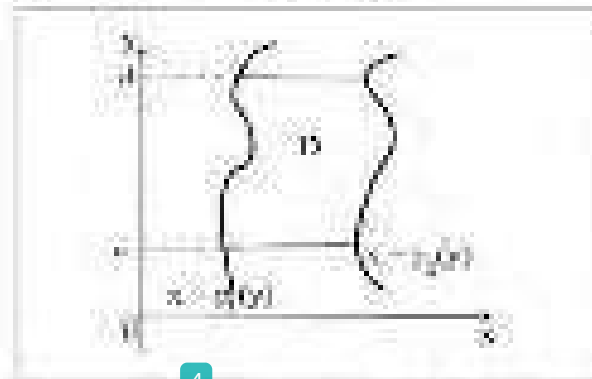


4

Gambar 1.8. Tafsiran II Integral Lipat Dua

3. Jika D daerah yang dibatasi $p(y) \leq x \leq q(y)$, $c \leq y \leq d$,

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y) dx dy$$

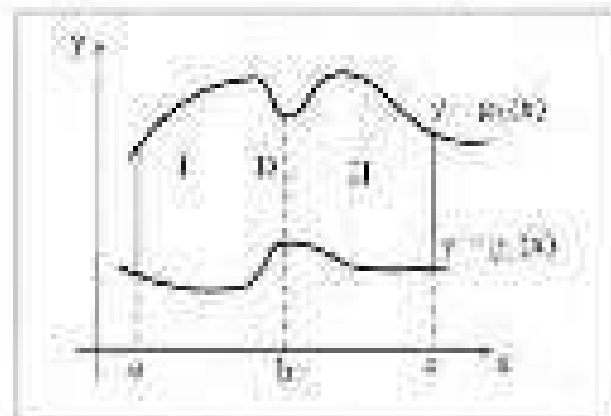


4

Gambar 1.9. Tafsiran III Integral Lipat Dua

4. Jika $D = D_1 \cup D_2$, dimana D_1 dibatasi $a \leq x \leq b$ & $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ dan D_2 dibatasi oleh $b \leq x \leq c$ & $g_3(x) \leq y \leq g_4(x)$. Misalkan $f(x,y)$ fungsi yang beresja pada D maka

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dA &= \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx + \int_b^c \int_{g_3(x)}^{g_4(x)} f(x,y) dy dx \end{aligned}$$



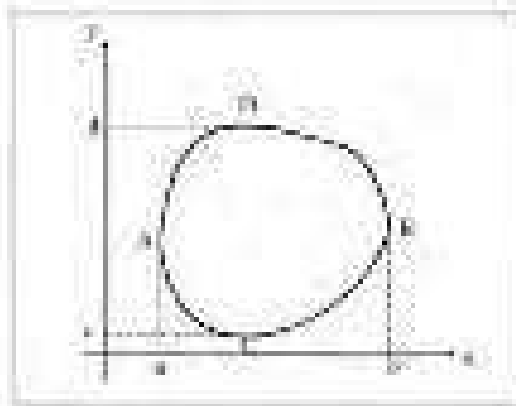
Gambar 1.10. Tafsiran IV Integral Lipat Dua

CONTOH 1.6

41

Tentukan $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \} =$
 $\{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Penyelesaian



Gambar 1.11 Daerah D dibatasi 4 lengkung.

Dari gambar di atas misalkan

$y = g_1(x)$ adalah lengkung ACB

$y = g_2(x)$ adalah lengkung ADB

$x = h_1(y)$ adalah lengkung CAD

$x = h_2(y)$ adalah lengkung CBD

Maka tafsiran $\iint_D f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy dx$

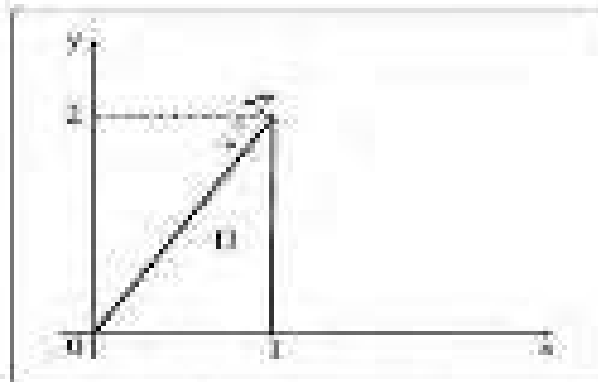
atau

$$= \int_{y=c}^d \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

CONTOH 1.7

Tentukan $\iint_D f(x,y) dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = 2x$, $x = 1$ dan sumbu x .

Penglesaian:



Gambar 1.12 Daerah D dibatasi $y=2x$, $x=1$ dan sumbu x dengan mengganti $y = 2x$ menjadi $x = \frac{1}{2} y$

maka
$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{y=2x} f(x,y) dy dx$$

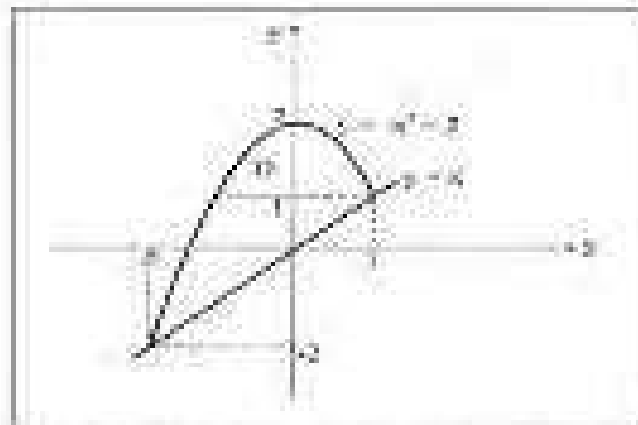
atau

$$= \int_0^2 \int_{x=\frac{1}{2}y}^1 f(x,y) dx dy$$

CONTOH 1.8

Tafsirlah $\iint_D f(x, y) dx dy$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$.

Penyelesaian:



Gambar 1.13 Daerah D yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$.

Persempitan $y = -x^2 + 2$ dan $y = x$

$$\text{diperoleh } x = -x^2 + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\text{maka } x = 1 \text{ dan } x = -2$$

Dari persamaan $y = -x^2 + 2$ maka $y = \pm\sqrt{2-x}$

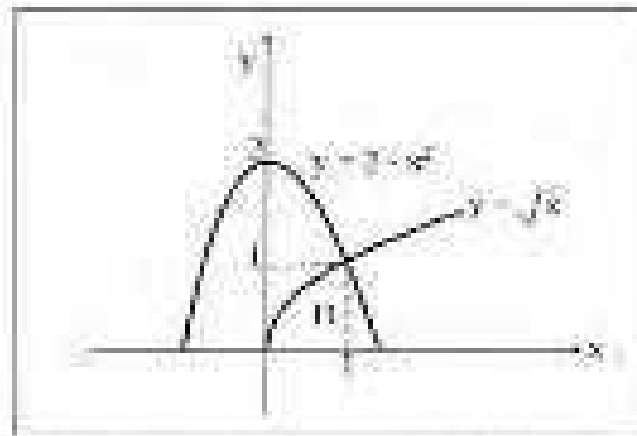
$$\text{atau } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=-2}^1 \int_{y=x}^{-x^2+2} f(x, y) dy dx$$

$$\int_{x=-2}^1 \int_{y=x}^{-x^2+2} f(x, y) dy dx = \int_1^2 \int_{y=-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx dy$$

CONTOH 1.9

Diketahui $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} 2x \, dy \, dx$. Ubahlah batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Penglesaian



Gambar 1.14 Daerah D yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = \sqrt{x}$

$$y \text{ bawah} = y = \sqrt{x} \text{ dan } y \text{ atas} = y = 2 - x^2$$

$$\text{sehingga } \sqrt{x} = -x^2 + 2$$

$$x^4 + 2x^2 - 2 + x = 0$$

$$(x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 2) = 0$$

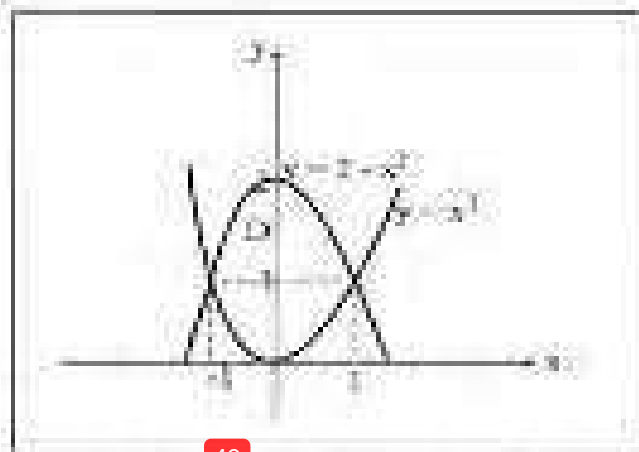
$$\text{sehingga } x = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} 2x \, dy \, dx &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} 2x \, dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} 2x \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (2xy) \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x^2} dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2xy) \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x^2} dx \\ &= \int_0^1 (2x(2-x^2) - 2x\sqrt{x}) \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2x(2-x^2) - 2x\sqrt{x}) \, dx \\ &= \int_0^1 (2x(2-x^2) - 2x^{3/2}) \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2x(2-x^2) - 2x^{3/2}) \, dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{5/2} \right]_0^1 + \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{5/2} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

CONTOH 1.18

Diketahui $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} xy \, dy \, dx$. Tentukan batas integrasi dan selesaikan integralnya.

Pemecahan:



Gambar 1.15 Daerah D yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

Persamaan $y = 2 - x^2$ dan $y = x^2$

diperoleh $x^2 = -x^2 + 2$

$$x^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1 \text{ maka } x = \pm 1$$

Ubah persamaan lengkungan ke fungsi y , dimana

$$y = 2 - x^2 \text{ maka } x = \pm \sqrt{2 - y}$$

$$y = x^2 \text{ maka } x = \pm \sqrt{y}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} xy \, dy \, dx &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} x \, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} dy + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y (2-y) \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} y ((2-y) - (2-y)) \right) dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub (Polar)

Titik-titik di bidang dapat dinyatakan dalam koordinat Polar $P(r, \theta)$, dimana:

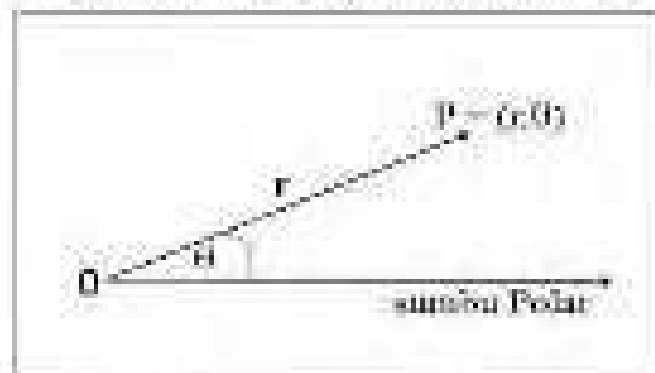
r = jarak titik O dengan P

θ = sudut antara sumbu polar dengan OP

Dengan batasan :

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ atau dengan arah negatif } -\pi < \theta < \pi$$



Gambar 1.16 Koordinat Polar

Kaitan Koordinat Cartesian dan Koordinat Polar dijabarkan sebagai berikut. Dengan mengambil O sebagai titik polar dan sumbu x positif sebagai sumbu polar diperoleh hubungan (Samudra & Pengantar, n.d.)

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

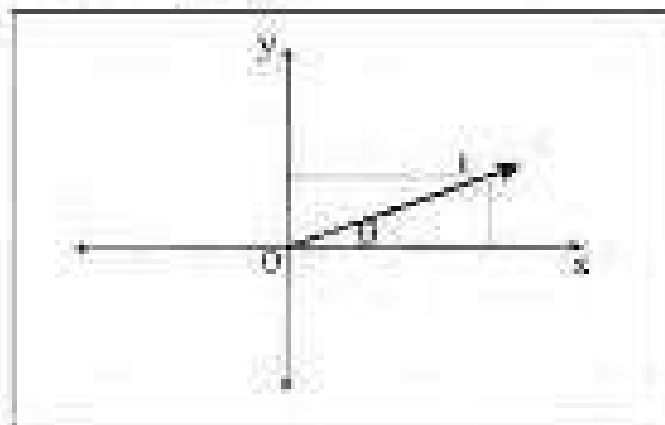
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Determinan Matriks Jacob:

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r \end{aligned}$$

$$\text{Dan } dA = J \, dr \, d\theta = r \, dr \, d\theta$$

$0 < \theta < 2\pi$ (arah θ berlawanan dengan arah jarum jam, $\theta = 0$ adalah sumbu x positif)

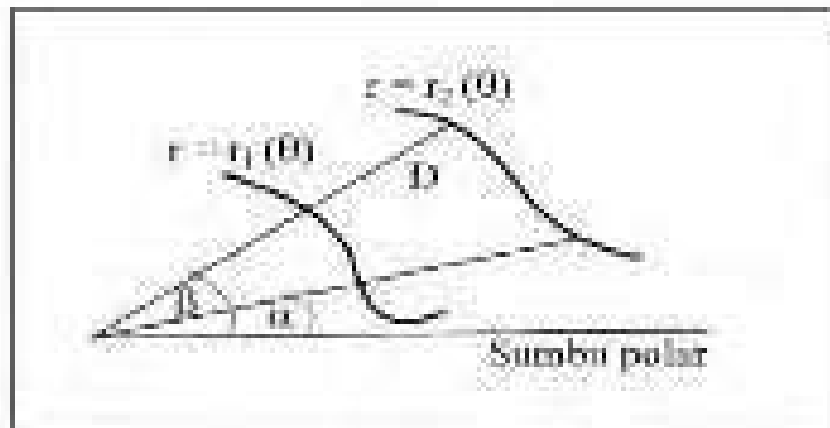


Gambar 1.17. Kaitan Koordinat Cartesian dengan Koordinat Polar

Definisi Integral Lipat Dua Koordinat Polar

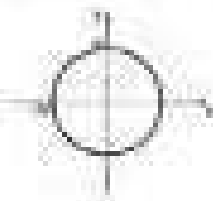
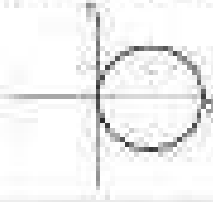
Jika D daerah yang dibatasi oleh $r = r_1(\theta)$ dan $r = r_2(\theta)$ dengan $\theta = \alpha$ sampai $\theta = \beta$, maka integral lipat dua dalam Koordinat Polar adalah

$$\iint_D f(x,y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta) r \, dr \, d\theta$$



Gambar 3.18 Tabiran Integral lipat dua Koordinat Polar (Wahyuni, 2017)

1.3.1 Beberapa Daerah D yang Berhubungan dengan Koordinat Polar

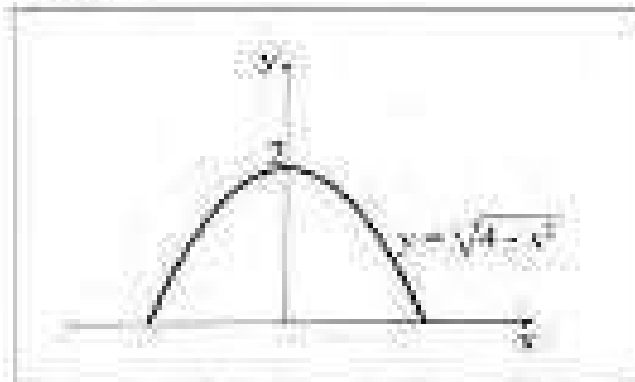
Koordinat Kartesius	Koordinat Polar
Lingkaran: $x^2 + y^2 = a^2$ Pusat $(0,0)$ dan jari-jari $= a$ 	$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2$ $r = a$
Lingkaran: $x^2 + y^2 = 2ax$ $x^2 + y^2 = a^2$ Pusat $(a,0)$ dan jari-jari $= a$ 	$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2a r \cos \theta = a^2$ $r = 2a \cos \theta$
Lingkaran: $x^2 + y^2 = 2ay$ or $x^2 + y^2 = a^2$ Pusat $(0,a)$ dan jari-jari $= a$ 	$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2a r \sin \theta = a^2$ $r = 2a \sin \theta$

Gambar 1.19 Gambar 28 gambar yang berhubungan dengan koordinat Polar

CONTOH 1.11

Hitung $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan $y = 0$.

Penglesaian:



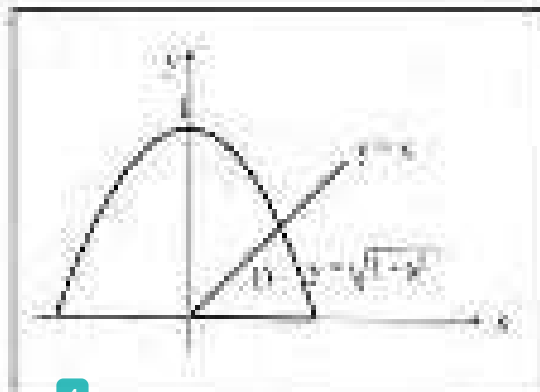
Gambar 1.20 Daerah D yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan $y = 0$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} d\theta \\ &= \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

CONTOH 1.12

Hitung $\iint_D xy \, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$.

Penyelesaian :



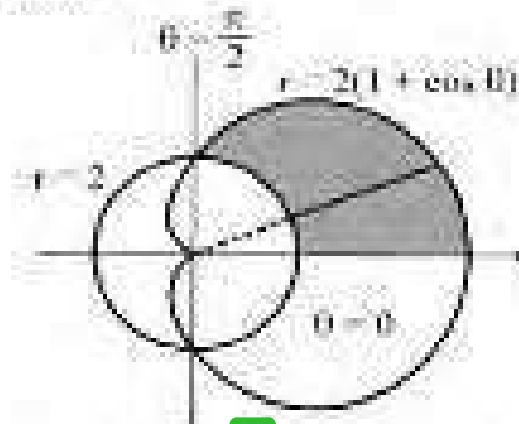
Gambar 1.21 Daerah D yang dibatasi $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dA &= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{1/\cos \theta} (r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= \left(\int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{1/\cos \theta} r^2 \, dr \right) \\
 &= \left(\int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d(\sin \theta) \right) \left(\int_{\cos^2 \theta}^1 r^2 \, dr \right) \\
 &= \left(\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{8} \sqrt{2} \right)^3 = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.13

Hitunglah $\iint_D 3y \, dA$ jika D daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam kardoida $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Penglesaian:



Gambar 1.22 D daerah di luar $r = 2$ dan di dalam $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Karena D adalah himpunan sederhana lingkaran r , sehingga soal di atas dapat ditulis sebagai integral lipat dua dengan koordinat polar dimana r sebagai variabel pengintegrasi setelah dalam dari $r = 2$ sampai $r =$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \iint_D 3y \, dA &= 3 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=2}^{2(1+\cos \theta)} (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^3 \sin \theta \, d\theta \Big|_2^{2(1+\cos \theta)} \\ &= 8 \int_{\theta=0}^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^3 \sin \theta - \sin \theta] \, d\theta \\ &= 8 \left[-\frac{1}{4}(1 + \cos \theta)^4 + \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= 22 \end{aligned}$$

1.4 Aplikasi Integral Lipat Dua

1. Jika D daerah pada bidang XY maka luas D adalah (Mouch, 2002):

$$I = \iint_D dA, f(x,y) = 1$$

2. Titik Pusat Massa

Jika D daerah pada bidang XY dan $\rho(x,y)$ rapat massa disetiap titik pada D , maka :

- Luas $D = A = \iint_D \rho \, dA$
- Momen massa pada sumbu x dan y adalah M_x dan M_y :
 - Momen massa pada sumbu x adalah $M_x = \iint_D y \rho \, dA$
 - Momen massa pada sumbu y adalah $M_y = \iint_D x \rho \, dA$
- Titik pusat massa $= (x, y) = (\frac{M_y}{A}, \frac{M_x}{A})$

Keterangan: momen inersia adalah momen kuadrat terhadap sumbu titik pusat

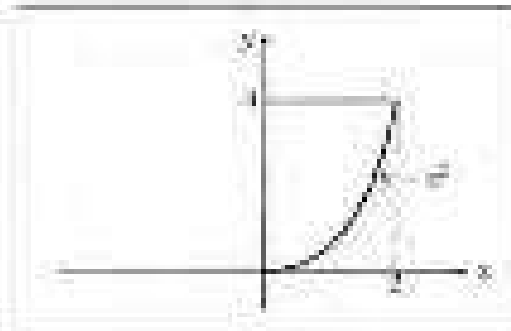
3. Momen Inersia adalah jarak kuadrat dari titik pusat massa ke sumbu

- Momen inersia terhadap sumbu x adalah $I_x = \iint_D y^2 \rho \, dA$
- Momen inersia terhadap sumbu y adalah $I_y = \iint_D x^2 \rho \, dA$
- Momen inersia terhadap sumbu z adalah $I_z = \iint_D (x^2 + y^2) \rho \, dA$
 $= I_x + I_y$

CONTOH 1.14

Hitung luas daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 1.23 Daerah D dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$ di kuadran I.

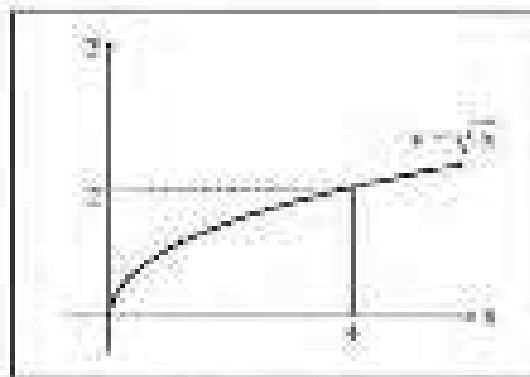
$$\begin{aligned}
 \text{Luas } D &= \iint_D dA &&= \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^4 dy \, dx \\
 &&&= \int_{x=0}^2 \left(y \right)_{y=x^2}^4 dx \\
 &&&= \int_{x=0}^2 (4 - x^2) \, dx \\
 &&&= \left(4x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 \\
 &&&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.35

4. Jika D daerah yang berbentuk lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = xy$, tentukan :

- Massa lamina
- Titik pusat massa
- Momen inersia I_x , I_y dan I_z

Penyelesaian :



Gambar 1.24 Daerah D dibatasi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ dan $x = 4$

$$\begin{aligned}
 \text{2. Massa lamina} = m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \int_{x=0}^4 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_{x=0}^4 x \left(\frac{1}{2} x \right) dx \\
 &= \int_{x=0}^4 \frac{1}{2} x^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{6} x^3 \right] \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } M_y &= \iint_D x \rho(x, y) \, dA \\
 &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x(xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \frac{1}{2} x^3 dx \\
 &= \left[\frac{1}{8} x^4 \right]_{-1}^1 \\
 &= 32.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_D y \rho(x, y) \, dA \\
 &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y(xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy^2 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 x \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \frac{1}{3} x^{5/2} dx \\
 &= \left[\frac{2}{63} x^{7/2} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{238}{11}.
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{32}{\frac{238}{11}} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{238}{22} / \left(\frac{238}{11} \right) = \frac{4}{7}$$

The mass centre $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, \frac{4}{7})$.

E. Moment-momen inertia

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_D y^2 \rho(x,y) \, dA \\
 &= \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^{\sqrt{x}} y^2 (xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^{\sqrt{x}} x y^3 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 x \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_1^{\sqrt{x}} \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 \frac{1}{4} x^2 \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^4 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_D x^2 \rho(x,y) \, dA \\
 &= \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^{\sqrt{x}} x^2 (xy) \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^{\sqrt{x}} x^3 y \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 x^3 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_1^{\sqrt{x}} \, dx \\
 &= \int_{x=0}^4 \frac{1}{2} x^4 \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{10} x^5 \right]_0^4 \\
 &= \frac{512}{5}
 \end{aligned}$$

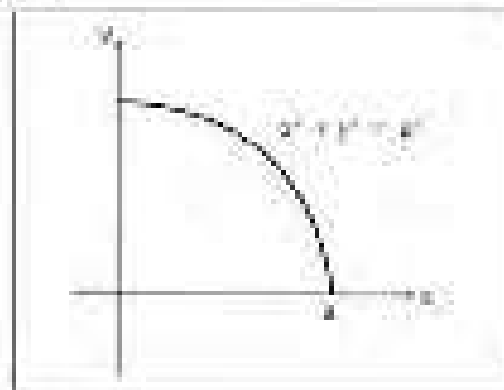
$$\begin{aligned}
 I_Q &= I_x + I_y \\
 &= 16 + \frac{512}{5} = \frac{592}{5}
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.16

Jika D lamina yang berbentuk seperempat lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y)$ sebanding dengan jarak titik (x, y) ke pusat lingkaran. Tentukan :

- Massa lamina
- Titik pusat massa
- Momen Inersia I_x , I_y dan I_{xy}

Penyelesaian:



Gambar 1.25 Daerah D dibatasi $x^2 + y^2 = a^2$ di kuadran I

- Rapat massa $\rho(x, y) = k \sqrt{x^2 + y^2}$, k konstanta

$$\begin{aligned}
 \text{Massa lamina} = m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA \\
 &= \iint_D k \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \quad (\text{gunakan koordinat Polar}) \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r \, r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^a r^2 \, dr \right) \\
 &= \frac{k}{3} \left(r^3 \right)_0^a \\
 &= \frac{2\pi}{3} k a^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_D x \rho(x, y) \, dA \\
 &= \iint_D x k \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^r (r \cos \theta) r \, r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^r r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\
 &= k \left[\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \right] \left[\int_0^r r^3 \, dr \right] \\
 &= k [\sin \theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^r \\
 &= \frac{1}{4} k a^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_D y \rho(x, y) \, dA \\
 &= \iint_D y k \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^r (r \sin \theta) r \, r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^r r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \\
 &= k \left[\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \right] \left[\int_0^r r^3 \, dr \right] \\
 &= k [-\cos \theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^r \\
 &= \frac{1}{4} k a^4.
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{4} k a^4}{\frac{1}{4} k a^4} = \frac{2a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{4} k a^4}{\frac{1}{4} k a^4} = \frac{2a}{3\pi}$$

$$\text{Thus the centroid is } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2a}{3\pi}, \frac{2a}{3\pi} \right).$$

• Moment-moment inertia

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) \, dA \\
 &= \iint_D y^2 k \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{r=0}^a (r \sin \theta)^2 r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{r=0}^a r^4 \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cos 2\theta \right) d\theta \left(\int_{r=0}^a r^4 \, dr \right) \\
 &= k \left[\frac{1}{5} \theta - \frac{1}{10} \sin 2\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{25} k a^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_D x^2 \rho(x, y) \, dA \\
 &= \iint_D x^2 k \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{r=0}^a (r \cos \theta)^2 r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{r=0}^a r^4 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cos 2\theta \right) d\theta \left(\int_{r=0}^a r^4 \, dr \right) \\
 &= k \left[\frac{1}{5} \theta + \frac{1}{10} \sin 2\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{25} k a^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= I_x + I_y \\
 &= \frac{1}{25} k a^5 + \frac{1}{25} k a^5 \\
 &= \frac{1}{13} k a^5
 \end{aligned}$$

CONTOH 1.17

29

Jika D daerah yang dibatasi oleh lingkaran $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

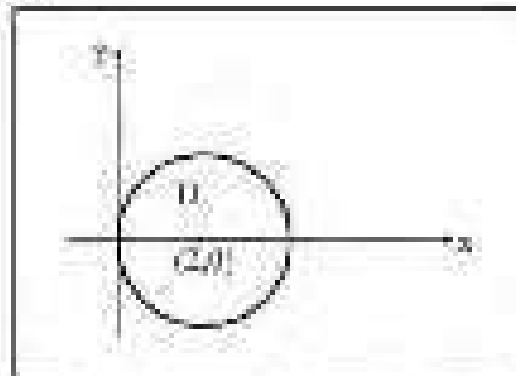
4. Misalkan diketahui rapat massa $\rho(x, y) = k(x)$. Tentukan:

a. $\iint_D \rho(x, y) \, dA$ dimana $\rho(x, y) = 3y$

b. Massa benda

c. Momenta statis

Pemecahan:



Gambar 1.26. Daerah D dibatasi $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

a. $\iint_D \rho(x, y) \, dA$ dimana $\rho(x, y) = 3y$

Sebelum kita dapat melakukan integral terhadap (x, y) dari daerah tersebut (D), maka kita ubah dulu ke (r, θ)

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \iint_D 3y \, dA &= 2 \iint_{D_1} 3y \, dA \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} 3r \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \\ &= 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \sin \theta \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 44 \cos^3 \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= (24) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d(-\cos \theta) \\ &= -(24) \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= -(24) \left(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0 \right) \\ &= -(24)(0 - 1) = 24 \end{aligned}$$

c. Berat massa $\rho(x, y) = kx^2$ k konstanta

$$\begin{aligned} \text{Massa lamina} = m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA \\ &= 2 \iint_{D_1} kx^2 \, dA \quad (\text{gunakan koordinat Polar}) \\ &= 2k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4 \cos \theta} r^2 \cos^2 \theta \, r \, dr \, d\theta \\ &= 2k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4 \cos \theta} r^3 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta \\ &= 2k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{4 \cos \theta} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} k \int_{\theta=0}^{\pi/2} (r^4) \left[\frac{16}{4} \cos^2 \theta \right] \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} k \int_{\theta=0}^{\pi/2} 256 \cos^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 128k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

$$\begin{aligned} &= 128k \left(\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta + \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta \right) \\ &= \frac{256}{2} k \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{256}{2} k \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} 1 \, d\theta + \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{256}{2} k \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} 1 \, d\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} \\ &= \frac{256}{2} k \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} 1 \, d\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} \\ &= 128k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dV \\ &= 2 \iint_{D_2} (x^2 + y^2) \, dV + 4D \\ &= 2k \iint_{D_1} (x^2 + y^2) \cdot x^2 \, dV \\ &= 2k \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \phi \cdot r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 2k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos^3 \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} d\theta \, d\theta \\ &= 2k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} r^3 \cos^3 \phi \right)_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{\phi=0} d\theta \\ &= \frac{1}{3} k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos^3 \phi \right]_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{\phi=0} d\theta \\ &= \frac{1}{3} k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{3} R^3 \cos^3 \phi \right)_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{\phi=0} d\theta \\ &= \frac{1}{9} k R^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^3 \phi \, d\theta \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} k \left[\frac{1}{2} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^5 \theta \, d\theta \right] \end{aligned}$$

(continued)

$$\int_{\Omega} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, dV = \frac{7}{8} \pi R^3 + \frac{1}{6} \pi R^3 \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 - \frac{1}{6} \pi R^3 \int_{\Omega} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, dV = 0.$$

1000

$$\int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \int \sec u \, du + C$$

$$\int \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{3}{8} \int \cos^2 \theta \, d\theta + C$$

$$\int \sec^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \tan \theta \sec^3 \theta - \frac{2}{3} \int \sec^2 \theta \, d\theta + C$$

$$\int \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \int d\theta + C = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \theta + C$$

100

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \frac{1}{8} \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{3}{2} \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{13}{2} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{11}{2} \theta$$

2000

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 2 dan pada pertemuan ke 3 diadakan Quiz di awal perkuliahan.

LATIHAN 1

- Hitung integral berikut:
 - $\int_0^2 \int_0^2 (x^2 + y) \, dx \, dy$
 - $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$
- Tentukan $\iint_D f(x,y) \, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sin(x)$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = \pi/2$.
- Hitung $\iint_D f(x,y) \, dA$ jika $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2}$ dan D daerah yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = 4x - x^2$.
- Hitung $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} \, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, dan $x = 0$ di kuadran pertama.
- Tentukan $\iint_D xy^2 \, dA$ jika D daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 1$, $y = 1$, $y = 0$ di kuadran pertama.
- Tentukan $\iint_D (x + 2y) \, dA$ jika D daerah segitiga dengan titik-titik sudut $(0,0)$, $(2,0)$, dan $(1,1)$.
- Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq x$, $y \geq 0$ di kuadran I. Tentukan $\iint_D x \, dA$.
- Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 = 4$ dan $x = 0$. Tentukan $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dA$.
- Diketahui D daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 1$ dan dibatasi $x^2 + y^2 = 2x$ dan $x = 0$. Tentukan $\iint_D (x^2 + y^2) \, dA$.
- Diketahui D daerah yang dibatasi $x^2 + y^2 = 5$ dan di atas sumbu x . Tentukan $\iint_D x \, dA$.
- Diketahui D daerah yang dibatasi $y = \sqrt{4-x^2}$ dan di atas sumbu x . Tentukan:
 - Luas daerah D
 - Titik pusat massa D , jika rapat massa $\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Asumsikan

10. Daerah D adalah yang dibatasi $x^2 + y^2 - 4y = 0$ dan di bagian I. Tentukan:
- Titik pusat massa D . Kita misal massa $\rho(x, y) = k$, k konstanta.
 - Momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y .
11. Daerah D adalah yang terbatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ dan dibatasi $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Tentukan titik pusat massa D , jika rapat massa $\rho(x, y) = ky$, k konstanta.
12. Jika D lamina yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ dan $y = 0$. Hitunglah koordinat titik massa $(\bar{x}, \bar{y})$ sebarang lamina jika koordinat titik massa $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ dan
- Massa lamina
 - Titik pusat massa
 - Normen inersia I_{x_0} , I_{y_0} dan I_0
13. Jika D adalah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $y = x$ dan $y = -x$. Hitunglah koordinat titik massa $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{8}{3}(x^2 + y^2)^{3/2}$. Tentukan:
- Massa D
 - Momen kedua masing masing bidang
 - Titik pusat massa
 - Momen kedua I_{x_0} , I_{y_0} dan I_0

BAB 2

INTEGRAL LIPAT TIGA

Capaian Pembelajaran:

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk:

1. Memahami benda-benda di ruang tiga dimensi
2. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat Cartesius
3. Memahami dan menyelesaikan integral lipat tiga dengan menggunakan koordinat silinder
4. Menerapkan dan menyelesaikan aplikasi integral lipat tiga

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari benda-benda di ruang dimensi tiga, pengertian dan definisi Integral lipat tiga. Selanjutnya akan dipelajari integral lipat tiga dalam Koordinat Cartesius dan Koordinat Silinder. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral lipat tiga untuk menentukan volume benda, titik pusat massa dan momen inersia pada benda-benda dengan rapat massa berbeda.

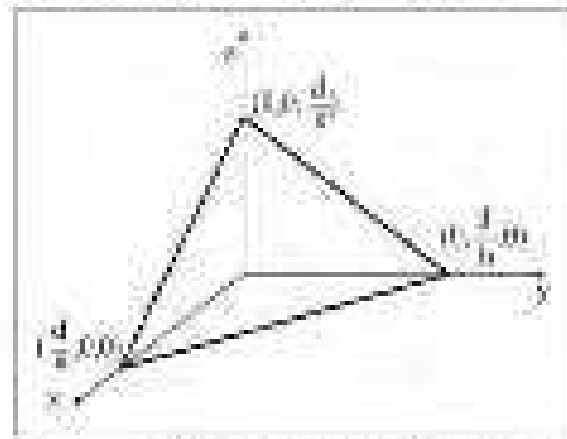
2.1 Gambar-gambar Bidang di Ruang Tiga Dimensi

Sebelum masuk ke pembahasan integral lipat tiga, kita harus mengetahui terlebih dahulu bentuk bidang yang digunakan dalam ruang berdimensi tiga. Beberapa bidang yang umumnya digunakan yaitu: (Vreede & Spitzgel, n.d.)

1. Limas segitiga $ax + by + cz = d$, dimana a, b, c, d tidak sama dengan nol.

Cara menggambar:

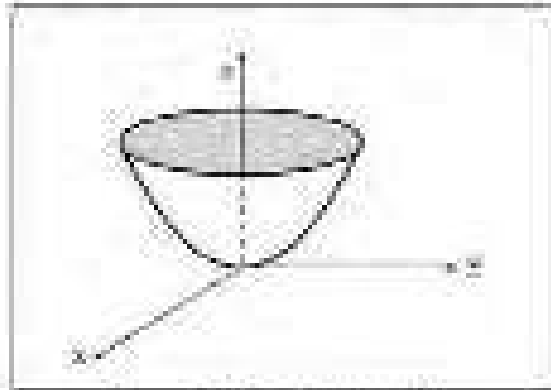
- Perpotongan dengan sumbu $x = y = z = 0 \Rightarrow ax = d \Rightarrow x = \frac{d}{a} \Rightarrow (\frac{d}{a}, 0, 0)$
- Perpotongan dengan sumbu $y = x = z = 0 \Rightarrow by = d \Rightarrow y = \frac{d}{b} \Rightarrow (0, \frac{d}{b}, 0)$
- Perpotongan dengan sumbu $z = x = y = 0 \Rightarrow cz = d \Rightarrow z = \frac{d}{c} \Rightarrow (0, 0, \frac{d}{c})$



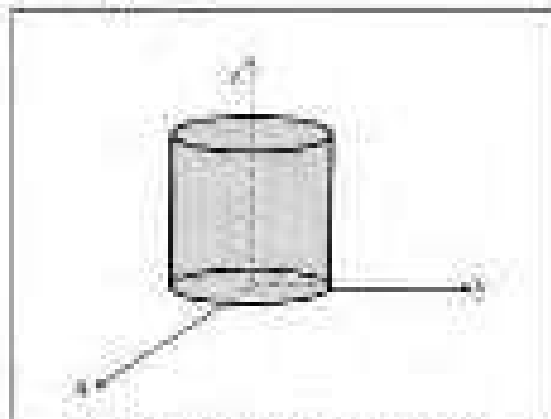
Gambar 2.1. Limas Segitiga

2. Paraboloida $z = x^2 + y^2$

Cara menggambar:

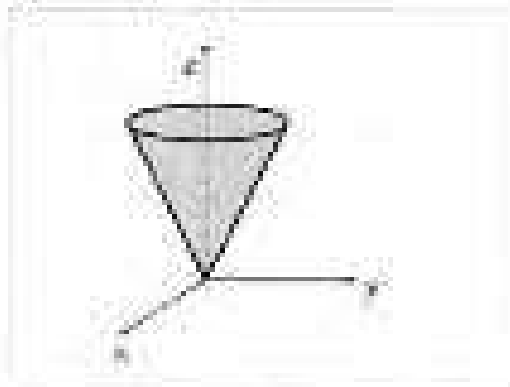
Misal $x = 0 \rightarrow z = y^2$ (di bidang YOZ, berbentuk parabola)Misal $y = 0 \rightarrow z = x^2$ (di bidang XOZ, berbentuk parabola)

Gambar 2.2 Paraboloida

3. Silinder / Tabung $x^2 + y^2 = r^2$ 

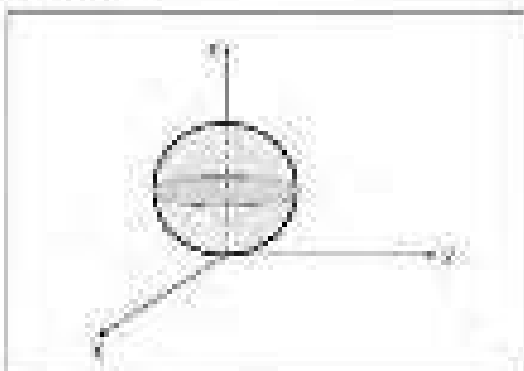
Gambar 2.3. Tabung / silinder

4. Kerucut Tegak $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Gambar 2.4. Kerucut tegak

5. Bola $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

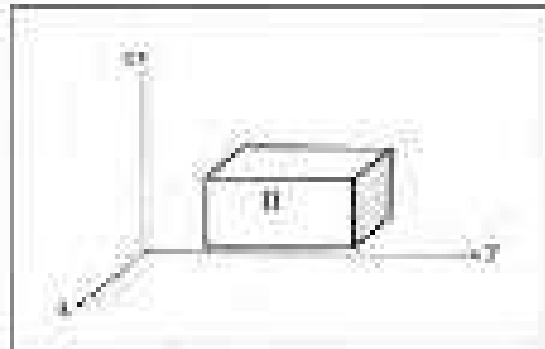


2.1.1 Konsep Integral Lipat Tiga

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan integral lipat dua dapat diperluas dengan cara yang alamiah menjadi integral lipat tiga atau bahkan menjadi integral lipat n .

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang dibatasi oleh beberapa permukaan. Jika $f(x, y, z)$ suatu fungsi yang bekerja pada B maka integral lipat tiga dari fungsi f atas B ditulis

$\iiint_B f(x, y, z) dV$ dimana dV adalah diferensial elemen volume



Gambar 2.6 Konsep Integral Lipat Tiga

2.1.2 Definisi Integral Lipat Tiga

Bagi daerah R atas daerah-daerah kecil R_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ yang berbentuk paralelepipedum (kotak) yang sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu x , y dan z . Misalkan volume R_k adalah ΔV_k , dan ambil titik (x_k, y_k, z_k) dalam R_k . Kemudian bentuk jumlah Riemann

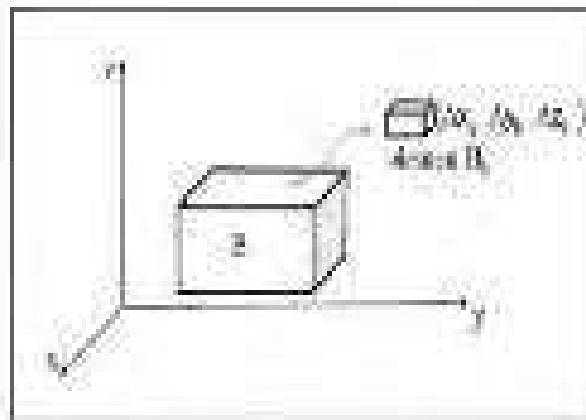
$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Sehat $|P| =$ panjang diagonal terpanjang dari set R_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Definisi Integral Lipat Tiga

Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$ ada dan terhingga

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \int_R f(x, y, z) dV$. Maka f dikatakan terintegralkan pada R .



Gambar 2.7 Definisi Integral Lipat Tiga

2.1.3 Eksistensi Integral Lipat Tiga

Jika f kontinu dan terbatas pada B maka $\iiint_B f(x, y, z) dV$ ada

Syarat f kontinu tidak kuat, sebenarnya fungsi f masih dapat diskontinu pada sejumlah berhingga permukaan lain sehingga dapat terdiferensial. Pembahasan selanjutnya hanya difokuskan pada f

CONTOH 2.1

Jika diketahui $f(x, y, z) = x^2 y$ dan $B = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$. Karena f kontinu pada B maka $\iiint_B x^2 y z \, dV$ ada.

2.1.4 Sifat-sifat Integral Lipat Tiga

Beberapa sifat penting yang dipenuhi integral lipat tiga yaitu:

1. $\iiint_B (f(x, y, z) + g(x, y, z)) \, dV = \iiint_B f(x, y, z) \, dV + \iiint_B g(x, y, z) \, dV$
2. $\iiint_B a f(x, y, z) \, dV = a \left(\iiint_B f(x, y, z) \, dV \right)$

3. Untuk B_1 dan B_2 yang memenuhi $E = E_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ permukaan, maka

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iiint_{B_1} f(x, y, z) \, dV + \iiint_{B_2} f(x, y, z) \, dV$$

4. Jika $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap (x, y, z) anggota B , maka

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV \leq \iiint_B g(x, y, z) \, dV$$

CONTOH 2.2

$$\iiint_B (4x^2 + 3y) \, dV = \iiint_B 4x^2 \, dV + \iiint_B 3y \, dV$$

CONTOH 2.3

Jika $E = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 4\}$,

Misalkan $B_1 = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$ dan

$B_2 = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4\}$

Maka $\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iiint_{B_1} f(x, y, z) \, dV + \iiint_{B_2} f(x, y, z) \, dV$

CONTOH 2.4

Jika $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan $g(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 2z^2$ dan $E = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$. Karena $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap $(x, y, z) \in E$, maka $\iiint_E f(x, y, z) \, dV \leq \iiint_E g(x, y, z) \, dV$.

2.2 Integral Lipat Tiga Koordinat Kartesian

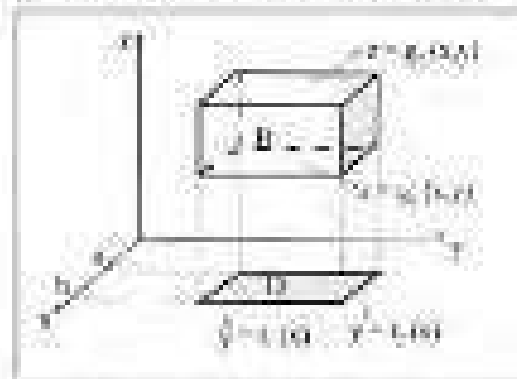
Misalkan E suatu daerah di ruang yang dibatasi di atas oleh permukaan $z = g_1(x, y)$ dan di bawah oleh $z = g_2(x, y)$. Misalkan D adalah proyeksi E pada bidang XY , maka

$\iiint_E f(x, y, z) \, dV$ dapat ditafsirkan sebagai berikut

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left(\int_{g_2(x, y)}^{g_1(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dA$$

Integral di ruas kanan adalah integral bernilai ganda yang pertama diintegrasikan terhadap z dan kemudian integral lipat

dua seperti yang telah diajari pada bab 1. Untuk selanjutnya tanda kurung dalam integral berulang dihapuskan dan integral yang paling dalam dikerjakan terlebih dahulu. (Kreyszig, 2014)



Gambar 2.8 Tampilan Integral Lipat Tiga (Kreyszig, 2006)

Misalkan B daerah yang dibatasi oleh bidang-bidang $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = g(x, y)$ dan permukaan $z = h(x, y)$.

Jadi $B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$ dan $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ adalah proyeksi B terhadap bidang xy .

Maka taksiran integral lipat tiga

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g(x,c)}^{g(x,d)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

CONTOH 2.5

Selesaikan integral beraturan $\int_{-2}^2 \int_{0 \leq y \leq 2-x} \int_{0 \leq z \leq 2-x-y} f(x, y, z) dz dy dx$.

Penyelesaian :

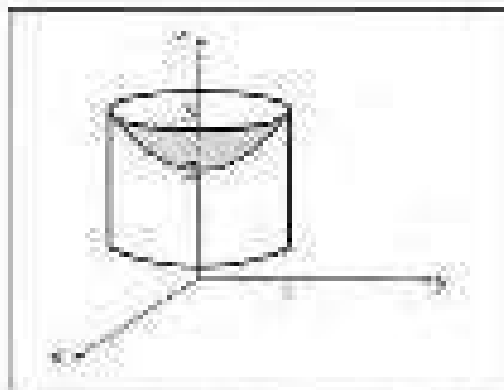
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{0 \leq y \leq 2-x} \int_{0 \leq z \leq 2-x-y} 4 \, dz dy dx &= \int_{-2}^2 \int_{0 \leq y \leq 2-x} \left(\int_{0 \leq z \leq 2-x-y} 4 \, dz \right) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{0 \leq y \leq 2-x} [4z]_{0 \leq z \leq 2-x-y} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{0 \leq y \leq 2-x} (4x - 4y + 8) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 [4xy - 2y^2 + 8y]_{0 \leq y \leq 2-x} dx \\ &= \int_{-2}^2 [4x(2-x) - 2(2-x)^2 + 8(2-x)] dx \\ &= \int_{-2}^2 [-6x^2 + 24x] dx = -14 \end{aligned}$$

CONTOH 2.6

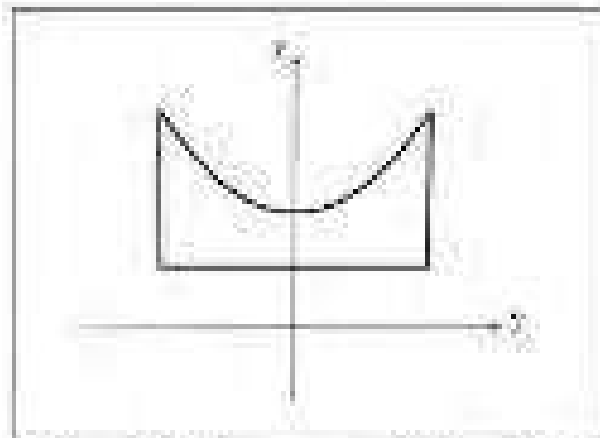
30

Tentukan $\iiint_B f(x, y, z) \, dV$ dimana B daerah yang dibatasi oleh $z = 1$, $z = 2 + x + y$ dan $x^2 + y^2 = 1$.

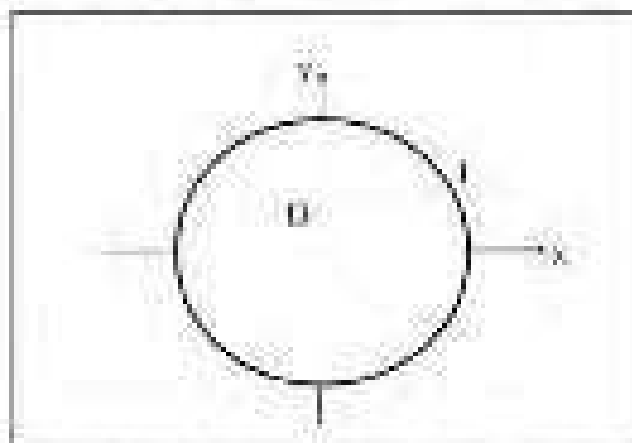
Penyelesaian,



Gambar 2.9 B dibatasi oleh $z = 1$, $z = 2 + x + y$ dan $x^2 + y^2 = 1$



Gambar 2.10 Penampang di bidang YZ



Gambar 2.11 Proyeksi B terhadap bidang XY

36 $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}$ 6

dan proyeksi B terhadap bidang XY adalah

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Jadi

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \iint_D \int_{z=1}^{z=2+x^2+y^2} f(x, y, z) \, dz \, dA$$

$$= \int_{\theta=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=1}^{z=2+x^2+y^2} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

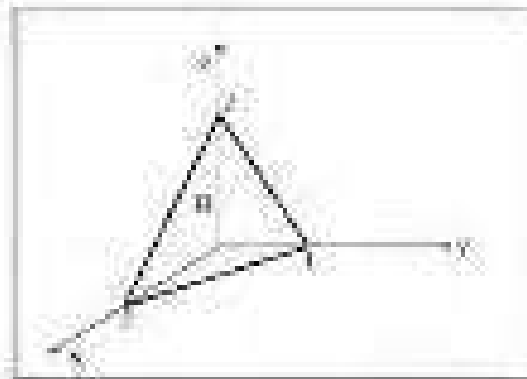
$$= \int_D [-6x^2 + 21x] \, dA = -14$$

CONTOH 2.7

7

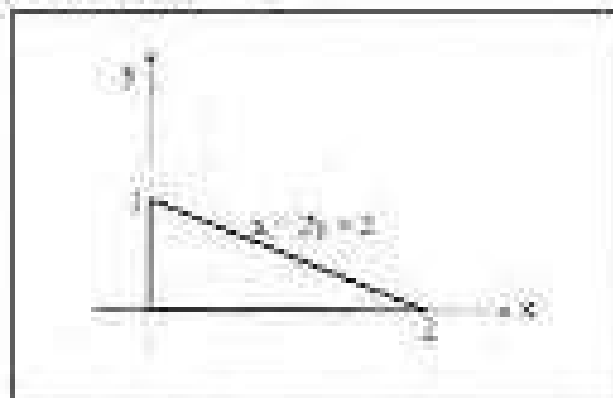
Tentukan $\iiint_R f(x,y,z) \, dV$ jika R daerah yang dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 2.12 R dibatasi $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Proyeksi R pada bidang xy adalah daerah D yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$ dan $x + 2y = 2$.



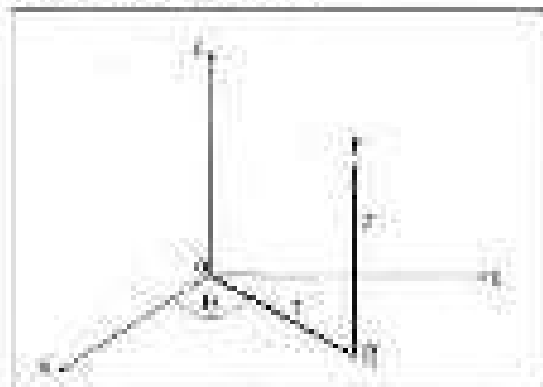
Gambar 2.13 D dibatasi $x + 2y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

haci

$$\begin{aligned}
 \iint_D (2x) \, dV &= \iint_D \int_{x=0}^{2-x-2y} 2x \, dz \, dA \\
 &= \iint_D [2xz]_{z=0}^{z=2-x-2y} \, dA \\
 &= \iint_D [2x(2-x-2y)] \, dA \\
 &= \iint_D [4x - 2x^2 - 4xy] \, dA \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{1-\frac{1}{2}x} [4x - 2x^2 - 4xy] \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^2 [4xy - 2x^2y - xy^2]_{y=0}^{y=1-\frac{1}{2}x} \, dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \left[4x(1-\frac{1}{2}x) - 2x^2(1-\frac{1}{2}x) - x(1-\frac{1}{2}x)^2 \right] \, dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \left[4x - 2x^2 - 2x^2 + x^3 - x + \frac{1}{2}x^3 \right] \, dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \left[3x - 4x^2 + \frac{3}{2}x^3 \right] \, dx \\
 &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4 \right]_{x=0}^2 \\
 &= \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 16 \\
 &= 6 - \frac{32}{3} + 6 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

2.3 Integral Lipat Tiga Dalam Koordinat Silinder/ Tabung

Ketika sebuah benda B dalam ruang berdimensi tiga mempunyai sebuah sumbu simetri, maka perhitungan integral lipat tiga atas B sering dipermudah dengan menggunakan koordinat silinder. (Kreyszig, 2013)



Gambar 2.14 Koordinat Silinder

Jika P suatu titik di ruang dan P' proyeksi P pada bidang XY

Sebut $OP' = r$ adalah jari-jari dan θ adalah sudut yang dibentuk OP' dengan sumbu x positif.

Maka koordinat silinder dari P adalah $P(r, \theta, z)$

Hubungan antara koordinat Kartesien dengan koordinat

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

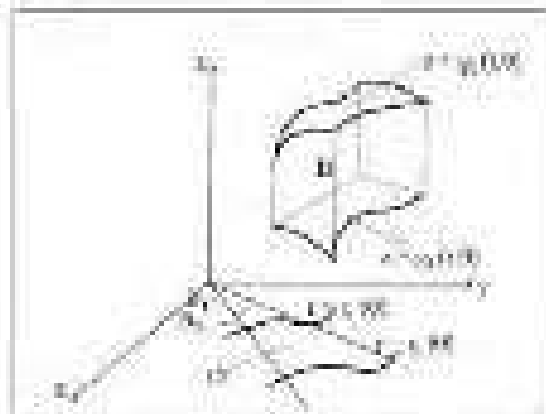
Dalam koordinat silinder $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$

Determinan Matriks Jacobi $|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \right|$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

Sehingga
$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Bila E daerah yang dibatasi di bawah oleh permukaan $z = g_1(r, \theta)$, di atas oleh permukaan $z = g_2(r, \theta)$, silinder-silinder $r = r_1(\theta)$, $r = r_2(\theta)$ dan lengkungan $\theta = \theta_1$ dan $\theta = \theta_2$.



Gambar 2.15 Tafsiran Integral Lipat Tiga Koordinat Silinder

Maka

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dz \, dr \, d\theta.$$

CONTOH 2.8

Tentukan koordinat silinder dari titik $P(1, 2, 2)$.

Penglesaian:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{2}{1} \text{ maka } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 2$$

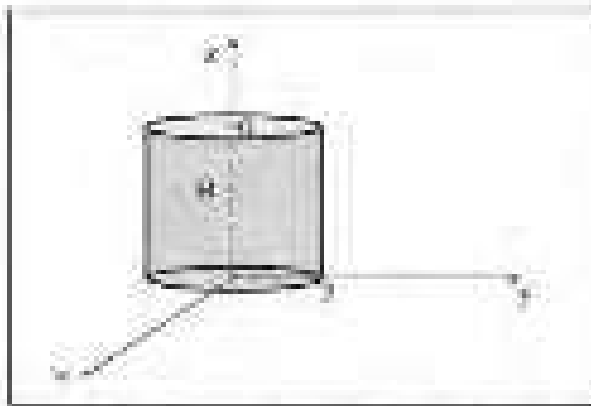
$$\text{Maka } (r, \theta, z) = (\sqrt{5}, \frac{\pi}{2}, 2)$$

CONTOH 2.8

6

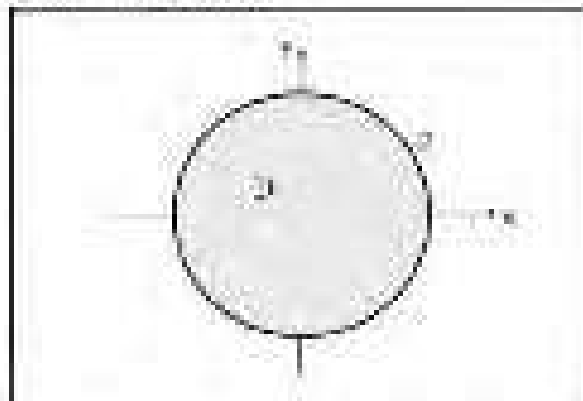
Tentukan $\iiint_E dV$ jika E benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ bidang $z = 6$, $z = 5$

Penyelesaian



Gambar 2.15 E dibatasi $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$

Proyeksi E terhadap bidang xy adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah



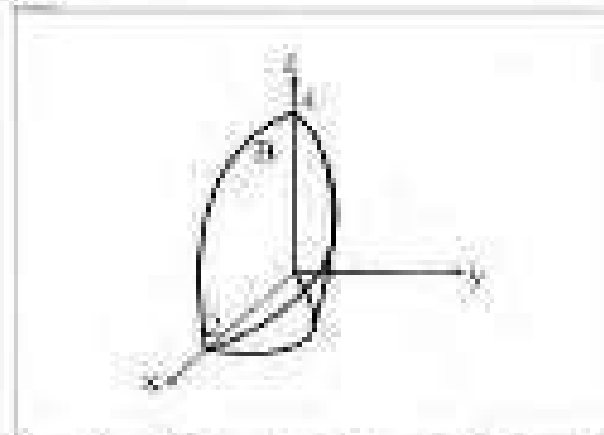
Gambar 2.17 D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned}
 \iiint_B dV &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=0}^6 r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 [rz]_{z=0}^6 \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 6r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [3r^2]_{r=0}^2 \, d\theta \\
 &= 12 (2\pi) \\
 &= 24\pi
 \end{aligned}$$

CONTOH 2.10

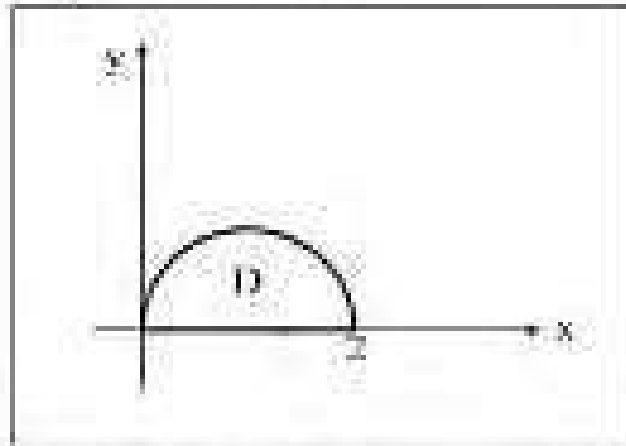
Tentukan $\iiint_B 2xy \, dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ dan $y = 0$ di oktan pertama.

Penglesaian:



Gambar 2.15 B dibatasi $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ & $y = 0$ di oktan I.

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.13 D-efikasi $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$ di kuadran I

8 ar. persamaan di atas diperoleh

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow (x^2 - 2x) + y^2 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

maka $r = 2 \cos \theta$.

Jadi

$$\begin{aligned} \iint_D 4xy \, dA &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^2 \cos \theta \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} (2 \cos \theta)^3 \cos^2 \theta \, d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (8 \cos^3 \theta \cos^2 \theta) \, d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (8 \cos^5 \theta \cos \theta) \, d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (16 \cos^5 \theta - \cos^5 \theta) \, d\theta - \cos \theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (16 \cos^5 \theta - \cos^5 \theta) \, d\theta - \cos \theta \\ &= -2 \left[\frac{16}{6} \cos^4 \theta - \frac{1}{6} \cos^6 \theta \right]_0^{\pi/2} = 0 \end{aligned}$$

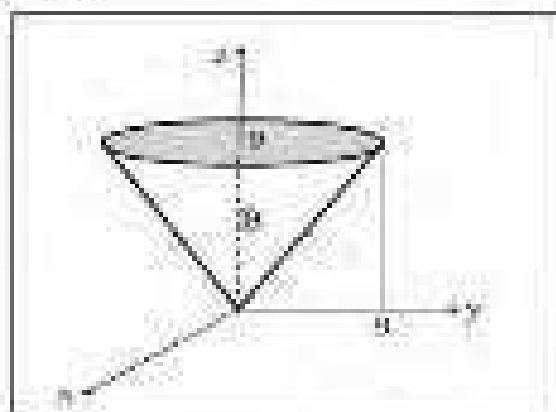
CONTOH 2.11

Temukan $\iiint_B x^2 y^2 \, dV$ jika B benda yang dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 9$.

Penglesaian:

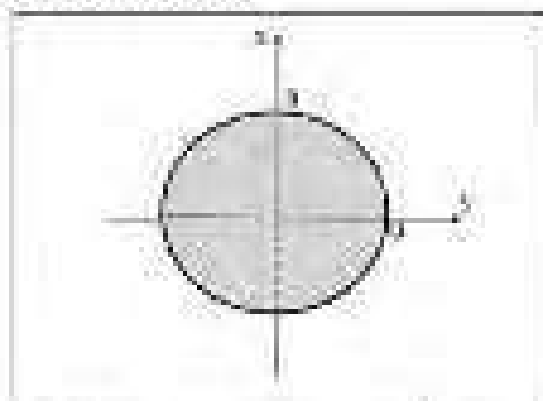
Perpotongan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 9$

Diperoleh $r = 9$



Gambar 2.20 B dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 9$

Proyeksi B terhadap bidang xy adalah daerah D yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.21 D dibatasi oleh $\sqrt{x^2 + y^2} = 9$

Jelajahi

$$\begin{aligned}
 \iiint_B x^2 y \, dV &= \iiint_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r \cos \theta}^{2-r \cos \theta} x^2 y \, dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r \cos \theta}^{2-r \cos \theta} r^2 \cos^2 \theta (r \sin \theta) r \, dz \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2-r \cos \theta} r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \, dz \, d\theta \, d\phi \\
 &= \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right] \left[\int_0^\pi \int_{r \cos \theta}^{2-r \cos \theta} r^3 \, dz \, d\theta \right] \\
 &= \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d(-\cos \theta) \right] \left[\int_0^\pi r^4 \, z \Big|_{r \cos \theta}^{2-r \cos \theta} d\theta \right] \\
 &= - \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin(\cos \theta) \right] \left[\int_0^\pi r^4 (2-r \cos \theta) d\theta \right] \\
 &= - \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d(\cos \theta) \right] \left[\int_0^\pi (2r^4 - r^5) d\theta \right] \\
 &= - \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5} r^5 - \frac{r^6}{6} \right]_0^\pi \\
 &= - \left[\frac{2}{3} (\cos^3 \pi) - (\cos^3 0) \right] \left[\frac{2}{5} \pi^5 - \frac{2}{6} \pi^6 \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

2.4 Aplikasi Integral Lipat Tiga

1. Volume daerah B adalah : $V = \iiint_B dV$

2. Titik Pusat Massa

Misalkan $\rho(x, y, z)$ rapat massa di setiap titik pada B , maka

- Massa B : $m = \iiint_B \rho \, dV$

- Momen massa (jarak linier titik pusat massa ke bidang).

- Momen massa terhadap bidang xy ditulis $M_{xy} = \iiint_B z \rho$

Momenta Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

$$dV = dx dy dz = \sqrt{\frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2}} dx dy$$

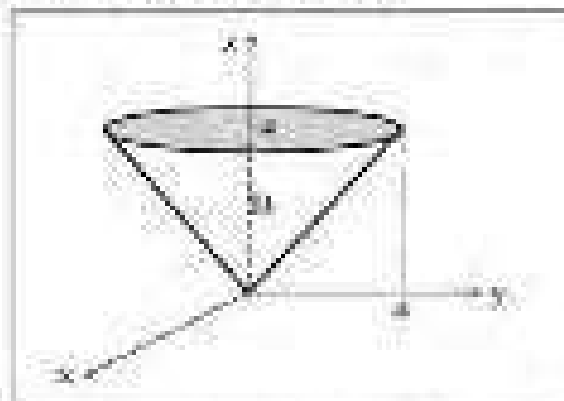
- Momen massa terhadap bidang xy ditulis $M_z = \iint_R \omega$
 dz
- Momen massa terhadap bidang yz ditulis $M_x = \iint_R \omega y$
 dz

• Titik pusat massa =

CONTOH 2.17

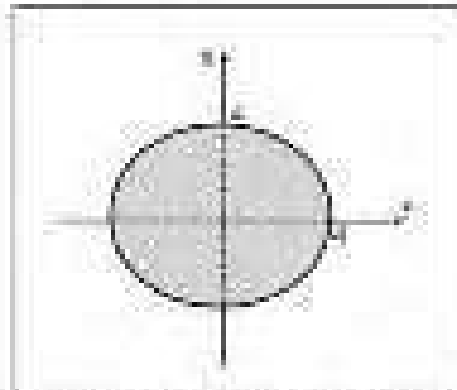
Jika B benda yang dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $3\sqrt{x^2 + y^2}$. Tentukan:

- Volume B
- Titik pusat massa B
- Momen inersia terhadap sumbu z



Gambar 2.22 B yang dibatasi oleh $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 4$

Proyeksi R terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan pada gambar di bawah.



Gambar 2.23. D dibatasi lingkaran dengan $r = 4$

$$\begin{aligned}
 \text{a. Volume } R = V &= \iiint_R dz = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4z)_{z=r^2}^{z=4} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4r - r^3) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_{r=-4}^{r=4} d\theta \\
 &= \frac{64}{3}\pi \text{ satuan volume} \\
 \text{b. Massa} &= \iiint_R \rho \, dz = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r^2}^4 (3r^2 z) \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r^2}^4 r^2 z \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 z)_{z=r^2}^{z=4} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4r^3 - r^4) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right]_{r=-4}^{r=4} d\theta \\
 &= (28)\pi
 \end{aligned}$$

Karena V simetris terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$, jadi cukup dicari momen massa terhadap bidang xy

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_D \rho(x,y,z) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=r}^4 (3r)rx \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=r}^4 r^2 x \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 [r^2 x^2]_{z=r}^4 \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 (16r^2 - r^4) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{28}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_{r=0}^4 \, d\theta \\ &= \frac{384}{5} \pi \end{aligned}$$

maka

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \left(\frac{384\pi}{5} \right) / 128\pi = \frac{3}{5}$$

jadi titik pusat massa $= (0, 0, \frac{6}{5})$

c. Momen inertia terhadap sumbu z

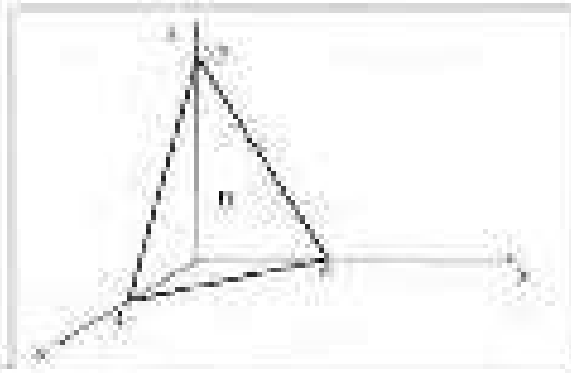
$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_D \rho(x^2 + y^2) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=r}^4 (3r) r^2 r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=r}^4 r^4 z \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 [r^4 z^2]_{z=r}^4 \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^4 (16r^4 - r^6) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{16}{5} r^5 - \frac{1}{7} r^7 \right]_0^4 \\ &= 2.808,6 \pi \end{aligned}$$

CONTOH 2.13

Jika B benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$.
 Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah k , k konstanta.
 Tentukan:

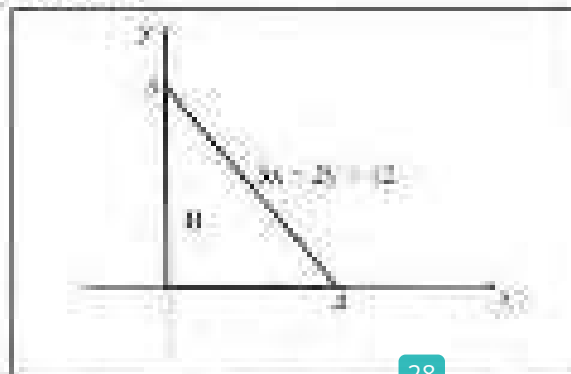
- Volume B
- Momen inersia terhadap sumbu y

Penyelesaian:



Gambar 2.24. B dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12$ dan $z = 0$.

Proyeksi B terhadap bidang xy adalah D yang diberikan pada gambar di bawah.



Gambar 2.25. D dibatasi oleh $3x + 2y = 12$, sumbu x dan sumbu y .

Untuk persamaan bidang $3x + 2y + z = 12$ maka $z = 12 - 3x - 2y$

Untuk proyeksi D: $3x + 2y = 12$ maka $y = 6 - \frac{3}{2}x$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Volume } E &= \iint_D z \, dA = \iint_D (12 - 3x - 2y) \, dA \, dA \\
 &= \int_0^4 \int_{\frac{2}{3}x}^{6 - \frac{3}{2}x} (12 - 3x - 2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^4 \left[12y - \frac{3}{2}xy - y^2 \right]_{\frac{2}{3}x}^{6 - \frac{3}{2}x} dx \\
 &= \int_0^4 \left(12\left(6 - \frac{3}{2}x\right) - \frac{3}{2}x\left(6 - \frac{3}{2}x\right) - \left(6 - \frac{3}{2}x\right)^2 \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(72 - 18x - 11x + \frac{9}{2}x^2 - (36 - 18x + \frac{9}{4}x^2) \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(72 - 18x - 11x + \frac{9}{2}x^2 - 36 + 18x - \frac{9}{4}x^2 \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(36 - 10x + \frac{9}{4}x^2 \right) dx \\
 &= \left[36x - 5x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right]_0^4 \\
 &= 36(4) - 5(4)^2 + \frac{9}{4}(4)^3 \\
 &= 48 \text{ cubic volume}
 \end{aligned}$$

5. **Momen inersia terhadap sumbu y :**

$$I_y = \iiint_R \rho (x^2 + z^2) dV$$

$$= \iiint_R \lambda (y^2 + z^2) dV$$

$$= \lambda \iiint_R (x^2 + z^2) dV$$

$$= \lambda \int_0^a \int_0^{a-2x} \int_0^{a-x-2y} (x^2 + z^2) dz dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-2x} \left(\int_0^{a-x-2y} (x^2 + z^2) dz \right) dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-2x} \left(x^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_0^{a-x-2y} dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-2x} \left(x^2 (12 - 2x - 2y) + \frac{1}{3} (12 - 2x - 2y)^3 \right) dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-2x} \left(12x^2 - 2x^3 - 2x^2 y + \frac{1}{3} (1728 - 1296x - 816y + 60y^2 + 256x^2 + 432xy - 24xy^2 - 64x^2 y - 20x^3 - 10xy^3) \right)$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-2x} \left(12x^2 - 2x^3 - 2x^2 y + 576 - 432x - 272y + \frac{80}{3} y^2 + 104x^2 - 144xy - 8xy^2 + 16x^2 y - 9x^3 \right) dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-2x} \left(121x^2 - 12x^3 - 21x^2 y + 576 - 432x - 272y + \frac{80}{3} y^2 + 144xy - 8xy^2 + 16x^2 y - 9x^3 \right)$$

$$= \int_0^a \left(120x^2 y - 12x^3 y - 10x^2 y^2 + 576y - 432xy - 136y^2 + \frac{80}{3} y^3 + 70xy^2 - \frac{8}{3} x^3 y \right) \Big|_0^{a-2x} dx$$

Menemukan Integral Ganda Ruang Dimensi 2 dan 3

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^4 \left(120x^2 \left(x - \frac{1}{2}x \right) + 12x^3 \left(x - \frac{1}{2}x \right) + 10x^4 \left(x - \frac{1}{2}x \right)^2 + 570 \left(x - \frac{1}{2}x \right) + \right. \\
 &\quad \left. 4320x - \frac{9}{2}x^2 + 110x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{20}{3} \left(x - \frac{1}{2}x \right)^3 + \right. \\
 &\quad \left. 700 \left(x - \frac{1}{2}x \right)^2 + \frac{9}{2}x \left(x - \frac{1}{2}x \right)^2 \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(60x^2 - 14401x - 320x^2 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^4 \right) dx \\
 &= 672x - 7201x^2 - 110x^3 + \frac{64}{3}x^4 + \frac{9}{10}x^5 \Big|_0^4 \\
 &= 672(4) - 7201(4)^2 - 110(4)^3 + \frac{64}{3}(4)^4 + \frac{9}{10}(4)^5 \\
 &= 152432,4
 \end{aligned}$$

CONTOH 2.14

29

Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $x = 0$ dan $z = 6$. Misalkan rapat massa yang berterjadi pada B adalah $\rho = \frac{5}{\sqrt{z^2 + y^2}}$.

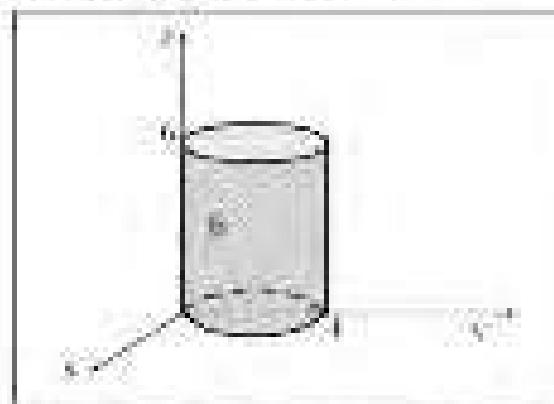
Temukan:

- Volume B
- Massa B

Penyelesaian:

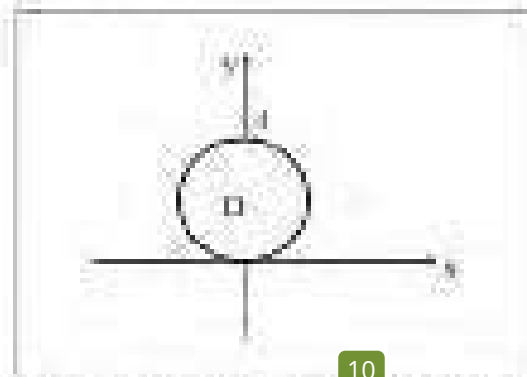
10

10 Bidang $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ adalah silinder tegak dengan alas lingkaran yang berpusat di titik $(0, 2, 0)$



Gambar 2.26. B dibatasi $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 6$

Proyeksi B terhadap bidang XY adalah daerah D yang diberikan gambar di bawah



10

Gambar 3.27 D diberikan $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

Jari-jari **lingkaran** D ditentukan **dengan** cara:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$r = 4 \cos \theta$$

$$s. \text{ Solusi } B = T = \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$$

Carilah **kontur** **terhadap** **koordinat** (r, θ) **dan** **batas** **terhadap** (r, θ) **yang** **terdefinisi** **akan**

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3 \cos \theta}{3} \right]_0^{4 \cos \theta} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^3 \cos \theta}{3} \bigg|_0^{4 \cos \theta} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^3 \cos \theta}{3} \bigg|_0^{4 \cos \theta} d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} \frac{r^3 \cos \theta}{3} d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} (16 \cos^3 \theta) d\theta$$

$$= 64 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta$$

$$= 64 \left[\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta d\theta \right]$$

$$= 64 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \sin 3\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 64 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \sin 3\pi - \sin 0 \right)$$

$$= 24\pi$$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_R \lambda \, dV \\
 &= 3 \iiint_{\Omega_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) \, dx \, dy \, dz \\
 &= 2 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \, r \, dr \, d\varphi \, d\theta \\
 &= 2k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \, dr \, d\varphi \, d\theta \\
 &= 2k \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}} \, d\varphi \, d\theta \\
 &= (2k) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 \theta) \right] \, d\varphi \, d\theta \\
 &= (2k) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 \theta) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \, d\theta \\
 &= (2k) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos^2 \theta) \, d\theta \\
 &= 40k \left[-\cos \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= -40k \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) \\
 &= -40k (0 - 1) = 40k
 \end{aligned}$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan tugas mandiri pada pertemuan ke 5 dan pada pertemuan ke 6 diadakan Quiz di awal pertemuan.

LATIHAN 2

- Hitunglah integral berbilang berikut:
 - $\int_0^2 \int_1^2 \int_0^{2x} 2xyz \, dz \, dx \, dy$
 - $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x-y} xyz^2 \, dz \, dy \, dx$
 - $\int_0^{1/2} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \int_0^{\cos \theta} \sin(\theta) \, dx \, dy \, d\theta$
 - $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xz \, dz \, dy \, dx$
 - $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y z \, dz \, dy \, dx$
 - $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y \, dz \, dy \, dx$
- Jika B benda yang dibatasi oleh $5x + 2y + z = 12$ dan $z = 4$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah konstanta, tentukanlah:
 - Gambar B
 - Volume B
 - Massa B
- Jika B benda yang dibatasi oleh $z = 5 - (x^2 + y^2)$ dan $z = 2$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, tentukanlah:
 - Gambar B
 - Proyeksi B terhadap bidang xy
 - Titik pusat massa B

4. Jika B benda yang dibatasi oleh $|x - 2y + 1| \leq 4$, $z = 0$ dan $z = 5$. Misalkan rapat massa yang bekerja pada B adalah $\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tentukanlah:
 - a. Gambar B
 - b. Proyeksi B terhadap bidang XY
 - c. Momen inersia terhadap sumbu x . Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2) dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ dan $z = 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$
5. Tentukan $\iiint_B (y^2) dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2) = 4$ dan $z = 0$.
6. Tentukan $\iiint_B (x^2 + y^2)^{1/2} dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$ dan $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$
7. Tentukan $\iiint_B xy dV$ apabila B daerah yang dibatasi oleh $z = (x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2) = 2y$ dan $z = 0$.
8. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 12 - x^2 - y^2$ dan $z = 0$.
Jika rapat massa $\rho = x^2 + y^2$, tentukan:
 - a. Volume B
 - b. Massa B
 - c. Momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y
9. Jika B benda yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4a$, $z = 0$ dan $z = 5$. Jika rapat massa $\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, tentukan momen inersia terhadap sumbu z

BAB 3

KALKULUS VEKTOR

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu :

1. Memahami fungsi bernilai vektor dan diferensial vektor.
2. Memahami operasi fungsi vektor.
3. Memahami gradien, divergensi dan curl.

Deskripsi:

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari tentang fungsi vektor, diferensial vektor dan operasi fungsi vektor. Mahasiswa juga diajarkan bagaimana menentukan gradien sebuah fungsi, divergensi dan curl. (Penerapannya, dll.)

20

3.1 Fungsi Bernilai Vektor

Jika D suatu himpunan di ruang $\mathbb{R}^n$. Jika F suatu fungsi bernilai vektor di ruang $\mathbb{R}^m$ dengan daerah definit D adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota x di D dengan satu dan hanya satu vektor y di $\mathbb{R}^m$ dan ditulis $y = F(x)$.

Selanjutnya vektor di $\mathbb{R}^n$ dapat ditulis $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$.
(Vollbre, Simaich, & Marvden, 2009)

CONTOH 3.1

20

Diberikan $y = f(x)$ fungsi dua variabel dengan nilai vektor di R adalah

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan y di titik $(2, -1)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ F_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 3x_1x_2 \\ -x_1x_2 + 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(2) + (-1)^2 \\ 3(2)(-1) \\ -(2)(-1) + 2(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Maka } y \text{ di titik } (2, -1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Diferensial Vektor

Jika $\vec{r}(u) = \langle P, Q, R \rangle$ adalah suatu fungsi vektor, fungsi vektor tersebut dapat ditulis dalam bentuk $\vec{r}(u) = P_1(u)\vec{i} + P_2(u)\vec{j} + P_3(u)\vec{k}$

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dP_1}{du}\vec{i} + \frac{dP_2}{du}\vec{j} + \frac{dP_3}{du}\vec{k}$$

Diferensial kedua vektor $\vec{r}(u)$ adalah

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{d^2P_1}{du^2}\vec{i} + \frac{d^2P_2}{du^2}\vec{j} + \frac{d^2P_3}{du^2}\vec{k}$$

17

Pernahkan sebuah fungsi $\vec{r}$ yang menghubungkan sebuah vektor $\vec{r}(u)$ dengan setiap titik u dalam ruang berdimensi n . Fungsi ini disebut medan vektor. (Wahyuni, 2017)

CONTOH 3.2

1. $\vec{r}(x, y) = -2x\vec{i} + \frac{1}{2}y\vec{j}$, adalah ruang berdimensi 2
2. $\vec{r}(x, y, z) = 3x\vec{i} - y\vec{j} + 4z\vec{k}$, adalah ruang berdimensi 3.

1 Secara umum medan vektor dalam ruang 3 dimensi ditulis $\vec{r}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

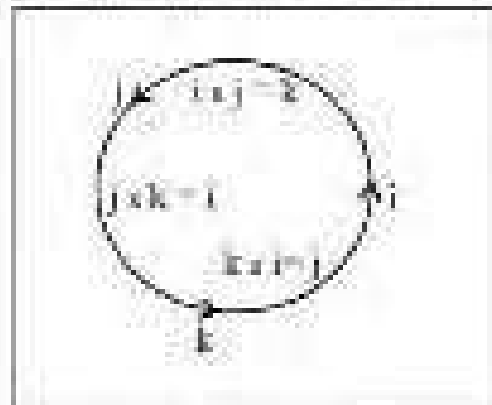
3.3 Operasi Fungsi

9 Jika $\vec{F}$ dan $\vec{G}$ dua fungsi vektor dimana (Meech, 2002) $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ dan $\vec{G} = G_1\vec{i} + G_2\vec{j} + G_3\vec{k}$ maka berlaku:

- a. $(\vec{F} + \vec{G}) = (F_1 + G_1)\vec{i} + (F_2 + G_2)\vec{j} + (F_3 + G_3)\vec{k}$
- b. Jika c suatu skalar maka $c\vec{F} = cF_1\vec{i} + cF_2\vec{j} + cF_3\vec{k}$
- c. Perkalian skalar $\vec{F} \cdot \vec{G} = (F_1G_1) + (F_2G_2) + (F_3G_3)$ dimana $(\vec{i} = \vec{j} = \vec{k}) \cdot \vec{k} = 1$

$$\begin{aligned} \text{d. Permisian cross } \vec{r} \text{ dan } \vec{u} \text{, maka } \vec{r} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= (r_2 u_3 - r_3 u_2) \vec{i} - (r_1 u_3 - r_3 u_1) \vec{j} + (r_1 u_2 - r_2 u_1) \vec{k} \end{aligned}$$

Berikut gambar untuk perkalian cross.



Gambar 3.1 Perkalian cross

Perkalian cross menggunakan aturan tangan kanan, dimana (Pande, 2010): $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$

Jika menggunakan tangan kiri, perkalian crossnya bernilai negatif.

CONTOH 3.3

6

Jika $F(x, y, z) = x \sin yz + 2yz e^x + 32z$

dan $G(x, y, z) = 3xyz^2 + 4xz + 10 \ln(xz)$

Tentukanlah:

a. $(2F)_G$

b. $F \times (-G)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } (2F)_G &= 2(x \sin yz + 2yz e^x + 32z)(3xyz^2 + 4xz + 10 \ln(xz)) \\ &= 2(x \sin yz + 4yz e^x + 64z)(3xyz^2 + 4xz + 10 \ln(xz)) \\ &= 6xyz^2 \sin yz + 26xyz e^x + 64x \ln(xz) \end{aligned}$$

$$\text{b. } F \times (-G) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ -G_1 & -G_2 & -G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x \sin yz & 2yz e^x & 32z \\ -3xyz^2 & -4xz & -10 \ln(xz) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (2yz e^x)(-10 \ln(xz)) - (32z)(-4xz) - [x \sin yz(-4xz) - 32(-10xz^2)] \\ &= 2z(-40xz e^x) + [x + (4xz \sin yz - 32yz^2)(10)] \\ &= (-40xz^2 e^x - 40xz) + [x + (4xz \sin yz - 32yz^2)(10)] \\ &= (-40xz^2 e^x - 40xz) + [x + 40xz \sin yz - 320yz^2] \end{aligned}$$

3.4 Gradien, Divergensi dan Curl

3.4.1 Operator Diferensial Nabla

Operator Nabla dinotasikan dengan lambang ∇ (Pandey, 2010)

Definisi Operator Nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Operator Nabla dapat dipandang sebagai sebuah

vektor.

3.4.2 Gradien

Operator Nabla jika dikenakan pada sebuah fungsi skalar $f(x, y, z)$ akan membentuk gradien dari $f(x, y, z)$.

Definisi Gradien

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

CONTOH 3.4

Jika $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy^2z$. Tentukan gradien ∇f di titik $(2, -1,$

4)

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= (6x + 2y^2z) \mathbf{i} + (4xy^2) \mathbf{j} + (2xy^2) \mathbf{k} \\ \nabla f(2, -1, 4) &= 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \end{aligned}$$

3.4.3 Divergensi F / Div F

Divergensi adalah hasil operasi dot antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$, ditulis (Ash & Ash, 1968)

divergensi (F) atau $\text{div}(F)$, dimana $\text{div}(F) = \nabla \cdot F$

Definisi Divergensi

Jika $F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ adalah sebuah medan vektor maka divergensi terdapat $\frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3$ maka

$$\begin{aligned} \text{div}(F) = \nabla \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 \end{aligned}$$

Interpretasi fisis divergensi adalah, jika F melambangkan medan kecepatan dari suatu fluida maka $\operatorname{div} F$ di titik p mengukur kecenderungan fluida tersebut untuk menyebar meninggalkan p ($\operatorname{div} F > 0$) atau mengumpul menuju p ($\operatorname{div} F < 0$).

CONTOH 1.3

Jika $F(x, y, z) = 2xz\sin z\mathbf{i} - \frac{z^2}{y}\mathbf{j} + e^{3xz}\mathbf{k}$. Tentukan $\nabla \cdot F$ di titik $(2, -1, \frac{\pi}{2})$.

Penglesaian:

Diketahui: $P = 2xz\sin z$

$$Q = -\frac{z^2}{y}$$

$$R = e^{3xz}$$

Maka

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= 2\sin z + \frac{z^2}{y^2} + 3xe^{3xz}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F(2, -1, \frac{\pi}{2}) &= 2\sin \frac{\pi}{2} + \frac{2^2}{(-1)^2} + 3(2)e^{3(2)(\frac{\pi}{2})} \\ &= 6 + 6e^{\pi^2} \end{aligned}$$

CONTOH 3.3

Dikis $P(x, y, z) = 2x \cos 2x + \frac{y^2}{x}$ dan $Q(x, y, z) = \text{trk} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \right)$.
 Perhitung!

$$\text{Diketahui } P = 2x \cos 2x \quad \text{maka } \frac{\partial P}{\partial x} = 2 \cos 2x - 4x \sin 2x$$

$$Q = \frac{y^2}{x} \quad \text{maka } \frac{\partial Q}{\partial y} = 2 \frac{y}{x}$$

$$R = -3xy e^{3xz} \quad \text{maka } \frac{\partial R}{\partial z} = -3xy e^{3xz}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

$$= (2 \cos 2x - 4x \sin 2x) + 2 \frac{y}{x} - 3xy e^{3xz}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F \left(1, 1, \frac{\pi}{2} \right) &= 2 \cos \pi - 4 \sin \pi + 2 - 3e^{3(1)(\frac{\pi}{2})} \\ &= -3e^{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

3.4.4. Curl F

Curl F adalah hasil operasi cross antara operator Nabla dan medan vektor $F(x, y, z)$ dimana $\text{Curl}(F)$

Definisi Curl

Dikis $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ adalah suatu medan vektor maka curl dari F adalah $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$ dan $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$ dan $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ maka

$$\text{Curl } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

Interpretasi: $\text{fix curl } F$ menyatakan arah sumbu dimana fluida tersebut berotasi

(melingkar, curl) paling cepat.

$|\text{Curl } F|$ menyatakan laju rotasi. Arah rotasi ini mengikuti aturan tangan kanan.

CONTOH 1.7

Seia $F(x, y, z) = 2xz \sin x \mathbf{i} + \frac{x^2}{y} \mathbf{j} + e^{2xz} \mathbf{k}$. Tentukan $\text{Curl } F$ di titik $(2, -1, \frac{\pi}{2})$.

Pertanyaan:

Diketahui: $P = 2z \sin x$

$$Q = -\frac{x^2}{y}$$

$$R = e^{2xz}$$

$$\text{Curl } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (2 - 0) \mathbf{i} - (2ze^{2xz} - 2x \cos x) \mathbf{j} + \left(-\frac{2x}{y} - 1 \right) \mathbf{k}$$

$$= (2 \cos^{2\pi} - 2x \cos x) \mathbf{j} - \frac{2x}{y} \mathbf{k}$$

Maka

$$\begin{aligned} \text{Curl } F \text{ di titik } (2, -1, \frac{\pi}{2}) &= -(2(\frac{\pi}{2})^2(2) \mathbf{j} - 2(2) \cos(\frac{\pi}{2})) - \frac{2(2)}{-1} \mathbf{k} \\ &= -2(\frac{\pi^2}{2} e^{i\pi}) + 4 \mathbf{k} \end{aligned}$$

CONTOH 3.3

Jika $P(x, y, z) = e^{xz} \cos y$, $Q(x, y, z) = 3xz$ dan $R(x, y, z) = 3yz + \sqrt{e^{xz}}$.
Temukan

- $\text{Curl}(\text{Curl } P)$
- $\text{Grad}(\text{div } P)$
- $\text{Grad}(\text{div}(\text{grad } P))$

Penglesaian:

$$\begin{aligned}\text{Diketahui } P &= e^{xz} \cos y \\ Q &= e^{xz} \sin y \\ R &= 3xz\end{aligned}$$

$$\text{a. } \text{Curl } P = \nabla \times P = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

$$= (0 - 0)i + (0 - 0)j + (-2e^{xz} \sin y + e^{xz} \sin y)k$$

$$= -e^{xz} \sin y k$$

$$\text{Jadi } \text{Curl } P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

$$= (-e^{xz} \cos y)i + (-2e^{xz} \sin y)j$$

$$= -e^{xz} \cos y i + 2e^{xz} \sin y j$$

b. $Kereca$

$$P = e^{2x} \cos y$$

$$Q = -e^{2x} \sin y$$

$$R = 5z$$

Misal

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2e^{2x} \cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{2x} \sin y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2e^{2x} \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -e^{2x} \cos y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 5$$

$$\text{Grad } F = \nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} i + \frac{\partial Q}{\partial y} j + \frac{\partial R}{\partial z} k$$

$$= 2e^{2x} \cos y i - e^{2x} \sin y j + 5$$

$$= e^{2x} (\cos y i + 5 + g(x, y, z))$$

$$\text{Grad } (4x^2) = \nabla g = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) g$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j + \frac{\partial g}{\partial z} k$$

$$= 8x i - e^{2x} \sin y j$$

c. $f(x, y, z) = 3y + \sqrt{x^2 + z^2}$

$$\text{Grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} i + 3j + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} k$$

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\text{grad } f) &= \nabla \cdot (\text{grad } f) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} i + 3j + \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} k \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (3) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + 0 + \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \\
 &= h(x, y, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Grad}(\text{div}(\text{grad } f)) &= \nabla h \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) h \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \\
 &= \frac{\partial x (x^2+y^2)^{3/2} - (x^2+y^2) \frac{3}{2} (2x) (x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2} i + 0 j + \\
 &\quad \frac{\partial y (x^2+y^2)^{3/2} - (x^2+y^2) \frac{3}{2} (2y) (x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2} k \\
 &= \frac{\partial x (x^2+y^2)^{3/2} - (x^2+y^2) \frac{3}{2} (2x) (x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2} i + \\
 &\quad \frac{\partial y (x^2+y^2)^{3/2} - (x^2+y^2) \frac{3}{2} (2y) (x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2} k \\
 &= \left(\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3(x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2} \right) i \\
 &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} i - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} k
 \end{aligned}$$

CONTOH 3.8

 Dikah $P(x, y, z) = x^{2yz} \sin yz + x^{-2y} \cos x + \sin 3z$ dan $f(x, y, z) = 4xy^2 + \frac{1}{x^2}$.

Tentukan:

a. $\nabla^2 f(x, y, z)$

b. $\nabla P \times \nabla f(x, y, z)$

Penyelesaian

Diketahui:

$$P = x^{2yz} \sin yz$$

$$Q = x^{-2y} \cos x$$

$$R = \sin 3z$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla^2 f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot (P(x, y, z) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (2xy^{2z} \sin yz) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (-2x^{-2y} \cos x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (3 \cos 3z) \\ &= 4x^2 y^{2z} \sin yz + 4x^{-2y} \cos x + 9 \sin 3z \\ (f^2 \cdot f)(x, y, z) &= (xz^2 x^{2yz} \sin yz + 4x^{-2y} \cos x + 9 \sin 3z) \left(2 \left(4xy^2 + \frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= [8x^3 y^{2yz} \sin yz + 8 \cos x + 18 \sin 3z] \left(4xy^2 + \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

c. Hitung

$$P = x^{2yz} \sin yz$$

$$Q = x^{-2y} \cos x$$

$$R = \sin 3z$$

Maka

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2yz^{2yz} \sin yz, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^{2yz} \cos yz, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2yx^{2yz} \sin yz$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2x^{-2y} \cos x, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -x^{-2y} \sin x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3 \cos 3z$$

$$\begin{aligned}
 (F^2 \circ F)' &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F^1}{\partial t} & \frac{\partial F^1}{\partial s} & \frac{\partial F^1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F^2}{\partial t} & \frac{\partial F^2}{\partial s} & \frac{\partial F^2}{\partial \lambda} \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial s^2} \right) t + \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial t^2} \right) s + \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial t \partial s} \right) t \\
 &= \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial s^2} \right) t + \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial t^2} \right) s + \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial t \partial s} \right) t \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} (0) + \frac{1}{\lambda^2} (-e^{-3t} \sin \pi t) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F^1}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F^2}{\partial s} \right) \right) t + \\
 &\quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F^1}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F^2}{\partial t} \right) \right) s \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} (-e^{-3t} \sin \pi t) + \frac{\partial}{\partial t} (2(e^{3t} \sin \pi t)) + \frac{\partial}{\partial s} (e^{3t} \cos \pi t) t \\
 &= e^{3t} \cos \pi t + 4 e^{3t} \sin \pi t + e^{3t} \sin \pi t \\
 (F^3 \circ F)' \cdot F &= [e^{-3t} \cos \pi t + 6 e^{3t} \sin \pi t + e^{3t} \sin \pi t + 4] [e^{3t} \sin \pi t + \\
 &\quad e^{-3t} \cos \pi t + \pi \lambda t + 1] \\
 &= (e^{3t} \cos \pi t + e^{3t} \sin \pi t + 4 e^{3t} \sin \pi t) (e^{3t} \sin \pi t + \\
 &\quad e^{-3t} \cos \pi t + \pi \lambda t + 1)
 \end{aligned}$$

CONTOH 3.10

Jika $F(x, y, z) = e^{2x}(1 + e^{2y} \sin y) + \sin^2 3z$ dan $G(x, y, z) = 2xy^2z$

Tentukan

a. $(\nabla^2 F)(x, y, z)$

b. $(\nabla^2 \cdot F)(2F)$

Penyelesaian:

Diketahui $F = e^{2x}$

$$G = e^{2y} \sin y$$

$$H = \sin^2 3z$$

a. $\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (F(x, y, z) + G(x, y, z) + H(x, y, z))$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{2x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (e^{2y} \sin y) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sin^2 3z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (2x e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{2y} \cos y) + \frac{\partial}{\partial z} (\sin 6z)$$

$$= 4x^2 e^{2x} + e^{2y} \cos y + 6 \sin 6z$$

$$= 4x^2 e^{2x} + e^{2y} \cos y + 6 \sin 6z$$

$$(\nabla^2 \cdot F)(x, y, z) = (4x^2 e^{2x} + e^{2y} \cos y + 6 \sin 6z)(2xy^2z)$$

$$= 8x^3 y^2 z^2 e^{2x} + 2xy^2 z e^{2y} \cos y + 6xy^2 z \sin 6z$$

b. Maka

$$F = e^{2x}$$

$$G = e^{2y} \sin y$$

$$H = \sin^2 3z$$

Maka

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x e^{2x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2x e^{2x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = e^{2y} \sin y, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2x e^{2y} \cos y$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 2 \sin 6z$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 \times F)_i &= \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) k \\
 &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] k \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} (0) - \frac{\partial}{\partial y} (-2e^{-2x} \cos y) \right] i + \left[\frac{\partial}{\partial x} (0) - \frac{\partial}{\partial z} (2xe^{2xy}) \right] j + \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} (2) - \frac{\partial}{\partial z} (0) \right] k \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} (2e^{-2x} \cos y) i + \frac{\partial}{\partial z} (2xe^{2xy}) j \\
 &= -4e^{-2x} \cos y i + 4x^2 e^{2xy} j
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 \times F) \cdot (2^y) &= [-4e^{-2x} \cos y] + [4x^2 e^{2xy}] [2e^{2xy}] + [e^{-2x} \cos y] + \\
 &\quad + \cos^2(2x)] \\
 &= -8xe^{-2x+2xy} \cos y + 8x^3 e^{2xy+2xy} + 2e^{-2x} \cos y + 2 \\
 &= -8xe^{-2x+2xy} \cos y + 8x^3 e^{4xy+2xy} \cos y
 \end{aligned}$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuis pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

LATIHAN 1

1. Tentukan $\text{div } \vec{F}$ dan curl $\vec{F}$ dari:

a. $\vec{F}(x, y, z) = x^2yz\vec{i} + 2xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$

b. $\vec{F}(x, y, z) = e^x \cos y\vec{i} + e^x \sin y\vec{j} + z\vec{k}$

2. Tentukan ∇f dari:

a. $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz + 3z$

b. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

3. Diketahui fungsi vektor $\vec{F}(x, y, z) = 3x^2yz^2\vec{i} + 6yz^2\vec{j} + 2yz^2\vec{k}$ dan fungsi skalar $\phi(x, y, z) = 3xz^3y^2$. Tentukan:

a. curl $\vec{F}$ dan $\nabla\phi(x, y, z)$

b. $\vec{F} \times \left[\frac{\partial}{\partial y} \vec{F}(x, y, z) \right] \nabla\phi(x, y, z)$

c. $\text{Div } \text{Curl } [-\vec{F}(x, y, z)]$

4. Diketahui fungsi vektor $\vec{F}(x, y, z) = 9x^2yz^2\vec{i} + 2yz^2x^2\vec{j} + (2yz^2 + 2x^2y)\vec{k}$ dan $\vec{G}(x, y, z) = (x^2yz^2)\vec{i} + 3yz^2x^2\vec{j} + x^2\vec{k}$. Tentukan:

a. $\frac{\partial}{\partial y} [-\vec{F}(x, y, z)] \times \vec{G}(x, y, z)$

b. $\left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{F}(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} \vec{F}(x, y, z) \right]$

c. $[-\vec{F}(x, y, z)] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} \right]$

33

5. Diketahui fungsi vektor $V(x, y, z) = 2x^2 y^2 i + 5y^2 z^2 j + 2yz^2 k$ dan fungsi skalar $\phi(x, y, z) = 3xyz^2 y^2$. Tentukan!

- Cur Grad $3\phi(x, y, z)$
- $(\nabla \times \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z)) \cdot \phi(x, y, z)$
- Div Curl $(-V(x, y, z))$

6. Diketahui fungsi vektor $V(x, y, z) = 2x^2 y^2 z^2 i + 4y^2 z^2 j + (6xz^2 + 4xz) k$ dan $F(x, y, z) = 3x^2 y^2 i + 2y^2 z^2 j + 5xz^2 k$ dan fungsi skalar $\phi(x, y, z) = 4x^2 y^2 z^2$.

Tentukan

- $\frac{\partial}{\partial x} [V(x, y, z)] \times \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y, z)]$
- $(\nabla \times \frac{\partial}{\partial y} 2V(x, y, z)) \cdot \phi(x, y, z)$
- Div Curl $(V(x, y, z) + F(x, y, z))$

7. Misal $F(x, y, z) = \sqrt{3x^2 + y^2} (x + y \ln 3y) + \cos^2 2z$ dan $f(x, y, z) = 2xy^2 + \frac{1}{z}$

tentukan

- $(F^2 \times F)(1-3i)$
- $(\nabla^2 F) \times (F)$

8. Misal $F(x, y, z) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + y^2} + xy \ln 3yz + x \cos^2 2z$ dan $f(x, y, z) = \frac{1}{12} + \frac{1}{z}$

tentukan

- $(F^2 \times F)(1-3i)$
- $(\nabla^2 F) \times (F)$

BAB 4

INTEGRAL GARIS

Capaian Pembelajaran :

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk...

1. Memahami konsep Integral garis secara langsung.
2. Memahami konsep Teorema Green, ketaktergantungan lintasan.

Deskripsi:

Dalam kuliah ini mahasiswa akan mempelajari integral garis terhadap satu atau lebih lengkungan. Untuk lengkungan tertutup integral garis dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Green. Mahasiswa juga diajarkan penerapan aplikasi integral garis untuk menghitung divergensi dan sirkulasi.

4.1 Integral Garis Medan Skalar

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di suatu ruang R^n dan $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ suatu fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada C . Maka integral garis dari fungsi f pada C dari titik A ke titik B ditulis (Ash & Ash, 1998)

$$\int_C f(x) \, ds, \text{ dimana } ds = \text{elemen diferensial busur}$$

Khusus untuk $n=2$ maka $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ dan C lengkungan pada bidang

58

4.2 Definisi Integral Garis

Misalkan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B .
Misalkan $X(t)$ persamaan parameter lengkungan C dengan $t \in [a, b]$.
Jadi $X(a) = A$, $X(b) = B$.

Ambil partisi dari $[a, b]$ dan $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dengan $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Sebut $X(t_i) = A_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. $X(t_0) = A_0 = A$, $X(t_n) = A_n = B$.

Bila C terorientasi positif (arah positif terhadap pertambahan nilai t) maka partisi dari $[a, b]$ menghasilkan pembagian lengkungan C atas busur-busur kecil.

Sebut Δs_i adalah panjang busur $A_{i-1}A_i$ dari P adalah maksimal $\Delta s_i = t_i - t_{i-1}$.

Sekarang ambil titik-titik X_i pada busur $A_{i-1}A_i$ dan bentuk jumlah Riemann (Goodwille, 1991)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(X_i) \Delta s_i \quad (\text{jika ada}) = \int_C f(x) ds$$

4.3 Menghitung Integral Garis $\int_C f(x) ds$

Untuk $n = 2$. Jika $f = f(x, y)$ dan C lengkungan mulus dengan persamaan parameter $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$

Maka

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

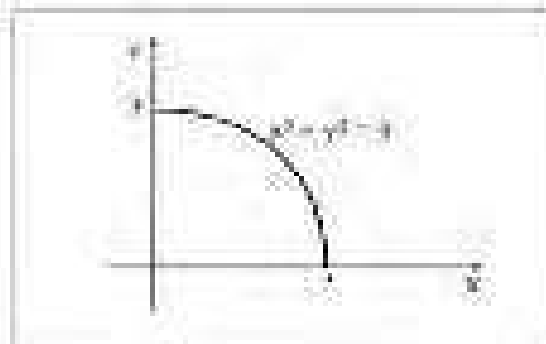
Untuk $n = 3$. Jika $f = f(x, y, z)$ dan C lengkungan mulus di $\mathbb{R}^3$ dengan persamaan parameter $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ maka

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

CONTOH 4.1

Hitung $\int_C x^2 y \, ds$ jika C busur lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama.

Penyelesaian:



Gambar 4.1 Busur $x^2 + y^2 = 9$ di kuadran pertama

Persamaan parameter C :

$$\begin{aligned}
 \int_C x^2 y \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t)^2 (3 \sin t) \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27 \cos^2 t \sin t \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27 \cos^2 t \sin t (3) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81 \cos^2 t \sin t \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81 \cos^2 t \, d(-\cos t) \\
 &= -81 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, d(\cos t) \\
 &= -27 \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

CONTOH 4.2

Hitung $\int_C (2x + 3z) \, ds$ jika C lengkungan $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dan $0 \leq t \leq 1$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int_C (2x + 3z) \, ds &= \int_0^1 (2t + 3t^3) \cdot \sqrt{1 + (2t)^2 + (3t^2)^2} \, dt \\ &= \int_0^1 (2t + 3t^3) \cdot \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \, dt \\ &= \int_0^1 (2t + 3t^3) \cdot \sqrt{(3t^2 + \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{9}} \, dt \end{aligned}$$

Substitusikan ke-3: dalam integral $T = \int (2t + 3t^3) \cdot \sqrt{(3t^2 + \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{9}} \, dt$

Substitusi $u^2 = 3t^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{5} \tan \theta$

maka $u^2 = \frac{1}{3} \sqrt{5} \tan \theta = \frac{2}{3}$

$2t \, dt = \frac{1}{3} \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$

dan $9t^2 \, dt = 9t^2 \cdot t \, dt$
 $= (\sqrt{5} \tan \theta - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3} \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$

Jadi

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \sec^3 \theta + (\sqrt{3} \tan \theta - 2) \frac{2}{9} \sqrt{3} \sec^2 \theta \right) \sqrt{\left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \tan \theta \right)^2 + \frac{2}{9}} d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{12} \sqrt{3} \sec^3 \theta + (\sqrt{3} \tan \theta - 2) \frac{1}{9} \sqrt{3} \sec^2 \theta \right) \sqrt{3} \sec \theta d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{2}{9} \sec^3 \theta + \left(\frac{2}{3} \sqrt{3} \tan \theta \sec^2 \theta - \frac{2}{9} \sec^2 \theta \right) \right) d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{2}{9} \sqrt{3} \sec \theta \sec^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{2}{9} \sqrt{3} \tan \theta \sec \theta \sec^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{2}{9} \sqrt{3} \sec^3 \theta \right) d(\sec \theta) \\
 &= \left(\frac{2}{135} \sqrt{3} \sec^3 \theta \right) \\
 &= \frac{2}{135} \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{(3t^2 + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9}} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{2}{9} (9t^4 + 4t^2 + 1) \sqrt{3t^4 + 4t^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{3} (2t + 5t^3) \sqrt{(3t^2 + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9}} \right) dt = \frac{1}{9} (9t^4 + 4t^2 + 1) \sqrt{3t^4 + 4t^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{9} (14\sqrt{14} + 1)
 \end{aligned}$$

4.4 Integral Garis Medan Vektor

Misalkan $F(x)$ medan vektor dan C suatu lengkungan dari titik A ke titik B di $\mathbb{R}^n$, maka $\int_C F(x) dx$ dikatakan integral garis dari medan vektor F pada C dari titik A ke B .

Untuk $n = 2$, $F(x) = F(x, y) = F_1(x, y) i + F_2(x, y) j$

$$dx = dx i + dy j \text{ sehingga}$$

$$\int_C F(x) dx = \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

22

Untuk $n = 3$, $\vec{F}(\vec{x}) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$

$d\vec{x} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, sehingga

27
$$\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_C F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

Sifat-sifat integral garis sebagai berikut

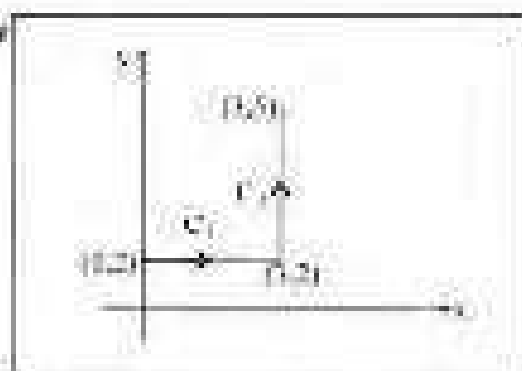
i. $\int_C (\alpha f + \beta g) \cdot d\vec{x} = \alpha \int_C f \cdot d\vec{x} + \beta \int_C g \cdot d\vec{x}$, dimana α dan β konstanta

ii. Jika $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$, maka $\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ 14

CONTOH 4.1

Tentukan integral garis $\int_C x^2 dx + xy^2 dy$ di sepanjang lintasan $C = C_1 \cup C_2$ yang menghubungkan titik $(0,2)$, $(2,2)$ dan $(3,5)$.

Penyelesaian



Gambar 4.1 Lintasan C dari titik $(0,2)$, $(2,2)$ dan $(2,5)$

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $C = C_1 \cup C_2$.

$$\int_C x^2 dx + xy^2 dy = \left[\int_{C_1} x^2 dx + xy^2 dy \right] + \left[\int_{C_2} x^2 dx + xy^2 dy \right]$$

Pada lintasan C_1 , $y = 2$ maka $dy = 0$ sehingga

$$\int_{C_1} x^2 dx + xy^2 dy = \int_0^2 x^2 dx$$

$$= 2x^2 \Big|_0 = 26$$

Pada lintasan C_2 , $x = 3$ maka $dx = 0$ sehingga

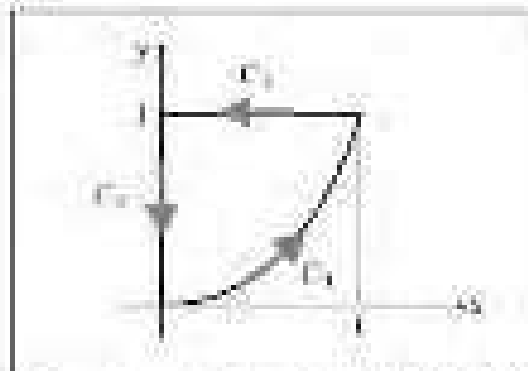
$$\begin{aligned} \int_{C_2} xy^2 dx + xy^2 dy &= \int_2^5 3y^2 dy \\ &= y^3 \Big|_2^5 \\ &= 125 - 8 \\ &= 117 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \int_C xy^2 dx + xy^2 dy = \left| \int_{C_1} xy^2 dx + xy^2 dy \right| + \left| \int_{C_2} xy^2 dx + xy^2 dy \right| \\ = 16 + 117$$

CONTOH 4.4

Tentukan $\int_C y dx + xy dy$ jika C parabola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ dan segmen garis dari titik $(1,1)$ ke $(0,1)$ kembali ke titik asal.

Penyelesaian



Gambar 4.3 C dibatasi $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, titik $(1,1)$, $(0,1)$ dan $(0,0)$

Lengkungan C terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, ditulis $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Maka

$$\int_C y dx + xy dy = \int_{C_1} y dx + xy dy + \int_{C_2} y dx + xy dy + \int_{C_3} y dx + xy dy$$

Menentukan Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

Pada lintasan C_1 , $y = x^2$ maka $dy = 2x dx$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y \, dx + xy \, dy &= \int_0^1 x^2 \, dx + x(x^2)(2x \, dx) \\ &= \int_0^1 (x^2 + 2x^4) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}\end{aligned}$$

Pada lintasan C_2 , $x = 1$ maka $dx = 0$ sehingga

$$\int_{C_2} y \, dx + xy \, dy = \int_1^0 0 \, dx + 1 = -1$$

Pada lintasan C_3 , $x = 0$ maka $dx = 0$

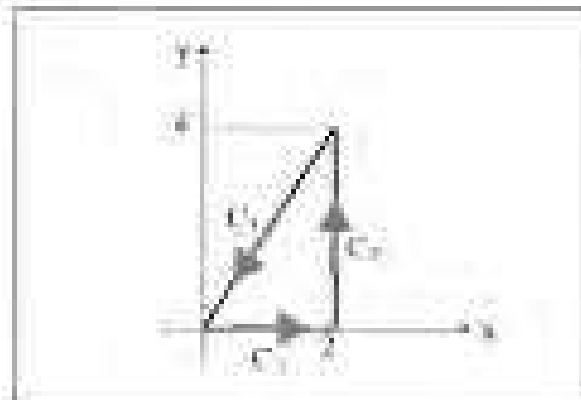
$$\text{sehingga} \quad \int_{C_3} y \, dx + xy \, dy = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi} \quad \int_C y \, dx + xy \, dy &= \int_{C_1} y \, dx + xy \, dy + \int_{C_2} y \, dx + xy \, dy + \int_{C_3} y \, dx + xy \, dy \\ &= \frac{11}{15} - 1 = -\frac{4}{15}\end{aligned}$$

CONTOH 4.5

Tentukan $\int_C 2xy^2 \, dx - 3xz \, dy$ jika C dibatasi oleh $y = 2x$, $y = 0$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:



Gambar 4.4 Lintasan C dibatasi $y = 2x$, $y = 0$ dan $x = 2$

Lintasan $\mathcal{C}$ terdiri dari gabungan beberapa lengkungan, dapat ditulis $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$.

$$\text{Maka } \int_{\mathcal{C}} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy =$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy + \int_{\mathcal{C}_2} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy + \int_{\mathcal{C}_3} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy$$

Pada lintasan $\mathcal{C}_1$, $y = 0$ maka $dy = 0$

sehingga

$$\int_{\mathcal{C}_1} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy = 0$$

Pada lintasan $\mathcal{C}_2$, $x = 2$ maka $dx = 0$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy &= - \int_0^2 6y \, dy \\ &= -3y^2 \Big|_0^2 = -12 \end{aligned}$$

Pada lintasan $\mathcal{C}_3$, $y = 2x$ maka $dy = 2 \, dx$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy &= \int_0^2 2x(2x)^2 \, dx + 3x(2x)(2 \, dx) \\ &= \int_0^2 8x^3 \, dx + 12x^2 \, dx \\ &= \int_0^2 (8x^3 + 12x^2) \, dx \\ &= (2x^4 + 4x^3) \Big|_0^2 \\ &= 0 + (32 - 0) = 32 \end{aligned}$$

Jadi $\int_{\mathcal{C}} y \, dx + xy \, dy$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{C}_1} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy + \int_{\mathcal{C}_2} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy + \int_{\mathcal{C}_3} 2xy^2 \, dx + 3xy \, dy \\ &= -12 \end{aligned}$$

4.5 Aplikasi Integral Garis

Integral Garis dapat diaplikasikan untuk menentukan massa, momen massa dan titik pusat massa jika rapat massa di setiap titik diketahui.

a. Pada ruang $\mathbb{R}^2$

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y)$, maka:

i. Massa $= m = \int_C \rho(x, y) \, ds$

ii. Momen massa $\bar{C}$

- terhadap sumbu x : $M_x = \int_C y \rho(x, y) \, ds$

- terhadap sumbu y : $M_y = \int_C x \rho(x, y) \, ds$

iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m})$

b. Pada ruang $\mathbb{R}^3$

Jika rapat massa $\rho = \rho(x, y, z)$, maka:

i. Massa $= m = \int_C \rho(x, y, z) \, ds$

ii. Momen massa $\bar{C}$

- terhadap bidang xy : $M_{xy} = \int_C z \rho(x, y, z) \, ds$

- terhadap bidang yz : $M_{yz} = \int_C x \rho(x, y, z) \, ds$

- terhadap bidang xz : $M_{xz} = \int_C y \rho(x, y, z) \, ds$

iii. Titik pusat massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m})$

CONTOH 4.6

Tentukan massa dan titik pusat massa dari kawat dengan persamaan parameter $x = 2 \sin t$, $y = 3 \cos t$, $z = t$, $0 \leq t \leq \pi$, dengan rapat massa kz .

Penyelesaian:

• Massa kawat

$$\begin{aligned}
 m &= \int_C \rho \, dS = \int_0^\pi kz \, dS \\
 &= \int_0^\pi kz \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt \\
 &= k \int_0^\pi 4t \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (-3 \cos t)^2 + 1} \, dt \\
 &= 4k \int_0^\pi t \sqrt{(4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t) + 1} \, dt \\
 &= 4k \int_0^\pi t \sqrt{9 + 16t^2} \, dt \\
 &= 29k \int_0^\pi t \, dt \\
 &= 10k \pi^2 = 10k \pi^2
 \end{aligned}$$

• Momen massa terhadap bidang xy

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \int_C \rho \cdot x \, dS = \int_0^\pi kz \cdot x \, dS = \int_0^\pi kz \cdot x \, dS \\
 &= k \int_0^\pi (4t \sin t) \cdot 5 \, dt \\
 &= 80k \int_0^\pi t \sin t \, dt \\
 &= \frac{16}{5} k \pi^2 \\
 &= \frac{16}{5} k \pi^2
 \end{aligned}$$

• Momen massa terhadap bidang xz

$$\begin{aligned}
 M_{xz} &= \int_C \rho \cdot y \, dS = \int_0^\pi kz \cdot y \, dS = \\
 &= k \int_0^\pi (4t)(3 \cos t) \cdot 5 \, dt \\
 &= 60k \int_0^\pi t \cos t \, dt \\
 &= 60k \int_0^\pi t \, d(-\cos t) \\
 &= -50k \int_0^\pi t \, d(\cos t) \quad (\text{Gunakan Integral Parsial})
 \end{aligned}$$

$$= 60k \left(t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \right)$$

$$= 60k \left(\pi \cos \pi - \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 60k \left(-\pi \right)$$

$$= -60k\pi$$

- Momen massa terhadap bidang yz

$$M_{yz} = \int_S \rho x \, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} kx x \, dS =$$

$$= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4t)(2 \cos t) 5 \, dt$$

$$= 60k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t)(\cos t) \, dt$$

$$= 60k \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, d(\sin t) \quad \text{(Gunakan Integral Parsial)}$$

$$= 60k \left(t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt \right)$$

$$= 60k \left(\pi \sin \pi + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 60k (0-2)$$

$$= -120k$$

$$y = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{-60k\pi}{100k\pi^2} = -\frac{\pi}{5}$$

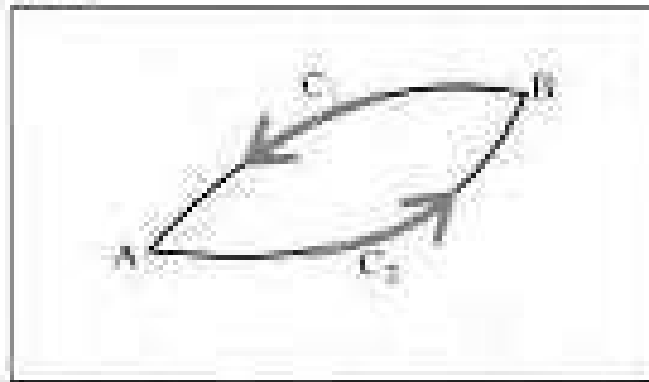
$$x = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{-120k}{100k\pi^2} = -\frac{3}{\pi^2}\pi$$

- Titik pusat massa $\left(-\frac{3\pi}{\pi^2}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3} \right)$

4.6. Ketaktergantungan Lintasan (Bebas Lintasan)

Definisi :

Untuk setiap lengkungan C dari titik A ke B nilai $\int_C P(x) dx$ tetap harganya maka $\int_C P(x) dx$ dikatakan tidak tergantung lintasan dari A ke B .

Gambar 4.5 Lintasan dari titik A ke titik B

Dalam kasus ini $\int_{C_1} P(x) dx = \int_{C_2} P(x) dx$.

Artinya $\int_C P(x) dx$ tidak tergantung lintasan dari titik A ke B melalui C_1 atau C_2 .

Syarat yang harus dipenuhi $\int_C P(x) dx$ tidak tergantung lintasan dari A akan ditunjukkan oleh Teorema berikut.

Teorema 1 :

Jika C lengkungan lici dari titik A ke B . Fungsi $f(x)$ terdefinisi dan kontinu pada daerah terbuka yang memuat C , maka :

$$\int_C \nabla f(x) dx = f(B) - f(A)$$

Teorema 2 :

Jika $\vec{F}(x)$ medan vektor yang kontinu pada daerah terbuka D dan tersambung sederhana. Misalkan A dan B dua titik di D . Maka $\int_C \vec{F}(x) dx$ tidak tergantung lintasan dari A ke B jika dan hanya jika terdapat medan skalar f sehingga $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$ dan f disebut medan konservatif.

Latihan 13 menunjukkan F konservatif:

1. Jika $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ maka F konservatif jika memenuhi $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
2. Jika $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ maka F konservatif jika $\text{curl } F = 0$ atau $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

Langkah-langkah untuk menunjukkan ketaktergantungan lintasan dari titik A ke B adalah sebagai berikut:

1. Tunjukkan F konservatif.
2. Tentukan f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$.
3. $\int_C F(x) dx = f(B) - f(A)$

CONTOH 4.7

Jika $F(x,y) = 2xyi + (x^2 + 4y^3)j$ adalah medan vektor. Tentukan:

- a. Apakah F konservatif
- b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $F(x) = \nabla f(x)$
- c. Hitung $\int_C F dx$ dari titik $A = (1,4)$ ke titik $B = (2,6)$

Penyelesaian:

- a. Dari medan vektor F , diperoleh

$$M(x,y) = 2xy \text{ dan } N(x,y) = x^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ maka F adalah konservatif

- b. Karena $F = \nabla f$

$$M i + N j = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

$$\text{Sehingga diperoleh } \frac{\partial f}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$\text{Jadi } \frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy$$

$$\text{maka } f(x,y) = x^2y + h(y)$$

Sebelumnya akan di cari $P(y)$

$$\text{dari } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 + P'(y) = x^2 - 4y^2$$

$$\text{maka } P'(y) = -4y^2$$

$$\text{sehingga } P(y) = y^3 + C$$

$$\text{jadi } f(x, y) = x^2y + y^3 + C$$

$$\leftarrow \int_C P(x) dx = f(B) - f(A) = [x^2y + y^3]_{(1,0)}^{(5,2)} = 296$$

Contoh 4.8

23. Jika $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{y}{x^2}\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j} + 2xz\vec{k}$ adalah medan vektor. Tentukan

22. Apakah $\vec{F}$ konservatif
- Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$
- Hitung $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dari titik $A = (1, 1, 1)$ ke titik $B = (2, 2, 2)$

Penyelesaian:

- Dari medan vektor $\vec{F}$, diketahui :

$$\text{maka } P = -\frac{y}{x^2}, Q = \frac{1}{x}, R = 2xz$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{maka } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad \text{maka } \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \text{maka } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\text{Karena } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\text{maka } \text{Curl } \vec{F} = 0$$

sehingga $\vec{F}$ adalah konservatif

b. Karena $E = \nabla f$

$$P) + Q)y + R)z = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\text{di peroleh } \frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

Untuk menentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = -\frac{2}{x^2}$$

$$\text{maka } f(x, y, z) = \frac{2}{x} + h(y, z)$$

Selanjutnya akan dicari $h'(y, z)$

$$\text{dan } \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

$$\frac{2}{x} + h'(y, z) = \frac{2}{x}$$

$$\text{maka } h'(y, z) = 0$$

$$\text{sehingga } h(y, z) = G(z) + C_1$$

$$f(x, y, z) = \frac{2}{x} + G(z) + C_1$$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

$$\text{dan } \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

$$G(z) = 2z$$

$$\text{maka } h(z) = z^2 + C_1$$

$$\text{jadi } f(x, y, z) = \frac{2}{x} + z^2 + C_1 + C_2$$

$$\text{c. } \int_C f(x) dx = f(9) - f(4) =$$

$$= \left[\frac{2}{x} + x^2 \right]_{(4,1,1)}^{(9,2,2)} = 4$$

CONTOH 4.8

8

Jika $F(x, y, z) = 2xyz^2 \mathbf{i} + (x^2z^2 + 2y)\mathbf{j} + 2x^2y \mathbf{k}$ adalah medan vektor

Tentukan $\int_C F \, d\mathbf{r}$ jika C lengkungan linier dari titik $A = (2, 0, 1)$ ke titik $B = (0, -1, 1)$

Penglesaian:

a. Dari medan vektor F , diketahui

$$P = 2xyz^2$$

$$Q = x^2z^2 + 2y$$

$$R = 2x^2yz$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2xz^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2x^2z, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2z \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2z$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz$$

$$\text{Kerna} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\text{sehingga} \operatorname{Curl} F = 0$$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$(P, Q, R) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xyz^2$$

$$\text{maka } f(x, y, z) = x^2yz^2 + h(y, z)$$

Selanjutnya akan dicari $h(y, z)$

$$\text{dari } \frac{\partial f}{\partial x} = Q$$

$$\text{46} \quad \text{maka } f'(x, z) = x^2 z^2 + 2y$$

$$\text{maka } f'(x, z) = 2y$$

$$\text{sehingga } f(x, z) = \frac{1}{2} y^2 + g(y)$$

$$f(x, y, z) = f(x, y, 0) + f'(x, y) \cdot z = \frac{1}{2} y^2 + g(y)$$

Selanjutnya akan dicari $g(y)$

$$\text{dari } \frac{\partial f}{\partial y} = R$$

$$2xy + g'(y) = 2x^2 y + 2$$

$$g'(y) = 2$$

$$\text{maka } g(y) = 2y$$

$$\text{Jadi } f(x, y, z) = x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^2 + 2y$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int_C f(x) \, dx &= f(B) - f(A) \\ &= (x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^2) \Big|_{(1,1)}^{(2,1)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

CONTOH 4.10

24

Tunjukkan $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tak tergantung lintasan jika $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy^2z + \frac{2}{3}z^3)\mathbf{i}$

+ $(4x^2yz + 4x + 5)\mathbf{j}$ + $(2x^2y^2 + 3xz + 4y)\mathbf{k}$ adalah medan vektor.

Penglesaian:

Pemecahan soal ini harus melalui 2 tahap, pertama tunjukkan $\mathbf{F}$ medan vektor konservatif dan tahap kedua tentukan fungsi $f(x, y, z)$

$$P = 4xy^2z + \frac{2}{3}z^3$$

$$Q = 4x^2yz + 4x + 5$$

$$R = 2x^2y^2 + 3xz + 4y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 8xyz, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$$

$$\text{maka } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xyz$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^2y + 4, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^2y + 4 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^2y + 4$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 4xy^2 + 3z, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 4xy^2 + 3z \quad \text{maka} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y} = 4xy^2 + 3z$$

$$\text{Karena } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial y}$$

atau $\text{Curl } F = 0$

sehingga F adalah medan vektor konservatif

b. Karena $F = \nabla f$

$$P(x, y, z) = F_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = F_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = F_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R$

Akan ditentukan fungsi f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 4xy^2z + \frac{3}{2}xz^2$$

$$\text{maka } f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{4}xz^2 + h(y, z)$$

Selanjutnya akan dicari $h(y, z)$

$$\text{dari} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

$$4x^2yz + h'(y, z) = 4x^2yz + 4z + 5$$

$$\text{maka } h'(y, z) = 4z + 5$$

$$\text{sehingga } h(y, z) = 4yz + 5y + G(z)$$

maka

$$f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{4}xz^2 + 4yz + 5y + G(z)$$

Selanjutnya akan dicari $G(z)$

$$\text{dari} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

$$2x^2y^2 + 3y + 4y + G'(z) = 2x^2y^2 + 3y + 4y$$

$$G'(z) = 0$$

$$\text{maka } G(z) = 0$$

$$\text{jadi } f(x, y, z) = 2x^2y^2z + \frac{3}{4}xz^2 + 4yz + 5y + 0$$

Maka memiliki $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ tak bergantung lintasan

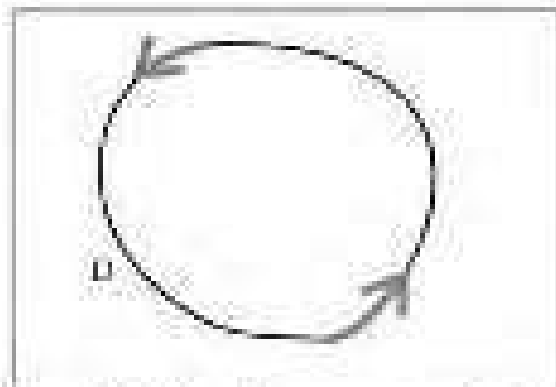
4.7 Teorema Green pada Bidang

Teorema Green :

Jika Γ lengkungan tertutup sederhana yang merupakan batas daerah D , dan vektor $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ suatu medan vektor. Jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ kontinu dan mempunyai turunan parsial pada D dan Γ . Maka :

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$\text{atau} \quad \oint_{\Gamma} M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$



Gambar 4.6 D lengkungan tertutup C

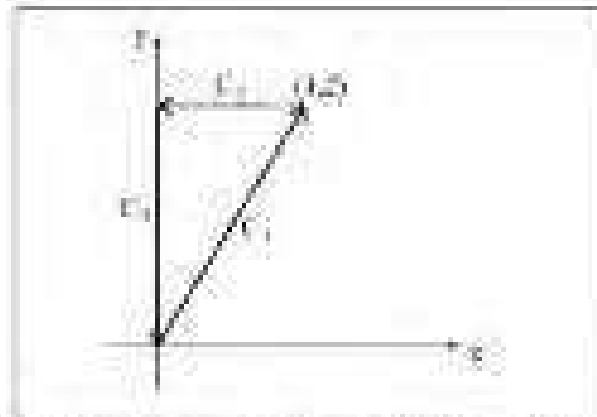
Note : arah positif C adalah berlawanan arah jarum jam.

CONTOH 4.11

Misalkan C dibatasi oleh rusuk-rusuk dan segitiga yang titik sudutnya adalah $(0,0)$, $(1,2)$ dan $(0,2)$. Hitung $\oint_C 4x^2y \, dx + 2y \, dy$ dengan menggunakan :

- Cara langsung
- Teorema Green

Penyelesaian:



Gambar 4.3. Lintasan Γ , dibatasi oleh $\{0,0\}$, $\{1,2\}$ dan $\{0,2\}$.

a. Cara langsung

$$\Gamma = C_1 + C_2 + C_3$$

Pada C_1 diperoleh $y = 2x$ maka $dy = 2dx$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int_{C_1} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \int_0^1 (8x^3 + 8x) \, dx \\ &= [2x^4 + 4x^2]_0^1 = 6 \end{aligned}$$

Pada C_2 diperoleh $y = 2$ maka $dy = 0$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int_{C_2} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \int_1^0 8x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{8}{3} x^3 \right]_1^0 = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Pada C_3 diperoleh $x = 0$ maka $dx = 0$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int_{C_3} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy &= \int_2^0 2y \, dy \\ &= [y^2]_2^0 = -4 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \int_{\Gamma} 4x^2 y \, dx + 2y \, dy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$$

b. Dengan menggunakan Teorema Green

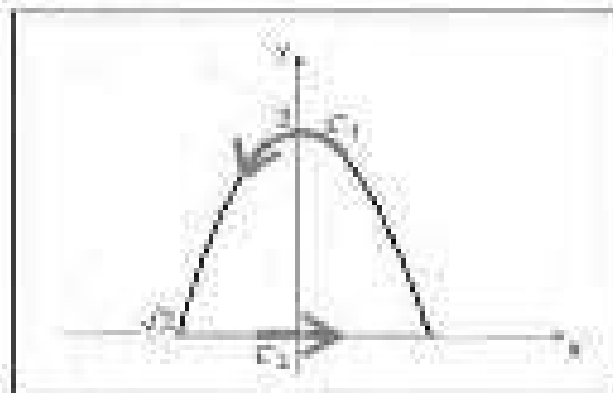
$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA \\ \oint_C (4x^2y \, dx + 2xy \, dy) &= \iint_R (0 - 4x^2) dA \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 -4x^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 -4x^2 (2 - 0) \, dx \\ &= \int_0^1 (-8x^2 + 0x^2) \, dx \\ &= \left[-\frac{8}{3}x^3 + 0x^3 \right]_0^1 \\ &= -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

CONTOH 4.12

Buktikan kebenaran Teorema Green jika diketahui medan vektor $\mathbf{F} = (x^2y, -3x)$ yang bekerja pada lintasan C yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan sumbu x .

Penglesaian:

Membuktikan kebenaran Teorema Green yaitu dengan cara membuktikan hasil dengan cara langsung sama dengan hasil menggunakan Teorema Green.



Gambar 4.11 Lintasan C dibatasi $y = 2 - x^2$ dan sumbu x .

a. Cara Langsung

$$C = C_1 + C_2$$

Pada C_1 persamaan $y = 2 - x^2$ maka $dy = -2x dx$

sehingga $\int_{C_1} x^2 y dx + 3x dy =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 x^2 (2 - x^2) dx + 3x (-2x) dx \\ &= \int_0^2 (2x^2 - x^4) - 6x^2 dx \\ &= \int_0^2 (2x^2 - x^4 - 6x^2) dx \\ &= \int_0^2 (-4x^2 - x^4) dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ &= -\frac{128}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pada C_2 disyarat $x = 0$ maka $dx = 0$

sehingga $\int_{C_2} x^2 y dx + 3x dy = 0$

Jadi $\int_C x^2 y dx + 3x dy = -\frac{128}{15} \sqrt{2}$

b. Teorema Green

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_C x^2 y dx + 3x dy = \iint_D (3 - x^2) dA$$

Karena simetri D di kuadran I (D_1) dan di kuadran II (D_2) maka $D = 2D_1$

$$\begin{aligned} &= 2 \iint_{D_1} (3 - x^2) dA \\ &= 2 \int_0^2 \int_0^{2-x^2} (3 - x^2) dy dx \\ &= 2 \int_0^2 (3 - x^2) y \Big|_0^{2-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^2 (3 - x^2) (2 - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^2 (6 - 5x^2 + x^4) dx \\ &= 2 \left(6x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^2 \\ &= -\frac{128}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Hasil secara langsung sama dengan hasil Teorema Green, maka kebenaran Teorema Green terbukti.

4.8. Fluks dan Sirkulasi

4.8.1. Fluks F melalui C

Misalkan C lengkungan lain yang tertutup dan sederhana dengan orientasi berlawanan dengan arah jarum jam. Misalkan C mempunyai persamaan parameter:

$x = x(s)$ dan $y = y(s)$, s parameter panjang busur.

Maka vektor garis singgung satuan $\hat{T}$ adalah

$$\hat{T} = \frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j}$$

dan vektor normal satuan $\hat{n}$ yang arahnya keluar dari daerah D yang dibatasi C adalah

$$\hat{n} = \frac{dy}{ds} \hat{i} - \frac{dx}{ds} \hat{j}$$

Jika $F(x, y) = M(x, y) \hat{i} + N(x, y) \hat{j}$ suatu medan vector.

Maka untuk menghitung fluks F melalui C yaitu banyaknya fluks (zat cair) yang meninggalkan D . Menghitung fluks $\oint_C F \cdot \hat{n} \, dS$ dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot \hat{n} \, dS &= \oint_C (M \hat{i} + N \hat{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds} \hat{i} - \frac{dx}{ds} \hat{j} \right) ds \\ &= \oint_C \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \oint_C \left(M \frac{dy}{dx} - N \right) dx \end{aligned}$$

Karena $d\vec{r} = \vec{T} \, ds$

$$\oint_C F \cdot d\vec{r} = \oint_C M \, dx - \oint_C N \, dy = \oint_C \left(M \frac{dx}{ds} - N \frac{dy}{ds} \right) ds$$

4.8.2 Sirkulasi F melalui C

32

Misalkan $P(x, y, z) = M(x, y) + N(x, y) + 0$, dimana komponen z dari P adalah nol (0). Sirkulasi F kecenderungan fluida untuk berputar pada titik (x_0, y_0) . Jika $\text{curl } F = 0$ pada D , maka aliran fluida dikatakan tidak dapat berputar.

25

Untuk menentukan sirkulasi F melalui C dapat menggunakan Teorema Stokes.

Teorema Stokes untuk bidang

Sirkulasi F melalui C adalah

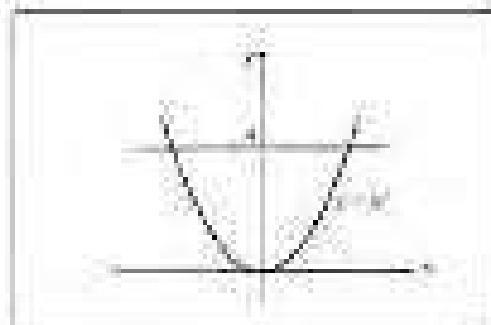
$$\oint_C F \cdot T \, ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

CONTOH 4.13

Dik: $F = 49$ $3xy \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j}$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$. Hitunglah

- Fuks F melalui C
- Sirkulasi F sepanjang C

Penyelesaian:



Gambar 4.9 Lintasan C dibatasi $y = x^2$ dan $y = 4$.

27

- a. Perpotongan $y = x^2$ dan $y = 4$
diperoleh $x = \pm 2$ sehingga $z = \pm 2$

$R = 2\pi$ maka

$R = 2\pi$ maka

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss,
maka Fluks melalui E adalah

38

$$\begin{aligned}\oint_E \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_V 2x \, dV \\ &= \iiint_V 2x \, dy \, dz \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 2x \, dy \, dz \, dx \\ &= 2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 x \, dy \, dz \, dx \\ &= 2 \int_{-2}^2 x \, dx \\ &= 2 \int_{-2}^2 [1x + x^2] \, dx \\ &= 2 \left(16x + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3} \text{ satuan kubik}\end{aligned}$$

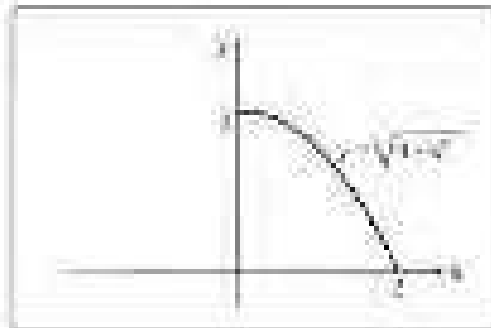
- b. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x$

$$\begin{aligned}\text{Sirkulasi} &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C M \, dx + N \, dy \\ &= \oint_C \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_C (2x - 3x) dA \\ &= \oint_C (-3x) dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 -3x \, dy \, dx \\ &= -3 \int_0^1 \int_{-2}^2 x \, dy \, dx \\ &= -6 \int_0^1 [xy]_{-2}^2 \, dx \\ &= -6 \int_0^1 x(4 - x^2) \, dx \\ &= -6 \int_0^1 (4x - x^3) \, dx \\ &= -6 \left(2x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = -\frac{30}{2}\end{aligned}$$

CONTOH 4.14

Jika $F = 2x\mathbf{i} + 4(xy)\mathbf{j}$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4-x^2}$ di kuadran pertama. Tentukanlah:

- Fluks F melalui C .
 - Sirkulasi F sepanjang C .
- Penyelesaian:



Gambar 4.10 Lintasan C dibatasi $y = \sqrt{4-x^2}$ di kuadran I

- $M = x^2$ maka $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$
 $N = 4(xy)$ maka $\frac{\partial N}{\partial y} = 4x$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss, maka
 Fluks F melalui C adalah

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_D \operatorname{div} F \, dA = \iint_D (2x + 4x) \, dA \\
 &= \iint_D (6x) \, dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (6x + 4) \, dy \, dx \\
 &= 2 \int_0^2 (2x + 4) \sqrt{4-x^2} \, dx \\
 &= 2 \int_0^2 (2x\sqrt{4-x^2} + 4\sqrt{4-x^2}) \, dx
 \end{aligned}$$

Selesaikan terlebih dahulu masing-masing integral

$\int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2}) dx$ gunakan metode substitusi $u = 1 - x^2$, $du = -2x dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2}) dx &= \int \sqrt{u} (-du) \\ &= -\int \sqrt{u} (du) \\ &= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} (1-1^2)^{\frac{3}{2}} - (1-0^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} (0-1) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sqrt{4-x^2}) dx$ gunakan substitusi $x = 2 \sin \theta$, maka $dx = 2 \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sqrt{4-x^2}) dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{4-4\sin^2 \theta}) 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta 2 \cos \theta d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right) d\theta \\ &= 16 \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta\right) \\ &= 16 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta\right) \\ &= 8 \left(\frac{\pi}{2} + \sin \theta \cos \theta\right) \\ &= 8 \left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \left(\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-1}}{2}\right) \\ &= 8 \left[\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\right] = 4\pi\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}2 \int_0^1 (2x\sqrt{4-x^2}) + 4\sqrt{4-x^2} dx &= 2 \left[\int_0^1 (2x\sqrt{4-x^2}) dx + \int_0^1 (4\sqrt{4-x^2}) dx \right] \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + 4\pi \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} + 8\pi\end{aligned}$$

$$\text{Jadi Hasil } \int_0^1 2\pi r^2 dr = \frac{\pi}{3} + 8\pi$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \frac{\partial M}{\partial x} &= -4, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \\
 \text{Sehingga} &= \oint_C (-4) dx = \int_0^1 (-4) dx + \int_1^2 (-4) dy \\
 &= \int_0^1 (-4) dx + \int_1^2 (-4) dy \\
 &= -4 \int_0^1 dx \\
 &= -16x
 \end{aligned}$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kurz pada akhir pertemuan dan tugas mandiri yang dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.

Latihan 4

1. Tentukan $\int_C y \, dx + x \, dy$, jika C segmen-segmen garis dari titik $(0, 1)$ ke $(4, 1)$ dan dilanjutkan ke $(4, 3)$.
2. Tentukan $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, jika $\vec{F}(x, y) = y^2 \, \vec{i} + 2x \, \vec{j}$ dan C lengkung $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
3. Tentukan $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, jika $\vec{F}(x, y, z) = (y + z) \, \vec{i} + (2x + y - 2z) \, \vec{j} + 4yz \, \vec{k}$ dan C segmen garis dari titik $(1, 2, 1)$ ke $(2, 1, 0)$.
4. Jika $\vec{F}(x, y) = (12x^2 + 2y^2 + 6y) \, \vec{i} + (6xy + 6x^2) \, \vec{j}$ adalah medan vektor. Tentukan:
 - a. Apakah F konservatif
 - b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$
 - c. Hitung $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dari titik $A = (1, 2)$ ke titik $B = (-1, 0)$
5. Jika $\vec{F}(x, y, z) = 3x^2 \, \vec{i} + 6y^2 \, \vec{j} + 9z^2 \, \vec{k}$ adalah medan vektor. Tentukan:
 - a. Apakah F konservatif
 - b. Jika ya, tentukan fungsi f sehingga $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$
 - c. Hitung $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dari titik $A = (2, 2, 1)$ ke titik $B = (0, 0, 2)$

6. Hitunglah $\int_C (6x^2y + 2z^2) dx + 9x^2(y^2 + z^2) + (6xz + 2) dy$, dimana C lengkungan linier dari titik $(6, 2, 1)$ ke $(-1, 1, 2)$.
7. Diberikan $F(x, y, z) = (yx^2 + y^2 + 2z) i + (xz^2 + 2xy) j + 2yxk$ adalah medan vektor.
 - a. Tunjukkan bahwa $\int_C F dX$ tak bergantung dari lintasan C dari titik A ke titik B .
 - b. Tentukan $\int_C F dX$ jika lengkungan linier dari titik $A = (1, 0, 1)$ ke titik $B = (2, 1, 2)$.
8. Jika $F = (x + y^2 + z^2) i + 2xy j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$, $y = x$ dan sumbu y di kuadran I. Hitunglah:
 - a. Fluks F melalui C
 - b. Sirkulasi F sepanjang C
9. Jika $F = 2xz^2 i + 3x^2 y j$ adalah medan vektor. Misalkan C lengkungan yang dibatasi oleh $(x - 2)^2 + y = 4$, $y = x$ di kuadran I. Hitunglah:
 - a. Fluks F melalui C
 - b. Sirkulasi F sepanjang C
10. Hitunglah $\int_C (x^2 + 2y) dx + (x^2 + 2xy) dy$, dimana C empat persegi panjang dengan titik-titik $(2, 1)$, $(6, 1)$, $(6, 4)$ dan $(2, 4)$ dengan menggunakan:
 - a. Cara langsung
 - b. Teorema Green
11. Hitunglah $\int_C \frac{1}{x^2 + y^2} dx + \frac{1}{x^2 + y^2} dy$ jika C bagian atas lingkaran satuan yang dimulai dari titik $(1, 0)$ dan sampai dengan $(-1, 0)$.
12. Tentukan pusat massa dari kawat yang berbentuk setengah lingkaran atas $x^2 + y^2 = 9$.

13. Periksa apakah $\int_C (y^2 + 2xy) dx + (x^2 + 2xy) dy$ tak tergantung lintasan dari C , dimana C lengkungan linier dari titik $(-1, 2)$ ke $(2, 1)$.
14. Periksa apakah $\int_C (e^x \sin y) dx + (e^x \cos y) dy$ tak tergantung lintasan dari C , dimana C lengkungan linier dari titik $(0, 0)$ ke $(1, 1)$.

BAB 5

INTEGRAL PERMUKAAN

Capaian Pembelajaran

Bab ini membantu mahasiswa agar mampu untuk :

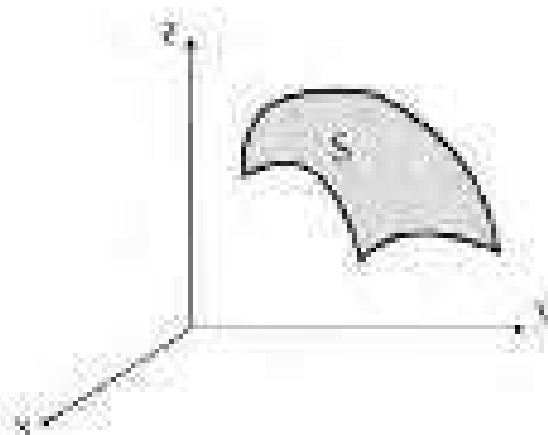
1. Memahami konsep integral permukaan
2. Memahami penerapan aplikasi integral permukaan untuk menentukan fluks dan sirkulasi.

Deskripsi

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari integral permukaan terhadap benda pada ruang R^3 dan penerapannya menentukan fluks dan sirkulasi.

5.1 Pengertian Integral Permukaan

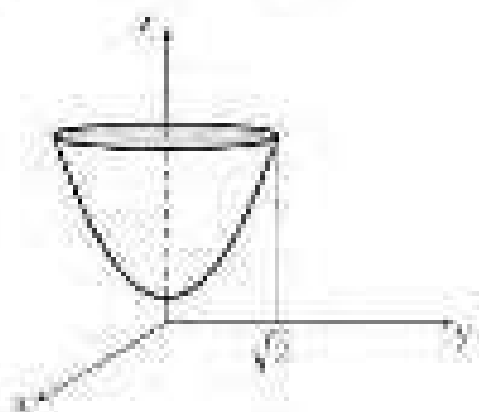
Misalkan S suatu permukaan terbatas luasnya di ruang. Misalkan $g(x, y, z)$ adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada S , maka yang dimaksud dengan integral permukaan dari fungsi g atas S adalah $\iint_S g(x, y, z) dS$. Dimana dS adalah elemen diferensial luas permukaan. (Goodwillie, 1991)



Gambar 5.1 Ilustrasi Integral Permukaan

CONTOH 5.1

Jika S permukaan paraboloida $z = 2 + x^2 + y^2$ yang terletak
 di bawah $z = 4$. Misalkan fungsi yang didefinisikan pada S adalah
 $g(x, y, z) = 2xy^2z$. Maka integral permukaan $g(x, y, z) = 2xy^2z$
 atas S adalah $\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_S 2xy^2z dS$.



Gambar 5.2 Permukaan $z = 2 + x^2 + y^2$ di bawah $z = 4$.

5.2 Tafsiran Integral Permukaan

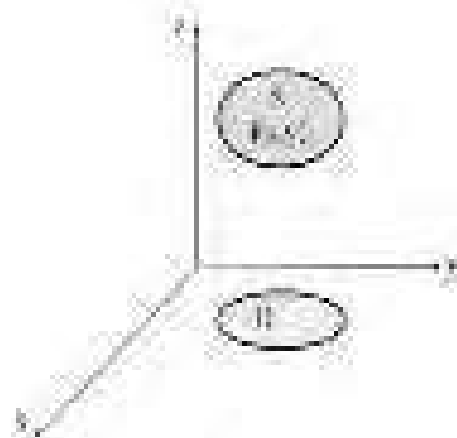
Misalkan D suatu daerah tertutup di bidang XY dan S adalah bagian dari permukaan

$z = f(x, y)$ dimana (x, y) berada dalam D pada bidang XY maka D adalah proyeksi S pada bidang XY . Jika $f(x, y)$

42 mempunyai turunan partial orde pertama yang kontinu dan $g(x, y, z) = g(x, y, f(x, y))$ juga kontinu pada D , maka (KREYSZIG, KREYSZIG, & NORMINTON, 201)

$$\text{dimana } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{dan } f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

dS adalah elemen diferensial luas permukaan

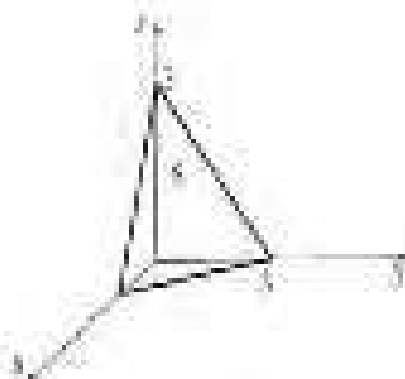


Gambar 5.3 Tafsiran Integral Permukaan

CONTOH 5.3

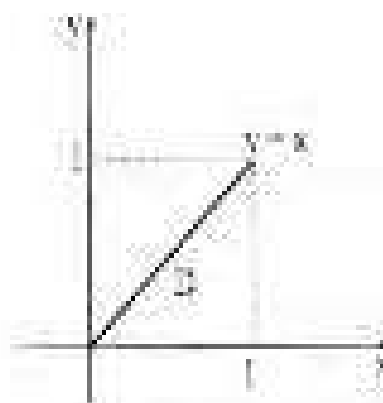
Hitung $\iint_D (xy + z) dS$ jika S permukaan $2x + y + z = 1$ yang proyeksinya pada bidang XY adalah segitiga dengan titik-titik $(0,0)$, $(1,0)$, dan $(0,1)$

Penyelesaian:



Gambar 5.4 Permukaan S dibatasi $2x + y + z = 3$ dan bidang XY

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.5 Proyeksi D diberikan $(0,0)$, $(1,0)$ dan $(1,1)$

D adalah proyeksi dan S yang dibentuk oleh titik titik $(0,0)$, $(1,0)$ dan $(1,1)$ sehingga diperoleh persamaan-persamaan: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$:

$$z = f(x, y) = 3 - 2x - y$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$$dS = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1} dA$$

Jadi

$$\begin{aligned} \iint_R (xy + z) dS &= \iint_R (xy + 3 - 2x - y) \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1} dA \\ &= \iint_R (xy + 3 - 2x - y) \sqrt{6} dA \\ &= \sqrt{6} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xy + 3 - 2x - y) dy dx \\ &= \sqrt{6} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} x y^2 + 3y - 2xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{-1}^1 dx \\ &= \sqrt{6} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + 3x - 2x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= \sqrt{6} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{3}{2} x^2 \right) dx \\ &= \sqrt{6} \left[\frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{6} x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{19}{24} \sqrt{6} \end{aligned}$$

CONTOH 3.3

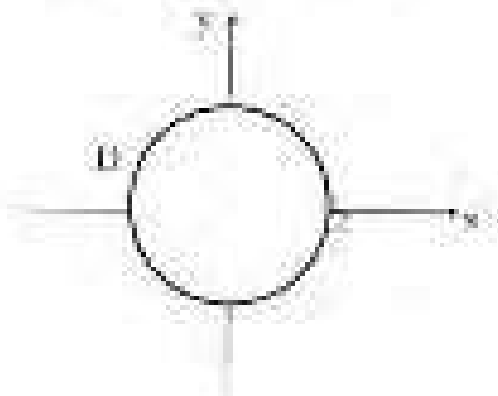
Hitung $\iint_R (xy) dS$ jika S permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak antara $z = 0$ dan $z = 2$.

Penyelesaian:



Gambar 3.6 Permukaan S dibatasi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$ dan $z = 2$

D adalah proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.7 D proyeksi S dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dA$$

Jadi

$$\begin{aligned} \iint_S (xz) \, dS &= \iint_D (x\sqrt{x^2 + y^2}) \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} \right) dA \\ &= \iint_D (x\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2} \, dA \\ &= \sqrt{2} \iint_D (x\sqrt{x^2 + y^2}) \, dA \end{aligned}$$

dengan menggunakan integral lipat dua koordinat Polar

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 (r \cos \theta) (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(r^3 \cos \theta \sin \theta \right) \Big|_{-1}^1 \, d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_{-1}^1 \cos \theta \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta \sin \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin \theta) \, d(\cos \theta) \\
 &= \frac{16}{3} \sqrt{2} \sin \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0
 \end{aligned}$$

5.3 Aplikasi Integral Permukaan

a. Luas Permukaan

Jika $\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{i}$, maka

$$\text{Luas Permukaan} = S = \iint_S dS.$$

b. Massa = m

Jika rapat massa disetiap titik (x, y, z) pada S adalah $\rho(x, y, z)$ maka Massa = $m = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS$.

c. Momen massa

- terhadap bidang yz : $M_x = \iint_S x \rho(x, y, z) \, dS$
- terhadap bidang xz : $M_y = \iint_S y \rho(x, y, z) \, dS$
- terhadap bidang xy : $M_z = \iint_S z \rho(x, y, z) \, dS$

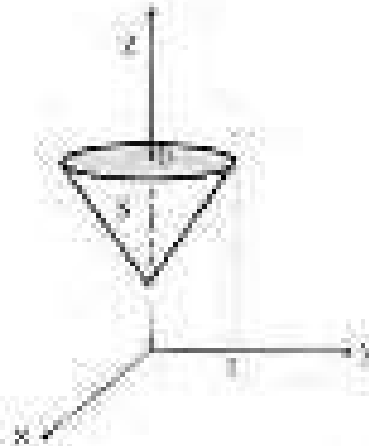
d. Titik Pusat Massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{M_z}{m}$$

CONTOH 5.4

Hitunglah luas permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak di bawah $z = 6$.

Penyelesaian:



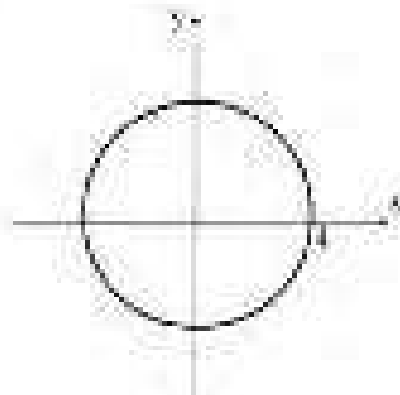
Gambar 5.8 5 bagian dan permukaan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 6$

Perpotongan $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 6$

diperoleh $2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$

maka $r = 4$.

2 Proyeksi 5 diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.9 2 adalah proyeksi 5 diatas $x^2 + y^2 = 16$

7

$$z = f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dA$$

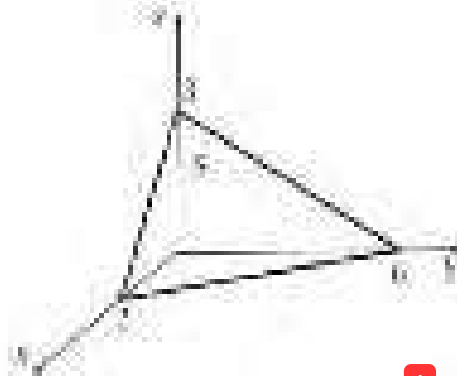
$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan } S &= \iint_D dS = \iint_D \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_D \sqrt{2} \, dA \\ &= \sqrt{2} \iint_D dA \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^4 r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^4 d\theta \\ &= 8\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 8\sqrt{2} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 16\sqrt{2}\pi \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

CONTOH 5.5

1

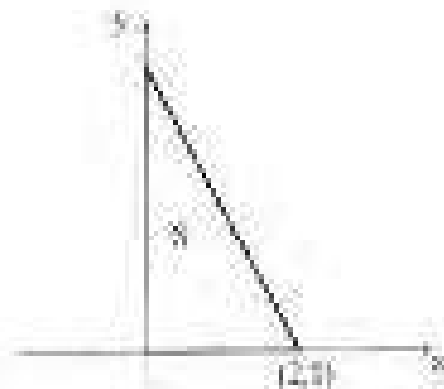
Hitunglah luas permukaan jika S dibatasi oleh $3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$.

Penyelesaian:



Gambar 5.10 Sisi bagian permukaan $3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$.

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.11 D adalah proyeksi S yang dibatasi titik (2,0) dan (0,6)

Persamaan garis yang melalui titik (2,0) dan (0,6) adalah $y = -3x + 6$

Dari permukaan $3x + y + 2z = 6$ maka $z = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x$

Jadi $z = f(x, y) = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x$

Maka $f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2}$, $f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

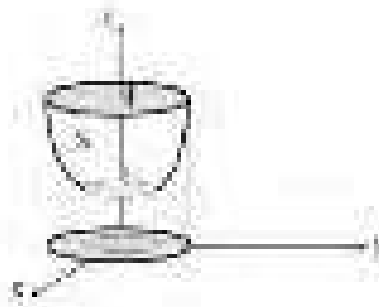
$$\begin{aligned} \text{Luas Permukaan} &= S = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{14}{2}} dA \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \iint_R dA \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} dy dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^1 y \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \int_{x=0}^1 (-5x + 6) dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \left(-\frac{5}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_{x=0}^1 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \left(-\frac{5}{2}(1)^2 + 6(1) \right) \\ &= 3\sqrt{14} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

CONTOH 5.6

12

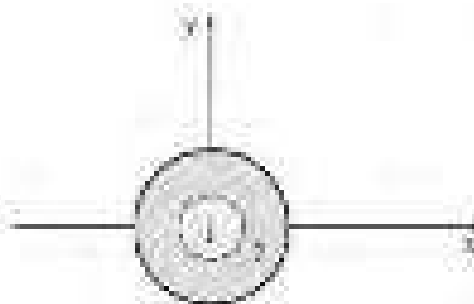
Jika S bagian dari permukaan $z = x^2 + y^2$, yang terletak di antara bidang $z = 1$ dan $z = 4$. Tentukan titik pusat massa S jika rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = kz$, k konstanta.

Penyelesaian



Gambar 5.12 S region permukaan $z = x^2 + y^2$ antara $z = 1$ dan $z = 4$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.13 Proyeksi D diskritasi $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dA$$

$$\begin{aligned} \text{Massa} = m &= \iint_S \rho \, dS = \iint_D \rho \, dS \\ &= \iint_D \rho (x^2 + y^2) \, dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} \, dA \\
&= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \\
&= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dA \\
&= k \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \, d\theta \\
&= k \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_{-1}^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \right) \\
&= 2\pi k \left(\int_{-1}^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \right)
\end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4r^2 + 1$

$$\begin{aligned}
du &= 8r \, dr \quad \text{maka} \quad \frac{1}{8} du = r \, dr \\
r^2 &= \frac{1}{4}(u - 1)
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\int r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr &= \int \frac{1}{4}(u - 1) \sqrt{u} \frac{1}{8} du \\
&= \frac{1}{32} \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du \\
&= \frac{1}{32} \left(\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C \\
&= \frac{1}{32} \left(\frac{2}{5} (4r^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{80} [4r^3 + 1]_0^2 - \frac{1}{28} [5r^3 + 1]_0^2$$

$$= 12,983$$

$$\begin{aligned} \text{Jari massa} &= 2\pi k \left(\int_0^2 r^3 \sqrt{4r^2 + 1} dr \right) \\ &= 2\pi k [12,983] = 25,926\pi k \end{aligned}$$

- Karena S simetri terhadap sumbu z maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\text{Sehingga titik pusat mass } (0, 0, z) = \left(0, 0, \frac{M_y}{m} \right) = \left(0, 0, \frac{z}{2} \right)$$

Momen massa terhadap bidang XY :

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_S \rho z dS = \iint_S k z z dS = \iint_S k z^2 dS \\ &= \iint_S k (x^2 + y^2) dS \\ &= k \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA \\ &= k \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\ &= k \iint_D (x^2 + y^2)^2 \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \\ &= k \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^4 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\ &= k \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{r=0}^1 r^5 \sqrt{4r^2 + 1} dr \right) \\ &= 2\pi k \left(\int_{r=0}^1 r^5 \sqrt{4r^2 + 1} dr \right) \end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 x^4 \sqrt{4x^2 + 1} dx$ diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi

misalkan $u = 4x^2 + 1$

$$du = 8x dx \quad \text{maka} \quad \frac{1}{8} du = x dx$$

$$x^4 = \left(\frac{1}{2}(u-1)\right)^2 = \frac{1}{16}(u^2 - 2u + 1)$$

Maka

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^4 \sqrt{4x^2 + 1} dx &= \int \frac{1}{16}(u^2 - 2u + 1) \sqrt{u} \frac{1}{8} du \\ &= \frac{1}{128} \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{2}{7} [4x^2 + 1]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} [4x^2 + 1]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} [4x^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \int_{-1}^1 x^4 \sqrt{4x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{128} \left(\frac{2}{7} [4x^2 + 1]^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} [4x^2 + 1]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} [4x^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \right) \bigg|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{448} [4x^2 + 1]^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{160} [4x^2 + 1]^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{192} [4x^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \bigg|_{-1}^1 \\ &= 37,801 \end{aligned}$$

maka

$$M_{\text{rata}} = 2.54 \left(\int_{-1}^1 x^4 \sqrt{4x^2 + 1} dx \right) = 2.54 (37,801) = 95,60254$$

$$\bar{z} = \frac{M_{\text{rata}}}{m} = \frac{95,60254}{25,92554} = 3,687$$

jadi titik pusat massa $(0, 0, z) = (0, 0, 2,916)$

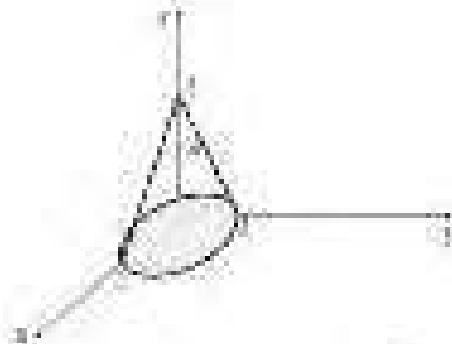
CONTOH 5.7

Jika S bagian dari permukaan $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 0$.

Temukan momen massa terhadap bidang XY dan bidang XZ jika

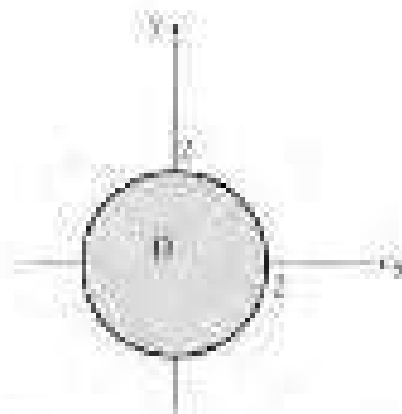
rapat massa di setiap titik $\rho(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2}$.

Penyelesaian:



Gambar 5.14 S bagian permukaan $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 0$

Proyeksi S terhadap bidang XY ¹⁵ diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.15 Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 4$

Dari persamaan $z = f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{Maka } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + 1 \, dA$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) dy \, dx$$

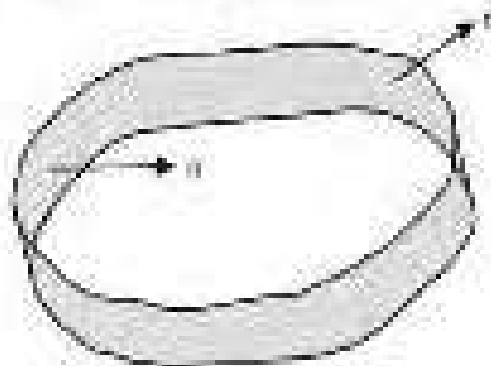
- Momen massa terhadap bidang XY :

$$\begin{aligned} M_0 &= \iint_D \rho z \, dS = \iint_D 3\sqrt{x^2 + y^2} \cdot z \, dS \\ &= \iint_D 3\sqrt{x^2 + y^2} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dS \\ &= 3 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2} \, dA \\ &= 3\sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dA \\ &= 3\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (2 - r) r \, dr \, d\theta \\ &= 3\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^2 - r^3) \, dr \, d\theta \\ &= 3\sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 (2r^2 - r^3) \, dr \right) \\ &= 6\sqrt{2}\pi \left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 \right)_0^1 \\ &= 8\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

• Momen massa terhadap bidang XZ :

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_R \rho y \, dS = \iint_R 3\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y \, dS \\
 &= \iint_R 3\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y \, dS \\
 &= 3 \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \cdot y \cdot \sqrt{2} \, dA \\
 &= 3\sqrt{2} \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \cdot y \, dA \\
 &= 3\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^1 r (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 &= 3\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^1 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \\
 &= 3\sqrt{2} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_{r=0}^1 (r^2) \, dr \right) \\
 &= 3\sqrt{2} x (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \left(\frac{1}{4} r^3 \right) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{3}{4} \sqrt{2} \pi (\cos \theta) \Big|_0^{\pi} (1^3 - 0^3) \\
 &= -12\sqrt{2} \pi (\cos 2\pi - \cos 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

5.4. Fluks Medan Vektor yang Melalui Permukaan S



Gambar 5.16 Permukaan berbau seperti donat Minibus

Pada permukaan yang bersisi dua seperti pita, dan andaikan terdapat fluida yang dapat mengalir melalui permukaan tersebut dari satu sisi ke sisi yang lain. Andaikan juga permukaan tersebut licin yang berarti mempunyai normal satuan n arah ke atas yang berubah-ubah secara kontinu. Jika S adalah permukaan yang bersisi dua seperti definisi di atas dan diasumsikan S dikelilingi ke dalam fluida dengan medan kecepatan kontinu $F(x, y, z)$, maka (Lapidus, 1958) scientists, and engineers should find the book to be an excellent introductory text for coursework or self-study as well as worth its shelf space for reference." —MAA Reviews *Applied Mathematics, Fourth Edition* is a thoroughly updated and revised edition on the applications of modeling and analyzing natural, social, and technological processes. The book covers a wide range of key topics in mathematical methods and modeling and highlights the connections between mathematics and the applied and natural sciences. The Fourth Edition covers both standard and modern topics, including scaling and dimensional analysis, regular and singular perturbation; calculus of variations; Green's functions and integral equations; nonlinear wave propagation; and stability and bifurcation. The book provides extended coverage of mathematical biology, including biochemical kinetics, epidemiology, viral dynamics, and parasitic disease. In addition, The new edition features: Expanded coverage on orthogonality, boundary value problems, and distributions, all of which are motivated by solvability and eigenvalue problems in elementary linear algebra. Additional MATLAB® applications for computer algebra system calculations. Over 300 exercises and 100 illustrations that demonstrate important concepts. New examples of dimensional analysis and scaling along with new tables of dimensions and

units for easy reference; review material, theory, and examples of ordinary differential equations; new material on applications to quantum mechanics, chemical kinetics, and modeling diseases and viruses; written at an accessible level for readers in a wide range of scientific fields. Applied Mathematics, Fourth Edition is an ideal text for introducing modern and advanced techniques of applied mathematics to upper-undergraduate and graduate-level students in mathematics, science, and engineering. The book is also a valuable reference for engineers and scientists in government and industry".

43

family": "Lapetus", "given": "Lenn", "non-dropping-particle": "", "parse-names": false, "suffix": "" | | "container-title": "Industrial and Engineering Chemistry", "id": "ITEM-3", "issued": { "date-parts": [["1968"]] }, "title": "Applied mathematics", "type": "article-journal" | | "url": | | "http://www.mendeley.com/documents/?uid=7ae95548-fb83-4cbl-90f7-da9e0cca3f18" | | "mendeley": | | "formattedCitation": | | "Lapetus, 1968

Fluks yang menembangi S adalah $= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Note: Fluks dengan cara di atas disebut cara langsung

TEOREMA

Misalkan S adalah permukaan mulus berisi dua yang didefinisikan oleh $z = f(x, y)$, dimana (x, y) ada di dalam D , dan misalkan $\mathbf{n}$ melambangkan normal satuan ke arah atas pada S . Jika f mempunyai turunan parsial orde pertama yang kontinu dan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ adalah medan vektor kontinu, maka fluks $\mathbf{F}$ yang menembangi S dapat dinyatakan dengan:

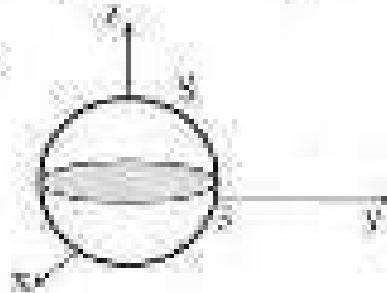
$$\text{Fluks } \mathbf{F} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [M_x + M_y + P] dx dy$$

CONTOH 5.8

Hitung fluks arah ke atas dari $P(x, y, z) = (y + x^2 + k)$ yang menyebarkan pag 39 dan permukaan bola S yang ditentukan oleh $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $0 < x^2 + y^2 < 4$ dengan menggunakan:

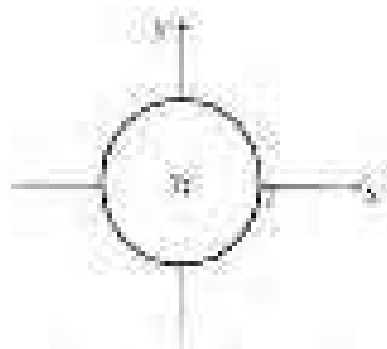
- Cara Langsung
- Teorema

Penglesaian:



Gambar 5.17 S bagian permukaan

Proyeksi S terhadap bidang XY adalah $0 < x^2 + y^2 < 4$ diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.18 Proyeksi D elipsas $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

- Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif,

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Maka } f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}$$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} dA$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} dA = \frac{3}{z} dA$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis sbd

$$H(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$= z - \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$= n = \frac{\nabla H}{|H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right) i + \left(\frac{y}{z}\right) j + k}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{z}\right) i + \left(\frac{y}{z}\right) j + k}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + k}{3} \\
 &= \left(\frac{x}{9}\right)i + \left(\frac{y}{9}\right)j + \frac{1}{3}k
 \end{aligned}$$

Maka fluks F yang menyebarkan S dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S F \cdot n \, dS \\
 &= \iint_D (-n + n + k) \cdot \left[\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{1}{3}k \right] dS \\
 &= \iint_D (-n + n + k) \cdot \left[\left(\frac{x}{3}\right)i + \left(\frac{y}{3}\right)j + \frac{1}{3}k \right]^2 dA \\
 &= \iint_D dA \quad (\text{Luas lingkaran } D \text{ dengan jari-jari } = r = 2) \\
 &= 4\pi \text{ satuan kubik}
 \end{aligned}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + k$ maka $M = -y$,
 $N = x$, $P = 1$

Maka

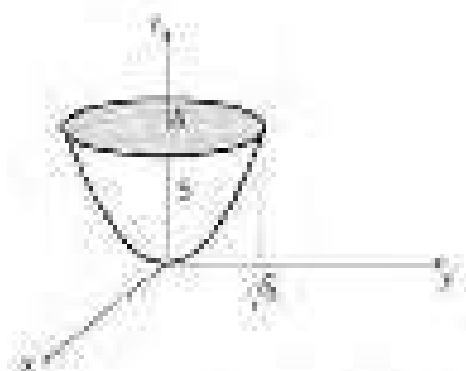
$$\begin{aligned}
 \text{Fluks } F &= \iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D [-M_x - N_y + P] dA \\
 &= \iint_D \left[y \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} \right) \right) - x \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} \right) \right) + 1 \right] dA \\
 &= \iint_D dA \quad (\text{adalah Luas lingkaran } D \text{ dengan jari-jari } = r = 2) \\
 &= 4\pi \text{ satuan kubik}
 \end{aligned}$$

CONTOH 5.9

Hitung fluks arah ke atas dari $F(x, y, z) = -2xy + 4z$ yang menyeberangi permukaan S yang dibatasi $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$ dengan menggunakan:

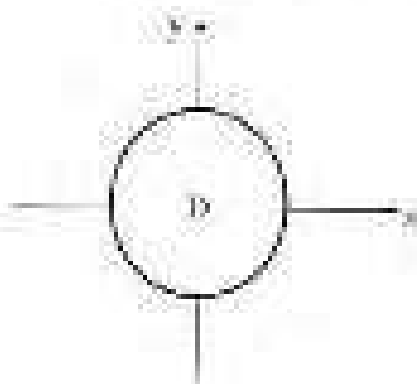
- Cara Langsung
- Teorema

Penglesaian:



Gambar 5.19. S bagian permukaan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ dan $z = 6$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.20. Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 6$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

11

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{Maka } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dA \\ &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} \, dA \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \\ &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dA \end{aligned}$$

Persamaan dari permukaan dapat ditulis

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= z - f(x, y) \\ &= z - (x^2 + y^2) = z - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \\ &= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\ &= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\ &= (-2xi - 2yj + k) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \end{aligned}$$

Maka fluks F yang melewati S dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S F \cdot n \, dS \\
 &= \iint_S (-2y + 4k) \cdot \left((-2x + 2y + 4) \cdot \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) dS \\
 &= \iint_D (-2x + 4k) \cdot \left((-2x + 2y + 4) \cdot \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) dA \\
 &= \iint_D (4xy + 4) \, dA \\
 &= 4 \iint_D (xy + 1) \, dA \\
 &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} [(r \cos \theta)(r \sin \theta) + 1] r \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (r^2 \cos \theta \sin \theta + r) \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} r^2 \, dr + 4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} r \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d(\sin \theta) \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} + 4 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \\
 &= 0 + 4(2\pi) \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \right] \\
 &= 24\pi \text{ satuan kubik}
 \end{aligned}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 4z\mathbf{k}$ maka $M = -2y$,

$N = 0$, $P = 4$

Maka

$$\begin{aligned}
\text{Fluks } F &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_D [-4y, -4y, 4P] dA \\
&= \iint_D [-2y(2x) + 0 + 4] dA \\
&= \iint_D [4x + 4] dA \\
&= 4 \iint_D (xy + 1) dA \\
&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} [(r \cos \theta)(r \sin \theta) + 1] r dr d\theta \\
&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 \cos \theta \sin \theta + r) dr d\theta \\
&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \left[\sin \theta \right]_0^{\sqrt{2}} r^2 dr + 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r \right]_0^{\sqrt{2}} r dr d\theta \\
&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \left[\sin \theta \right] \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr + 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sin \theta \right] \int_0^{\sqrt{2}} r dr \\
&= 4 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} + 4 \left(\cos^2 \theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= 0 + 4(2\pi) \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) \\
&= 24\pi \text{ satuan kubik}
\end{aligned}$$

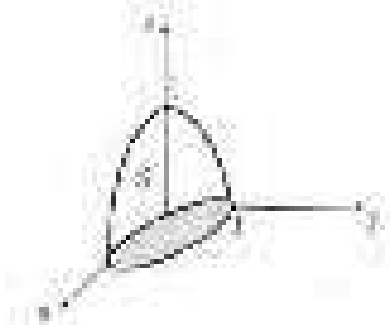
CONTOH 5.10

Hitunglah fluks medan vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yang menyembunyi 5 bagian dari paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ yang terletak di atas bidang xy , dengan $\mathbf{n}$ vektor normal ke arah atas. Selesaikan dengan menggunakan:

- Cara Langsung
- Teorema

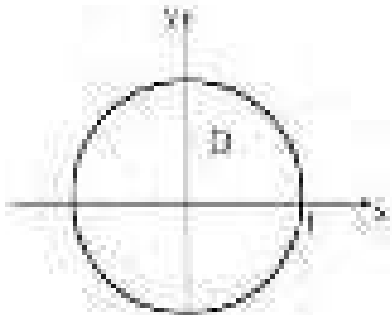
Menentukan Integral Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

Penyelesaian:



Gambar 5.21. S bagian permukaan $z = 1 - (x^2 + y^2)$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.22. Proyeksi D dibatasi $x^2 + y^2 = 1$

a. Cara Langsung

Medan F adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif.

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

Maka $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dA \\
 &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\
 &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA
 \end{aligned}$$

Perhatikan dari permukaan dapat ditulis sbg:

$$H(x, y, z) = z = f(x, y)$$

$$\vec{n} = \left[1 - \left(f_x^2 + f_y^2 \right) \right]$$

$$= z = 1 + x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
 \vec{n} &= \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \\
 &= \frac{-(2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\
 &= \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}
 \end{aligned}$$

$$= (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right)$$

Maka fluks $\vec{F}$ yang menyebarkan $\vec{S}$ dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
 &= \iint_D (x + y + z) \left((2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) \left(\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \right) dS
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D (1(x+y+z)) \left((2x+2y+z) \left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right) \right) \sqrt{4x^2+4y^2+1} \, dA \\
 &= \iint_D (2x^2+2y^2+z) \, dA \\
 &= \iint_D (2x^2+2y^2+1-x^2-y^2) \, dA \\
 &= \iint_D (x^2+y^2+1) \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2+1) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3+r) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^3+r) \, dr \\
 &= (2\pi) \left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{3}{2} \pi \text{ satuan kubik.}
 \end{aligned}$$

b. Teorema

Dari medan vektor $F(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ maka $\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$

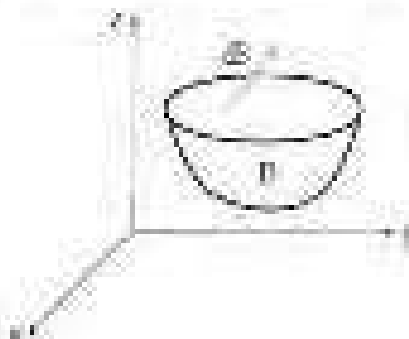
Maka

$$\begin{aligned}
 \text{Fluks } F &= \iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dA \\
 &= \iint_D [-x(-2x) - y(-2y) + z] \, dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + z) \, dA \\
&= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) \, dA \\
&= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) \, dA \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 (r^2 + 1) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 (r^3 + r) \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-1}^1 (r^3 + r) \, dr \\
&= (2\pi) \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= (2\pi) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \pi \text{ satuan kubik}
\end{aligned}$$

5.5 Teorema Divergensi Gauss

Misalkan B suatu benda tertutup di ruang yang ditutupi oleh permukaan yang licin bagian demi bagian. (Wahyuni, 2017)



Gambar 5.23 B dengan B yang ditutupi permukaan ∂B

Teorema Divergensi Gauss

5

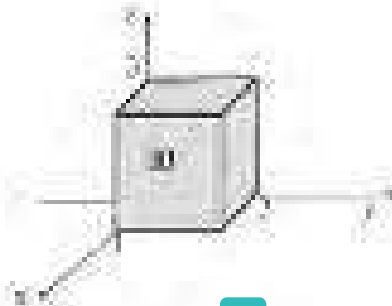
Misalkan $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ suatu medan vektor dengan M, N dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada $\bar{B}$ dan $\partial\bar{B}$. Jika $\vec{n}$ vektor normal satuan keluar pada $\partial\bar{B}$, maka

$$\iint_{\partial\bar{B}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \Delta_V \text{div } \vec{F} dV = \Delta_V \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dV$$

CONTOH 5.11

Hitung fluks dari medan vektor $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + 2xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$ melalui permukaan kotak tegak $B = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss.

Penglesaian:



40

Gambar 5.24 Benda B yang dibatasi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\bar{B}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \Delta_V \text{div } \vec{F} dV = \Delta_V \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right] dV \\ &= \Delta_V [2xy + 0 + yz] dV \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2xy + yz) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 [2yzx + yz^2] \Big|_0^1 dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (2yz + yz^2) dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (6xy + 27y^2) \, d\theta \, dx \\
&= \int_0^3 \left[3xy^2 + \frac{27}{2}y^2 \theta \right]_0^{2\pi} \, dx \\
&= \int_0^3 (12x + 54) \, dx \\
&= 6x^2 + 54x \Big|_0^3 = 60
\end{aligned}$$

CONTOH 5.12

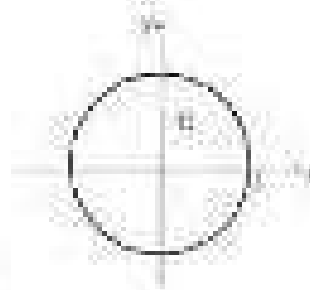
Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 3$. Jika pada B terdapat vektor normal satuan arah keluar pada ∂B dan medan vektor $F(x, y, z) = (x^2 + \ln(xz))\mathbf{i} + (y^2 - e^z)\mathbf{j} + (2z + x^2)\mathbf{k}$, maka hitung fluks dari F melalui ∂B .

Penyelesaian:



Gambar 5.25 Benda B yang dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ dan $z = 3$

Proyeksi S terhadap bidang XY ¹⁵ diberikan pada gambar di bawah ini.



Gambar 5.28 Proyeksi D di bidang $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + \tan 3z) + \frac{\partial}{\partial y} (y^2 - e^{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (3z + y^2) \\ &= (2x + 3) + (2y - e^{yz}) + (3 + 2y) \\ &= 3(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

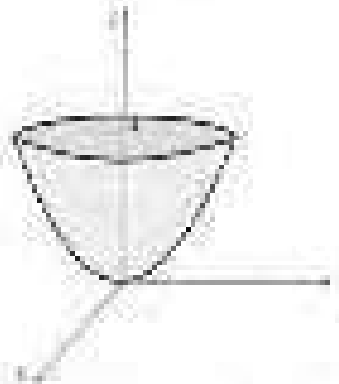
Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} F \cdot n \, dS &= \iiint_V \operatorname{div} F \, dV \\ &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + 1) \, dV \quad (\text{gunakan koordinat} \\ &\quad \text{silinder}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 (r^2 + 1) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \int_0^2 (r^2 + 1) \, dz \, dr \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 (r^2 + 1) z \Big|_0^2 \, dr \\ &= 18\pi \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 \\ &= 108\pi \text{ satuan kubik} \end{aligned}$$

CONTOH 5.13

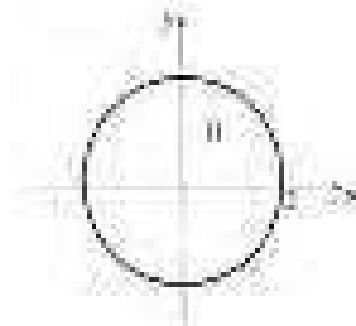
Misalkan B benda yang dibatasi oleh silinder $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$. Jika ada el¹vektor normal satuan arah ke atas pada ∂B dan medan vektor $F(x, y, z) = (x^2 + 2yz)\mathbf{i} + (3y^2 - 3x)\mathbf{j} + (9z + 4x^2)\mathbf{k}$ maka hitung fluks dari F melalui ∂B .

Penyelesaian:



Gambar 5.27 benda B yang dibatasi silinder $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$

Proyeksi B terhadap bidang xy diberikan pada gambar di bawah ini



Gambar 5.28 Proyeksi B diatas $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) + \frac{\partial}{\partial z}(9z + 4x^2) \\ &= (3x + 6y + 9) \end{aligned}$$

$$= 3(x^2 + 2y^2 + 3)$$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss maka

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot n \, dS &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= 3 \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3) \, dV \quad (\text{gunakan koordinat} \\ &\quad \text{silinder}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta + 3) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta + 3) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta + 3r) z \, dz \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta + 3r) \, dr \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^4 \sin^2 \theta + \frac{3}{2} r^2 \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta + 6) \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(4 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] + 8 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] + 6 \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left([2 + 2 \cos 2\theta] + [4 - 4 \cos 2\theta] + 6 \right) d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} (12 - 2 \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= 9 (12\theta - \sin 2\theta) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 9 (24\pi - 0) \\ &= 216\pi \text{ satuan kubik} \end{aligned}$$

5.6 Teorema Stokes

Misalkan S permukaan dua sisi dengan ∂S (batasnya) merupakan lengkungan sederhana tertutup yang licin bagian demi bagian dan ∂S terorientasi secara konsisten terhadap n (vektor normal satuan arah keluar pada permukaan S), yaitu jika kita berdiri dekat tepi permukaan dengan kepala searah dengan vektor n dan jika kita memandang ke arah lengkungan maka permukaan terletak di sebelah kiri kita. (Samura & Pengantar, n.d.)



Gambar 5.28 Permukaan S dengan vektor normal n

5

Teorema Stokes

Misalkan S , ∂S dan n seperti disebutkan di atas. Misalkan $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ medan vektor dengan M , N , dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada S dan ∂S . Bila T adalah vektor satuan singgung pada ∂S , maka

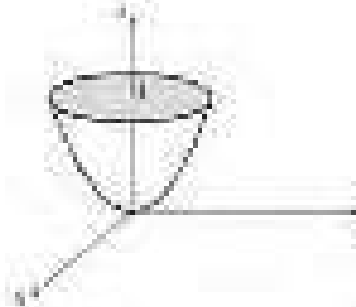
$$\oint_{\partial S} F \cdot T \, ds = \oint_{\partial S} F^* T \, ds = \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS$$

CONTOH 5.14

42. Tunjukkan kebenaran Teorema Stokes untuk $S = \{ (x, y, z) = (y - x)^2 + y^2 \}$ jika S adalah permukaan paraboloid

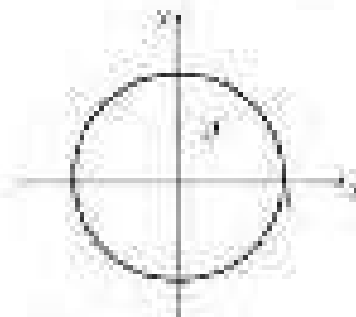
$z = x^2 + y^2$ dengan batas ∂S adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ di bidang $z = 1$.

Penyelesaian:



Gambar 5.30: S bagian permukaan $z = x^2 + y^2$ dan $z = 1$

Proyeksi S terhadap bidang XY diberikan pada gambar di bawah



Gambar 5.31: Proyeksi S diatas $x^2 + y^2 = 1$

∂S mempunyai persamaan $x^2 + y^2 = 1$ dan $z = 1$ dan persamaan parameter adalah

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = 1$$

dengan $0 \leq t \leq 2\pi$ dan $dt = 1$

Buas Kiri

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma_C} F(x) \, dS &= \oint_{\gamma_C} F \, dx \\
 &= \oint_{\gamma_C} y \, dx - x \, dy \\
 &= \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) \, dt - (\cos t)(\cos t) \, dt] \\
 &= \int_0^{2\pi} [-\sin^2 t] \, dt - [\cos^2 t] \, dt \\
 &= -\int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t] \, dt \\
 &= -\int_0^{2\pi} dt \\
 &= -2\pi
 \end{aligned}$$

Buas Kanan

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS \\
 \text{Curl } F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & xy \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i} - \vec{k} \\
 &= z = f(x, y) = x^2 + y^2
 \end{aligned}$$

Maka $\int_C \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \int_C \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$\begin{aligned}
 H(x, y, z) &= z - f(x, y) \\
 &= z - x^2 - y^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\nabla f}{H} = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}} \\ &= \frac{(-2x)i + (-2y)j + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\ &= \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \\ &= (-2xi - 2yj + k) \left[\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right] \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} \iint_S (Cw(x)) \cdot n dS &= \iint_S (-2k) \left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) dS \\ &= \iint_S (-2k) \left(\frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \right) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA \\ &= \iint_S (-2k)(-2xi - 2yj + k) dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \iint_D \left[r(x^2 + y^2) + 1 \right] dA \\
&= -2 \int_1^{2+\pi} \int_0^1 \left[r \cos \theta (r^2) + 1 \right] r dr d\theta \\
&= -2 \int_1^{2+\pi} \int_0^1 \left[r^4 \cos \theta + r \right] dr d\theta \\
&= -2 \int_1^{2+\pi} \left(\frac{1}{5} r^5 \cos \theta + \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^1 d\theta \\
&= -2 \int_1^{2+\pi} \left(\frac{1}{5} \cos \theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\
&= -2 \left(\frac{1}{5} (\sin \theta) + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_1^{2+\pi} \\
&= -2 \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \right) = -2\pi
\end{aligned}$$

Jadi $\oint_C \mathbf{F} \cdot T dS = \iint_S (\text{Curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$

Maka terbukti kebenaran Teorema Stokes

CONTOH 5.15

12 Misalkan S bagian dari permukaan bola $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$ yang terletak di bawah bidang $z = 1$ dan misalkan $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\text{Curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, dimana $\mathbf{n}$ vektor normal satuan arah keluar.

Penyelesaian:

Perthatikan bahwa ∂S adalah lingkaran $x^2 + y^2 + (1 - 4)^2 = 16$ $x^2 + y^2 = 1$ (lingkaran yang berjari-jari 1)

(Penyelesaian seperti contoh 5.13)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi$$

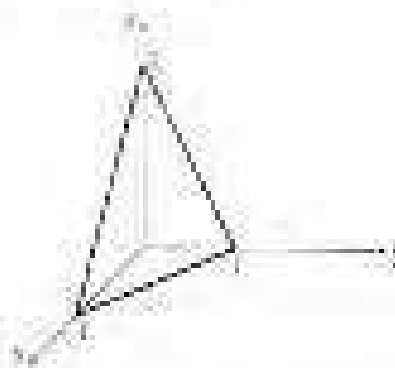
$$\iint_S (\text{Curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = -2\pi$$

CONTOH 5.16

Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ di mana $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + (3x - 3y)\mathbf{j} + (2x - y)\mathbf{k}$ dan C adalah sisi-sisi segitiga yang melalui titik-titik $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ dan $(0, 0, 2)$.

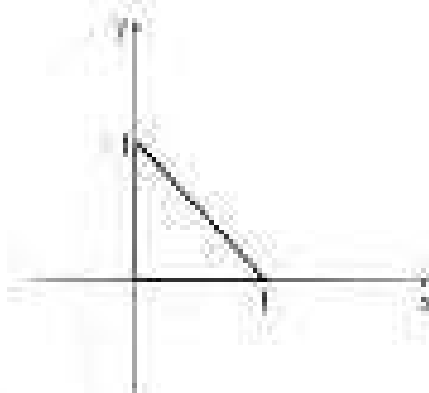
Penyelesaian:

Amati S permukaan bidang segitiga yang melalui titik-titik $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ dan $(0, 0, 2)$, maka $C = \partial S$.



Gambar 5.32 Permukaan S dibatasi $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ dan $(0, 0, 2)$

D Proyeksi S diberikan pada gambar di bawah ini

Gambar 5.30. Proyeksi D segitiga melalui $(0,0)$, $(1,0)$ dan $(1,1)$

Teorema Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot T \, dS = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot T \, dS = \iint_D (\text{Curl } \vec{F}) \cdot n \, dS$$

$$\text{Curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 8x & 3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-0)\hat{i} - (3-2)\hat{j} + (8-0)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$$

Vektor n adalah vector normal pada segitiga.

Ambil vector $\vec{a}$ = vector yang melalui titik-titik $(1,0,0)$ dan $(0,1,0)$, yaitu $\vec{a} = (0-1)\hat{i} - (1-0)\hat{j} + (0-0)\hat{k} = -\hat{i} - \hat{j}$. Ambil vector $\vec{b}$ = vector yang melalui titik-titik $(1,0,0)$ dan $(0,0,2)$, yaitu $\vec{b} = (0-1)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (2-0)\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{k}$.

Maka $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -2i - 2j - k$$

Jadi

$$n = \frac{-a \times b}{|a \times b|} \quad (\text{tanda negatif menandakan arahnya keluar})$$

$$= \frac{2i + 2j + k}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$= \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \iint_S (Cw(F)) \cdot n \, dS &= \iint_S ((-i + 8k) \cdot (\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k)) \, dS \\ &= \iint_S (\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}) \, dS \\ &= \frac{8}{3} \iint_S \, dS \\ &= \frac{8}{3} \quad (\text{Luas segitiga } S) \end{aligned}$$

ingat bahwa Luas segitiga $= \frac{1}{2} |a \times b|$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{9}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Jadi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, dS = \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot \frac{1}{2} \, dS$$

(Luas segitiga)

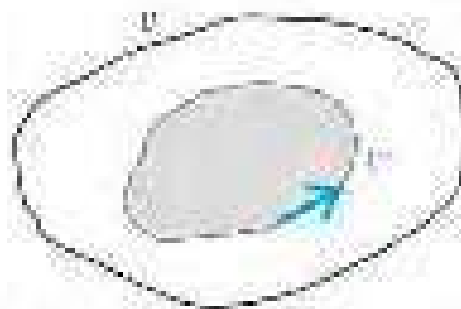
$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} = 4$$

5)

CONTOH 5.17

Jika $\mathbf{F}$ medan vektor konservatif pada daerah D . Tunjukkan bahwa $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ untuk setiap lengkung tertutup C dalam D .

Penyelesaian:



Gambar 5.36 Lengkungan tertutup C di dalam D

Ambil S permukaan sebarang yang batasnya $\partial S = C$. Maka menurut Teorema Stokes :

Karena $\mathbf{F}$ konservatif maka $\text{Curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, sehingga $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} =$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, dS = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, dS = \iint_V (\operatorname{div} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

Diberikan kuis pada akhir pertemuan dan tugas presentasi per kelompok yang membahas materi perkuliahan.

LATIHAN 5

1. Hitung $\iint_S g(x, y, z) \, dS$ jika $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan S permukaan bidang $z = x + y + 1$ dengan $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$.
2. Hitung $\iint_S g(x, y, z) \, dS$ jika $g(x, y, z) = x + y$ dan S permukaan bidang $z = \sqrt{4 - x^2}$ dengan $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ dan $0 \leq y \leq 1$.
3. Hitunglah fluks $\mathbf{F}$ medan vektor $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leq x \leq 3$ dengan menggunakan
 - a. Cara Langsung
 - b. Teorema
4. Hitunglah fluks $\mathbf{F}$ medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k}$ yang menyeberangi S bagian dari permukaan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ yang berada di dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$.
5. Hitunglah fluks dari medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yang menyeberangi $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ dengan menggunakan Teorema Gauss.

6. Jika $\vec{F}(x, y, z) = (9 - x^2)\vec{j}$ adalah medan vector dan S bagian dari permukaan didefinisi $2x + 3y + 6z = 6$ di oktan pertama. Hitunglah fluks yang menyeberangi S dengan menggunakan:

- Cara Langsung
- Teorema

7

7. Jika S bagian dari permukaan $z = 9 - x^2 - y^2$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah $\rho = 3(x^2 + y^2)$. Tentukanlah:

- Luas Permukaan
- Massa S
- Titik pusat massa S

7

8. Jika S bagian dari permukaan $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang XOY. Misalkan rapat massa pada setiap titik adalah

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad k \text{ konstanta}$$

Tentukanlah:

- Luas Permukaan
- Massa S
- Titik pusat massa S

9. **1**erapkan kebenaran Teorema Stokes untuk $\vec{F}(x, y, z) = 3x\vec{i} - y\vec{j} + 4z\vec{k}$ jika S adalah permukaan paraboloida $z = 4 - (x^2 + y^2)$ dengan batas ∂S adalah lingkaran pada D di bidang $z = 2$.

10. Jika S bagaian dari permukaan $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ yang terletak diatas bidang $z = 2$ dan memiliki $F(x, y, z) = 2xi + 3yj + 4k$.
Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung

$$\iint_S (\text{Curl } F) \cdot n \, dS$$

Integral dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

ORIGINALITY REPORT

15%
SIMILARITY INDEX

15%
INTERNET SOURCES

3%
PUBLICATIONS

5%
STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1 documents.mx
Internet Source 1%

2 vdocuments.mx
Internet Source 1%

3 xclmedia.net
Internet Source 1%

4 id.scribd.com
Internet Source 1%

5 file.upi.edu
Internet Source 1%

6 docslide.us
Internet Source 1%

7 www.slideshare.net
Internet Source 1%

8 Submitted to Universiti Teknologi Malaysia
Student Paper 1%

9 es.scribd.com
Internet Source 1%

10 doku.pub
Internet Source <1%

11 mecmath.net
Internet Source <1%

12 vaskoedo.wordpress.com
Internet Source <1%

13 blog.ub.ac.id
Internet Source <1%

14	ee.istanbul.edu.tr Internet Source	<1 %
15	dspace.uui.ac.id Internet Source	<1 %
16	www.coursehero.com Internet Source	<1 %
17	docplayer.info Internet Source	<1 %
18	foe.mmu.edu.my Internet Source	<1 %
19	slidegur.com Internet Source	<1 %
20	trenndeirasaid.blogspot.com Internet Source	<1 %
21	imada.sdu.dk Internet Source	<1 %
22	nanopdf.com Internet Source	<1 %
23	fr.slideshare.net Internet Source	<1 %
24	qdoc.tips Internet Source	<1 %
25	repository.uhamka.ac.id Internet Source	<1 %
26	www.cyut.edu.tw Internet Source	<1 %
27	123dok.com Internet Source	<1 %
28	ismail_muchsin.staff.gunadarma.ac.id Internet Source	<1 %

esa148.weblog.esaunggul.ac.id

29	Internet Source	<1 %
30	edoc.pub Internet Source	<1 %
31	docobook.com Internet Source	<1 %
32	edoc.site Internet Source	<1 %
33	slideum.com Internet Source	<1 %
34	koivu.oulu.fi Internet Source	<1 %
35	Submitted to Sheffield Hallam University Student Paper	<1 %
36	imath.mathematik.tu-ilmenau.de Internet Source	<1 %
37	macs.citadel.edu Internet Source	<1 %
38	www.math.wisc.edu Internet Source	<1 %
39	www.math.zju.edu.cn Internet Source	<1 %
40	www.sc.ehu.es Internet Source	<1 %
41	euclid.ucc.ie Internet Source	<1 %
42	www.icmc.sc.usp.br Internet Source	<1 %
43	Submitted to Queen Mary and Westfield College Student Paper	<1 %

44	ebin.pub Internet Source	<1 %
45	David M. Bressoud. "Second Year Calculus", Springer Science and Business Media LLC, 1991 Publication	<1 %
46	Peter D. Lax, Maria Shea Terrell. "Multivariable Calculus with Applications", Springer Science and Business Media LLC, 2017 Publication	<1 %
47	eprints.undip.ac.id Internet Source	<1 %
48	idoc.pub Internet Source	<1 %
49	uasuan.blogspot.com Internet Source	<1 %
50	www.math.lsu.edu Internet Source	<1 %
51	repository.iainpare.ac.id Internet Source	<1 %

Exclude quotes On
Exclude bibliography On

Exclude matches < 15 words