Dra. Lisa Samura, M.T
Cahaya Rosyidan, M.Sc

MATEMATIKA

monograf

Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel

Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel

UNIVERSITAS TRISAKTI
UNIT PENERBITAN DAN PERCETAKAN
Kampus A – Gedung C Lt. Dasar – Jalan Kyai Tapa No. 1 (Grogol) 11440
Telp. (021) 5663232 Pes. 8107, 8175 – Fax : (021) 5655906
Email : usaktipress@trisakti.ac.id

Jakarta, 1 Oktober 2021

SURAT KETERANGAN

Yang bertanda tangan di bawah ini menerangkan dengan sesungguhnya bahwa *draft* buku dengan data sebagai berikut:

Judul Buku	: Sistem Persamaan Linier dengan N Variabel
Tim Penulis	: Lisa Samura, Cahaya Rosyidan

Saat ini sedang dalam proses persiapan penerbitan oleh:

Nama Penerbit	: Penerbit Universitas Trisakti
Tautan Penerbit	: www.penerbitan.trisakti.ac.id
Nomor IKAPI	: 134/DKI/99
Edisi	: Pertama
Tahun Terbit	: 2021
ISBN	: 978-602-0750-30-9
Perkiraan terbit	: (*Oktober*), (*2021*)

Demikian Surat Keterangan ini kami buat dengan sebenarnya untuk keperluan penulis sebagai penerima **Hibah Monograf**, Universitas Trisakti

Jakarta, 1 Oktober 2021

Ketua/Editor

(Gunawan Saleh, S.Sos)

MATEMATIKA MONOGRAF
Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel

Judul Buku : Matematika Monograf
Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel
Penulis : Dra. Lisa Samura, M.T
Cahaya Rosyidan, M.Sc
Diterbitkan Oleh : Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta
Cetakan Pertama :
ISBN :

Dra. Lisa Samura, M.T
Cahaya Rosyidan, M.Sc

MATEMATIKA MONOGRAF

Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel

Penerbit Universitas Trisakti

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan karunia dan rizkinya sehingga penulis bisa menyelesaikan monograf Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel.

Buku ini membahas tentang Sistem Persamaan Linier n variable yang merupakan sub bab pada matakuliah Matriks dan Ruang Vektor. Materi ini banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan baik di bidang teknik, ekonomi, sosial, kedokteran dan lain-lain. Diberikan juga beberapa aplikasi untuk masalah di bidang teknik, ekonomi, dan masalah real yang lain. Pembahasan materi monograf ini meliputi Sistem Persamaan Linier banyak variable dengan menggunakan Metoda Gauss Jordan, Invers, dan Metoda Cramer.

Penulis menyadari bahwa monograf yang disusun ini masih belum sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk kesempurnaannya. Semoga buku ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan bagi kita semua.

Jakarta, Juli 2021

Penulis

PRAKATA

Permasalahan pada Sistem Persamaan Linier adalah menentukan solusi atau penyelesaiannya dimana solusi bisa berbentuk unik, banyak atau tidak berhingga dan tidak ada solusi. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas memerlukan waktu pengerjaan yang lebih lama. Pada monograf ini akan disajikan cara menyelesaikan Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas dengan menggunakan 3 metoda yaitu Gauss Jordan, Invers dan Metoda Cramer. Setiap metoda akan dijelaskan secara runut sehingga pembaca dapat mudah memahami dan memilih metoda yang sesuai dengan permasalahannya.

Sistem Persamaan Linier merupakan salah satu sub bab Matriks di dalam buku Aljabar Linier yang umumnya hanya membahas sampai dengan 3 variabel bebas . Metoda penyelesaian pada buku teks lain juga terpisah pada masing-masing sub bab. Dengan menyajikan penyelesaian langsung dalam 3 metoda ini diharapkan pembaca lebih cepat mempelajari dan memahami Sistem Persamaan Linier lebih dari 3 variabel bebas.

Sasaran utama monograf ini adalah mahasiswa yang mengambil matakuliah Matriks & Ruang Vektor dan Matematika Teknik di lingkup internal Universitas Trisakti. Sasaran umum adalah mahasiswa di luar lingkup Universitas Trisakti atau peneliti yang ingin mempelajari lebih lanjut Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR ISTILAH/GLOSARIUM

Sistem Persamaan Linier dengan n variabel – koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier yang memuat n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan n variabel – bilangan bilangan real $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang memenuhi persamaan sistem linier .

Matriks Eselon Baris Terduksi - bentuk matriks eselon baris yang lebih disederhanakan sehingga lebih mudah dalam mencari solusi dari suatu sistem persamaan.

Metoda Gauss Jordan- prosedur pemecahan Sistem Persamaan Linier dengan mengubah bentuk matrisk eselon baris tereduksi dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE).

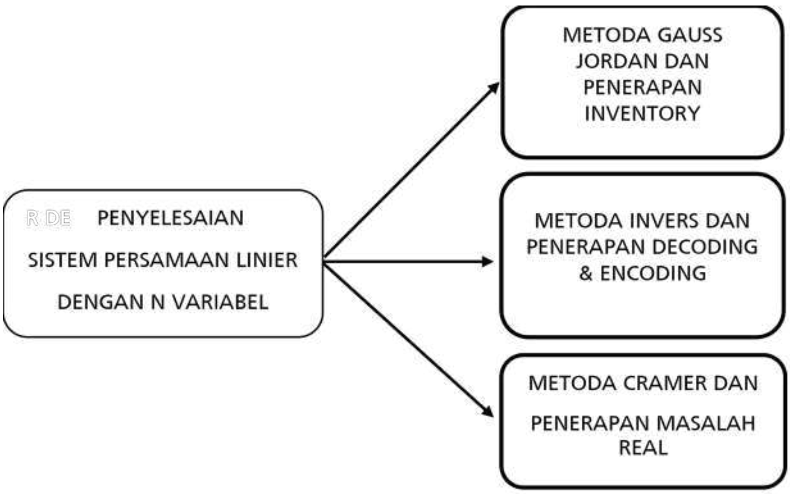
Metoda Cramer-penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan determinan dengan syarat determinan matriks A tidak sama dengan nol. Nilai x_j diperoleh dengan membagi determinan A_j dengan determinan A. Determinan A_j diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke j dengan B.

Invers- diperoleh dari matriks lengkap berisikan matriks bujur sangkar A dengan matriks identitas yang bersesuaian yang dilakukan Metoda Gauss Jordan.

Encoding – mengubah informasi dari suatu sistem ke sistem lain dalam bentuk kode. Kode dapat berupa symbol, tanda atau huruf yang digunakan untuk merepresentasikan secara rahasia .

Decoding – proses membuka file berkode yang sudah dikirim dan harus diterjemahkan kembali ke bentuk aslinya .

RINGKASAN



Gambar 1. Ringkasan

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang

Sistem Persamaan Linier merupakan bagian dari Aljabar Linier. Persamaan Linier yang sederhana adalah membentuk garis dalam bidang XY sehingga disebut Persamaan Linier dalam variable x dan y. Dalam Persamaan Linier bentuk variabel yang muncul hanya sekali dan berpangkat satu dan tidak berbentuk fungsi trigonometri, eksponensial atau logaritma . Penyelesaian Persamaan Linier adalah sehimpunan bilangan terurut yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan linier akan menjadi valid. Penyelesaian atau solusi Persamaan Linier disebut himpunan penyelesaiannya atau disebut penyelesaian umum .

Jika persamaan dalam 2 variabel $3x+2y=6$, maka $y=3-\frac{3}{2}x$ merupakan persamaan garis yang melalui titik (0,3) dan (2,0). Untuk menentukan penyelesaiannya misalkan $x=t$ maka $y=3-\frac{3}{2}t$ dimana t adalah bilangan Real.

Untuk penyelesaian khusus diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai khusus dari t. Dengan memisalkan $t=1$ maka diperoleh $y=\frac{3}{2}$, sehingga himpunan penyelesaian khususnya adalah $\left\{x=1,\ \ y=\frac{3}{2}\right\}$.

Jika persamaannya dalam 3 variabel seperti $3x+2y+z=6$ merupakan persamaan dalam variable x, y dan z . Persamaan ini membentuk bidang 3 dimensi. Untuk menentukan penyelesaiannya dengan mengambil dua nilai sembarang untuk dua variabel yang dipilih misalkan $x = t$, $y = p$ maka $z = 6 - 3t - 2p$.

Untuk penyelesaian khususnya diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai khusus dari t dan p. Dengan memisalkan $t = 2$, $p = 1$ maka $z = -2$ sehingga penyelesaian khususnya adalah $\{x = 2,\ y = 1, z = -2\}$.

Aljabar Linier berkaitan dengan generalisasi Persamaan Linier untuk banyak variable (n variable).

Persamaannya ditulis $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$,

dimana : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ disebut koefisien yang tidak semua bernilai sama dengan nol

: b adalah konstanta bilangan Real

: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah variabel

Sehingga persamaan di atas disebut Persamaan Linier dalam banyak variabel yaitu dalam variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Selanjutnya Persamaan Linier dalam n variable ini dapat membentuk Sistem Persamaan Linier dalam banyak variable .

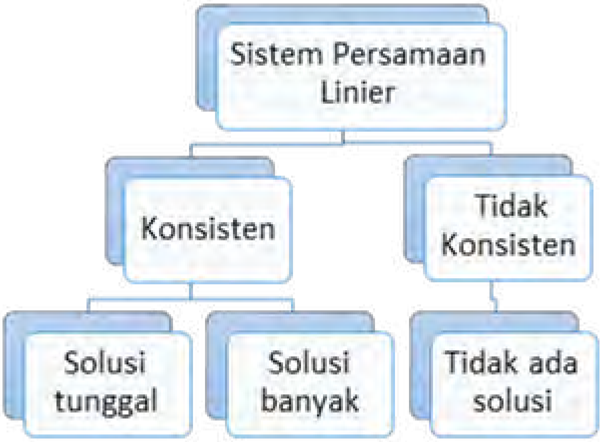
Berikut diberikan Sistem Persamaan Linier dalam beberapa variable dan beberapa persamaan .

Kasus-kasus Sistem Persamaan Linier 3 variabel (x, y, z) .

Jika dengan 2 persamaan :
$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 6 \\ x + 3y - 2z = 10 \end{cases}$$

Jika dengan 3 persamaan :
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ x + 3y + 4z = 4 \\ 5x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Tidak semua Sistem Persamaan Linier mempunyai penyelesaian. Setiap Sistem Persamaan Linier mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai hanya satu penyelesaian atau mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian. Sistem Persamaan Linier yang mempunyai penyelesaian baik tunggal ataupun tak hingga banyaknya penyelesaian disebut konsisten. Sistem Persamaan Linier yang tidak mempunyai penyelesaian disebut tak konsisten. Gambar berikut menjelaskan jenis-jenis penyelesaian (solusi) Sistem Persamaan Linier.



Gambar 1.1 Jenis-jenis solusi Sistem Persamaan Linier

Berikut adalah kasus-kasus solusi untuk Sistem Peramaan Linier dalam 3 variabel .

Kasus 1. Solusi tunggal :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ x + 3y - 2z = 10 \\ x \quad -2z = 4 \end{cases}$$

Dari persamaan ke 3 diperoleh $x = 2z + 4$

Disubstitusikan ke persamaan yang lain:

$$2x - y + 3z = 6 \rightarrow 2(2z+4) - y + 3z = 6 \rightarrow -y + 7z = -2$$

$$x + 3y - 2z = 10 \rightarrow (2z+4) + 3y - 3z = 10 \rightarrow 3y - z = 6$$

Sehingga diperoleh:

$$x = 4, \quad y = 2 \text{ dan } z = 0$$

Karena ini merupakan satu-satunya penyelesaian, maka penyelesaian atau solusi Sistem Persamaan Linier ini disebut tunggal.

Kasus 2. Solusi tak hingga atau solusi banyak:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x + 2y \quad = -3 \end{cases}$$

Dari persamaan ke 2 diperoleh :

$$x = -3 - 2y$$

Substitusikan ke persamaan 1 diperoleh:

$$3x - y + z = 2 \rightarrow 3(-3 - 2y) - 2y + z = 2 \rightarrow -8y + z = 11$$

dengan misalkan $y = t$, t bilangan Real

maka $x = -3 - 2t$ dan $z = 11 + 8t$

Jika $t = 0$ maka $x = -3$, $y = 0$ dan $z = 11$

Jika $t = -\frac{1}{2}$ maka $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$ dan $z = 7$

Karena t bilangan Real maka penyelesaian yang dihasilkan tergantung nilai t sehingga Sistem Persamaan Linier menghasilkan solusi tak terhingga atau banyak.

Kasus 3. Tidak mempunyai solusi :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -4x + 2y - 6z = 3 \\ x \quad -2z = 4 \end{cases}$$

Jika persamaan di baris 1 dan baris 2 disubstitusikan menghasilkan tidak ada solusi.

Permasalahan Sistem Persamaan Linier ini banyak ditemui pada berbagai ilmu seperti di bidang ekonomi, teknik, kedokteran dan banyak kasus lainnya. Penerapan pada beberapa kasus akan dibahas pada bab-bab berikut.

1.2.Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat ditentukan rumusan masalah dalam monograf ini yaitu :

1. Bagaimana membuat Sistem Persamaan Linier dalam banyak variabel bebas ?
2. Bagaimana menentukan penyelesaian Sistem Persamaan Linier dalam banyak variable bebas?
3. Bagaimana aplikasi Sistem Persamaan Linier dalam banyak variable bebas?

1.3.Nilai Kebaruan (Novelty)

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variable ini menggabungkan beberapa metoda yaitu: Metoda Gauss Jordan, Invers dan Cramer sehingga memudahkan pembaca untuk mempelajari metoda yang akan dipilih sesuai dengan kebutuhannya. Dalam monograf ini juga disertakan beberapa aplikasi di bidang ekonomi, inventory, rangkaian listrik, encoding dan decoding serta masalah real.

BAB 2
SISTEM PERSAMAAN LINIER BANYAK VARIABEL BEBAS DENGAN MENGGUNAKAN METODA GAUSS JORDAN

2.1. Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas

Sebuah sistem dengan m Persamaan Linier dalam banyak variabel atau n variabel bebas dituliskan sebagai berikut [1]:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}+.....+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+.....+a_{2n}x_n=b_2 \\ \\ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x\ +a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

dimana : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas

: a_{ij} adalah elemen $i=1,..,m$; dan $j=1,..,n$

Sistem Persamaan Linier di atas dapat dibuat ke dalam bentuk perkalian matriks $AX = B$ [2]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

adalah matriks koefisien a_{ij} yang berukuran $m \times n$ [3]

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berukuran

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berukuran

Penyelesaian atau solusi dari Sistem Persamaan Linier dengan n variabel adalah menentukan X yang dicari dengan menggunakan Metoda Gauss Jordan. Untuk penyelesaian dengan Metoda Gauss Jordan harus dipelajari terlebih dahulu Operasi Baris Elementer dan Metoda Gauss.

2.2. Operasi Baris Elementer

Untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier n variabel harus ditentukan matriks yang diperbesar atau matriks lengkap, dimana matriks lengkap ini berisikan matriks koefisien A yang diperluas dengan menambahkan matriks konstanta B , sehingga diperoleh [4]

matriks lengkap $\left[A|B\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |b_2 \\ & & . \; . \; . & & \\ & & . \; . \; . & & \\ & & . \; . \; . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & |b_m \end{bmatrix}$

Metode dasar untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier adalah menggantikan sistem yang diberikan dengan suatu sistem baru yang mempunyai penyelesaian yang sama dan lebih mudah diselesaikan. Sistem baru ini diperoleh dalam serangkaian langkah dengan menerapkan tiga jenis operasi untuk menghilangkan variabel secara sistematis . Operasi itu meliputi: menukarkan posisi dua persamaan, mengalikan sebuah persamaan dengan konstanta tidak nol, dan menambahkan kelipatan suatu persamaan ke persamaan lainnya.

Karena baris dari suatu matriks lengkap bersesuaian dengan persamaan dalam sistem terkait, maka operasi-operasi tersebut juga bersesuaian dengan operasi berikut pada baris-baris matriks lengkap. Cara seperti ini disebut dengan Operasi Baris Elementer, dimana operasinya sebagai berikut [5]:

1. Menukarkan letak 2 baris .
2. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
3. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris yang lain.

Untuk matriks koefisen yang berordo $n \times n$ maka matriks lengkap yang dihasilkan menyatakan suatu sistem segitiga.

Matriks segitiga terbagi dalam 2 jenis yaitu segitiga atas dan segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dimana semua elemen dibawah diagonal utama bernilai nol.

Secara umum matriks segitiga atas berordo 3×3 adalah

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah matriks bujur sangkar dimana semua elemen di atas diagonal utama bernilai nol.

Seacara umum matriks segitiga bawah berordo 4×4 adalah .

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Tanda * melambangkan konstanta yang tidak nol.

Penerapan Operasi Baris Elementer untuk Sistem Persamaan Linier dengan 3 variabel bebas .[6]

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Dari Sistem Persamaan Linier dapat dituliskan dalam bentuk $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Maka matriks lengkap $\left[A \middle| B\right]$ ditulis $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$

Kemudian dilakukan Operasi Baris Elementer pada matriks lengkap $\left[A \middle| B\right]$ dengan langkah sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

baris 2 dikurang 2 kali baris 1 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & -5 & 9 & 32 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$

baris 3 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & -5 & 9 & 32 \\ 0 & -5 & 10 & 35 \end{array}\right]$

baris 3 dikurang baris 2 diperoleh $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & -5 & 9 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

baris 2 dikali $\left(-\frac{1}{5}\right)$ diperoleh $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{32}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

Hasil akhir dari matriks lengkap membentuk sistem segitiga atas sehingga didapatkan sebagai berikut:

dari baris ke 3 diperoleh $x_3 = 3$

dari baris ke 2 diperoleh:

$x_2 - \frac{9}{5}x_3 = -\frac{32}{5}$, substitusi nilai $x_3 = 3$ maka $= -1$

dari baris 1 diperoleh:

$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -12$, substitusikan nilai dan $x_2 = -1$

maka diperoleh $x_1 = -12 - 2(-1) + 4(3) = 2$
Maka penyelesaiannya $\{x_1 = 2\ , x_2 = -1\ ,\ x_3 = 3\ \}$ atau dapat

dituliskan dalam bentuk matriks $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian ini adalah tunggal dan konsisten.

2.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Banyak Variabel dengan Metoda Eliminasi Gauss Jordan

Dalam memudahkan penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variable bebas maka matriks lengkap harus mempunyai ciri-ciri yang dapat dilihat dari entri yang merupakan matriks koefisien dan dilihat dari kiri ke kanan. Sehingga matriks lengkap menjadi matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi. Sifat-sifat matriks eselon baris adalah:

1. Pada setiap baris, entri tak nol yang pertama adalah angka 1 . Angka 1 ini disebut 1 utama.
2. Jika terdapat baris nol maka baris tersebut diletakkan pada baris yang terbawah.
3. Pada dua baris yang berurutan letak 1 utama nya maka 1 utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih ke kanan dari 1 utama dari baris yang di atasnya.

Proses operasi Sistem Persamaan Linier menjadi matriks lengkap dengan menggunakan semua sifat matriks eselon baris disebut Eliminasi Gauss.

Beberapa contoh matriks eselon baris[7] :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks eselon baris jika direduksi menjadi matriks eselon baris terduksi . Sifat-sifat matriks eselon baris terduksi adalah :

1. Semua sifat 1 sampai dengan 3 pada matriks eselon baris.
2. Pada setiap kolom yang terdapat 1 utama maka entri-entri lain adalah nol.

Beberapa contoh matriks eselon baris tereduksi :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Proses operasi Sistem Persamaan Linier menjadi matriks lengkap dengan menggunakan semua sifat matriks eselon baris tereduksi disebut Eliminasi Gauss-Jordan .

Langkah-langkah penyelesaian Eliminasi Gauss-Jordan [8]:

1. Tentukan Sistem Persamaan Linier
2. Tentukan matriks A , matriks X dan matriks B .
3. Tentukan matriks lengkap $\left[A|B\right]$ kemudian lakukan semua operasi baris elementer tereduksi .
4. Diperoleh X merupakan penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variable bebas.

Penerapan Sistem Persamaan Linier dalam 4 variabel bebas dengan menggunakan Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan[9]

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 + \quad x_4 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dimana

matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matriks lengkap $\left[A \middle| B \right]$ adalah $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

a. Penyelesaian dengan Eliminasi Gauss [10]

Langkah-langkahnya:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

menukarkan baris 1 ke baris 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

baris 2 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

baris 3 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & -12 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

baris 4 dikurang 4 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & -12 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & -22 \end{bmatrix}$$

baris 3 dikurang 2 kali baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & -22 \end{bmatrix}$$

baris 4 dikurang 3 kali baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -14 & 2 \end{bmatrix}$$

baris 4 dikali ½ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

baris 4 dikurang 3 kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

baris ke 4 dikali $\frac{1}{11}$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 2 dikali $-\frac{1}{3}$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Terlihat matriks koefisien A sudah membentuk matriks segitiga atas sehingga dapat ditentukan penyelesaiannya[11].

dari baris 4 diperoleh : $x_4 = -1$

dari baris ke 3 : $x_3 - 6x_4 = 4$ maka $x_3 = -2$

dari baris ke 2 : $x_2 + x_3 - \frac{8}{3}x_4 = \frac{8}{3}$ maka $x_2 = 2$

dari baris ke 1 : $x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$ maka $x_1 = 1$

Penyelesaian adalah $\{x_1 = 1\ , x_2 = 2\ , x_3 = -2\ , x_4 = -1\}$

atau ditulis dalam bentuk matriks $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

b. Penyelesaian dengan Metoda Eliminasi Gauss-Jordan

Metoda Eliminasi Gauss Jordan adalah penyempurnaan dari Metoda Eliminasi Gauss.

Dalam pengerjaannya dilakukan semua tahapan penyelesaian menggunakan Eliminasi Gauss yang dilanjutkan dengan substitusi balik sehingga menjadi Eliminasi Gauss Jordan.

Dari matriks lengkap dengan Eliminasi Gauss pada penyelesaian a. di atas diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi balik dengan langkah berikut:

baris 3 ditambah 6 kali baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

baris 2 ditambah $\frac{8}{3}$ baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

baris 1 ditambah 3 kali baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

baris 2 dikurang baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

baris 1 dikurang baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

baris 1 dikurang 2 kali baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks koefisien A yang berukuran 4x4 menjadi matriks Identitas dimana koefisien diagonal utama bernilai 1 dan koefisien yang lain bernilai 0.

Sehingga diperoleh solusi dengan menggunakan Eliminasi Gauss Jordan adalah:

, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ dan $x_4 = -1$.

Maka $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Hasil pengerjaan dengan menggunakan Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss Jordan menghasilkan solusi yang sama.

2.4. Penerapan pada Inventory

Sistem Persamaan Linier dengan banyak variabel bebas dapat ditemui pada permasalahan inventory [12].

Penerapan 1.

Setiap minggu Toko Grosir Maju menerima 4 merk biskuit bayi yaitu A,B,C dan D dengan total 200 pak. Minggu 1 di awal bulan Desember 2020 toko tersebut menjual biskuit A dan B seharga $1 , biskuit C seharga $3, dan biskuit D seharga $4 sehingga diperoleh $380. Minggu ke 2 toko mengorder biscuit A seharga $2 , biskuit B seharga $3 , biscuit C seharga $4 dan biscuit D seharga $5 dengan harapan memperoleh $ 620. Minggu ke 3 toko tersebut mengorder biscuit A seharga $2 , biscuit B seharga $3, biskuit C seharga $2 dan biscuit D seharga $1 dengan peroleh $520. Berapa banyak masing-masing merk biskuit yang harus diorder supaya toko tersebut membeli dengan jumlah yang sama selama 3 minggu.

Pertama ditentukan variable bebasnya yaitu biskuit A, B, C dan D. Disini ada 4 variabel bebas. Misalkan : $x =$ biskuit A , $y =$ biskuit B , $z =$ biskuit C dan $t =$ biskuit D.

Persamaan Linier I adalah : $x + y + z + t = 200$

Persamaan Linier II adalah : $x + y + 3z + 4t = 380$

Persamaan Linier III adalah : $2x + 3y + 4z + 5t = 620$

Persamaan Linier IV adalah : $2x + 3y + 2z + 4t = 520$

Maka Sistem Persamaan Linier 4 variabel bebas dapat ditulis:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 200 \\ x + y + 3z + 4t = 380 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 620 \\ 2x + 3y + 2z + 4t = 520 \end{cases}$$

Sistem Persamaan Linier ditulis dalam bentuk perkalian matriks AX = B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 380 \\ 620 \\ 520 \end{bmatrix}$$

dimana matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 200 \\ 380 \\ 620 \\ 520 \end{bmatrix}$

Matriks lengkap $\left[A \middle| B \right]$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 380 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 620 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 520 \end{bmatrix}$

Lakukan Eliminasi Gauss Jordan dengan cara sebagai berikut:

Baris 2 dikurang baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 620 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 520 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 220 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 520 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditukar dengan baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 80 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikali ½ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi mundur

Baris 3 dikurang baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang (2) kali baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikali ½ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Matriks koefisiennya berbentuk matriks Identitas dan matriks lengkap sudah membentuk matriks eselon baris tereduksi.

Diperoleh dari baris I: $x = 90$

baris II: $y = 40$

baris III: $z = 30$

baris IV: $t = 40$.

Jadi biskuit yang harus dipesan setiap minggu adalah:

- Biskuit merk A sebanyak 90 pak
- Biskuit merk B sebanyak 40 pak
- Biskuit merk C sebanyak 30 pak
- Biskuit merk D sebanyak 40 pak

Penerapan 2 .

Perusahaan Terang yang bergerak di bidang perlengkapan rumah tangga memiliki cabang di beberapa kota besar di Indonesia yaitu Jakarta, Surabaya , Medan dan Ujung Pandang. Perlengkapan rumah tangga yang dijual adalah sofa set, meja makan, lemari pakaian dan kitchen set. Inventori pada awal tahun 2020 adalah sebagai berikut:

- Jakarta : 225 sofa set, 180 meja makan, 170 lemari pakaian dan 200 kitchen set.
- Surabaya : 180 sofa set, 210 meja makan, 150 lemari pakaian dan 160 kitchen set.
- Medan : 210 sofa set, 175 meja makan, 145 lemari pakaian dan 150 kitchen set.
- Ujung Pandang : 175 sofa set, 155 meja makan, 160 lemari pakaian dan 140 kitchen set.

Harga sofa set adalah Rp 20 juta, meja makan Rp 12 juta, lemari pakaian Rp 6 jt dan kitchen set Rp 15 juta.

Hasil penjualan tiap kota pada tahun 2020 adalah sebagai berikut:

- Jakarta : 213 sofa set, 155 meja makan, 162 lemari pakaian dan 175 kitchen set.
- Surabaya : 165 sofa set, 202 meja makan, 130 lemari pakaian dan 144 kitchen set.
- Medan : 187 sofa set, 156 meja makan, 143 lemari pakaian dan 121 kitchen set.
- Ujung Pandang : 147 sofa set, 145 meja makan, 152 lemari pakaian dan 128 kitchen set.

Manajemen ingin mengetahui hal-hal berikut:

a. Nilai inventori .
b. Pendapatan kotor tiap cabang pada tahun 2020.
c. Biaya yang ditanggung untuk sisa inventori pada tahun 2020.

Pertama ditentukan variable bebas :

- sofa set sebagai variable bebas x
- meja makan sebagai variable bebas y
- lemari pakaian sebagai variable bebas z
- kitchen set sebagai variable bebas t.

Persamaan Linier I (Jakarta/J) : $225x + 180y + 170z + 200t = J$
Persamaan Linier II (Surabaya/S) : $180x + 210y + 150z + 160t = B$
Persamaan Linier III (Medan/M) : $210x + 175y + 145z + 150t = M$
Persamaan Linier IV (U.Pandang/U) : $175x + 155y + 160z + 140t = U$

Maka Sistem Persamaan Linier 4 variabel bebas utk permasalahan inventori di atas dapat ditulis:

$$\begin{cases} 225x + 180y + 170z + 200t = J \\ 180x + 210y + 150z + 160t = B \\ 210x + 175y + 145z + 150t = M \\ 175x + 155y + 160z + 140t = U \end{cases}$$

a. Matriks inventori : $\begin{bmatrix} 225 & 180 & 170 & 200 \\ 180 & 210 & 150 & 160 \\ 210 & 175 & 145 & 150 \\ 175 & 155 & 160 & 140 \end{bmatrix}$

$$\text{Matriks harga} = \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \\ \end{bmatrix}$$

Nilai Inventori = Matriks Inventori dikali Matriks Harga

$$= \begin{bmatrix} 225 & 180 & 170 & 200 \\ 180 & 210 & 150 & 160 \\ 210 & 175 & 145 & 150 \\ 175 & 155 & 160 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \\ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.680.000.000 \\ 9.420.000.000 \\ 9.420.000.000 \\ 8.420.000.000 \\ \end{bmatrix}$$

Nilai Inventori utk masing-masing cabang adalah:

- Jakarta : Rp10.680.000.000
- Medan : Rp 9.420.000.000
- Bandung : Rp 9.420.000.000
- Ujung Pandang : Rp 8.420.000.000

b. Matriks penjualan $= \begin{bmatrix} 213 & 155 & 162 & 175 \\ 165 & 202 & 130 & 144 \\ 187 & 156 & 143 & 121 \\ 147 & 145 & 152 & 128 \end{bmatrix}$

Pendapatan kotor setiap cabang pada tahun 2020 diperoleh dari matriks penjualan dikali dengan matriks harga,

$$= \begin{bmatrix} 213 & 155 & 162 & 175 \\ 165 & 202 & 130 & 144 \\ 187 & 156 & 143 & 121 \\ 147 & 145 & 152 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.717.000.000 \\ 8.644.000.000 \\ 8.285.000.000 \\ 7.512.000.000 \end{bmatrix}$$

Jadi pendapatan kotor untuk masing-masing cabang pada tahun 2020 sebagai berikut:

- Jakarta : Rp 9.717.000.000
- Medan : Rp 8.644.000.000
- Bandung : Rp 8.285.000.000
- Ujung Pandang : Rp 7.512.000.000

c. Sisa inventori pada akhir tahun 2020 di tiap cabang diperoleh dari Matriks Inventori – Matriks penjualan terjual

$$= \begin{bmatrix} 225 & 180 & 170 & 200 \\ 180 & 210 & 150 & 160 \\ 210 & 175 & 145 & 150 \\ 175 & 155 & 160 & 140 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 213 & 155 & 162 & 175 \\ 165 & 202 & 130 & 144 \\ 187 & 156 & 143 & 121 \\ 147 & 145 & 152 & 128 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 25 & 8 & 25 \\ 15 & 18 & 20 & 16 \\ 23 & 19 & 2 & 29 \\ 28 & 10 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Biaya yang ditanggung untuk sisa inventori, diperoleh dari sisa inventori dikali dengan harga, yaitu:

$$= \begin{bmatrix} 12 & 25 & 8 & 25 \\ 15 & 18 & 20 & 16 \\ 23 & 19 & 2 & 29 \\ 28 & 10 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 963.000.000 \\ 756.000.000 \\ 1.135.000.000 \\ 908.000.000 \end{bmatrix}$$

Jadi biaya yang ditanggung masing-masing cabang adalah:

- Jakarta : Rp 963.000.000
- Medan : Rp 756.000.000
- Bandung : Rp 1.135.000.000
- Ujung Pandang : Rp 908.000.000

Penerapan 3.

Pada suatu daerah mempunyai 3 kecamatan yaitu F, M dan C dimana setiap kecamatan mempunyai usaha yang berbeda . Kecamatan F warganya berusaha di bidang konveksi pakaian anak-anak, kecamatan M berusaha di bidang pertanian dan kecamatan C berusaha di bidang peralatan pertanian yang sederhana. Daerah ini menerapkan sistem barter untuk semua bidang usahanya.

Kecamatan F menggunakan setengah dari pakaian untuk digunakan sendiri dan memberikan seperempat hasil konveksi kepada masing-masing kecamatan M dan C. Hasil pertanian di kecamatan M dibagi merata untuk masing-masing kecamatan. Kecamatan C memberikan setengah dari hasil peralatan pertanian kepada kecamatan F dan sisanya dibagi rata untuk dua kecamatan yang lain.

Sistem barter tersebut dapat dituliskan dalam table

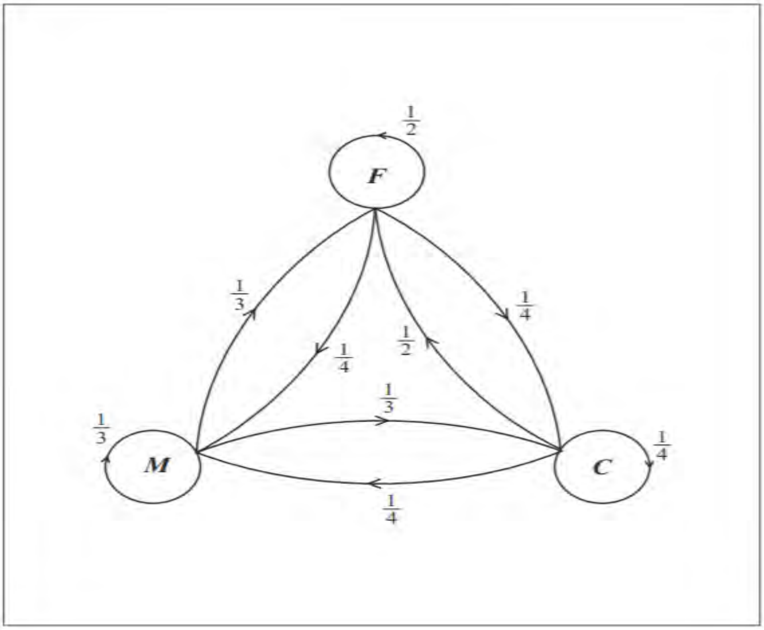
Tabel 2.1

Sistem Barter

	F	M	C
F	1/2	1/3	1/2
M	1/4	1/3	1/4
C	1/4	1/3	1/4

Masing-masing kolom menunjukkan distribusi usaha setiap kecamatan.

Barter ini menjadi tidak praktis jika terjadi penambahan penduduk setiap kecamatan sehingga diterapkan sistem keuangan untuk perdagangan dengan asumsi semua berjalan normal , tidak terjadi penimbunan modal dan harga yang wajar untuk setiap barang . Bagaimana memberikan nilai-nilai pada hasil usaha yang mewakili sistem barter yang berlaku. Alur sistem barter diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2. 1 Alur Sistem Barter

Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan Sistem Persamaan Linier dengan tiga variable bebas [13].
Variabel bebasnya adalah :

- variable 1 yaitu x_1 adalah nilai dari hasil konveksi
- variabel 2 yaitu x_2 adalah nilai hasil pertanian
- variabel 3 yaitu x_3 adalah nilai hasil peralatan pertanian.

Sistemnya dianggap adil sehingga nilai total barang-barang yang diterima oleh kecamatan F adalah x_1 .
Dari baris pertama di tabel diperoleh persamaan linier :

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1$$

maka

$$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0\,.$$

Nilai total barang-barang yang diterima oleh kecamatan M adalah x_2 .
Dari baris kedua di tabel diperoleh persamaan linier :

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2$$

$$\frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0$$

Nilai total barang-barang yang diterima oleh kecamatan C adalah x_3.
Dari baris ketiga di tabel diperoleh persamaan linier :

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_3$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0\,.$$

Sehingga ketiga persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk Sistem Persamaan Linier homogen dengan 3 variabel bebas:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistem Persamaan Linier di atas dituliskan dalam $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena ruas kanan semua bernilai nol atau $B = 0$ maka Sistem Persamaan Linier disebut Sistem Persamaan Linier Homogen. Sehingga matriks lengkap $\left[A|B\right]$ dalam pengerjaannya cukup matriks A yang dilakukan operasi Gauss Jordan.

Pada soal ini untuk menghindari perhitungan yang lebih lama maka angka pecahan sertiap baris dikalikan dengan bilangan tertentu yang tidak nol.

Baris 1 dikali dengan (-6) , baris ke 2 dikali dengan (12) dan baris ke 3 dikali dengan (12) sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & -8 & 3 \\ 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

Baris 3 ditambah baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikali dengan (-1/6) diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 ditambah dengan 2 kali baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikali dengan 1/3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada baris ketiga semua bernilai nol.
Dengan memisalkan variabel bebas $x_3 = 6$.
Dari persamaan kedua $x_2 - x_3 = 0$ maka $x_2 = x_3 = 6$.

Dari persamaan pertama $x_1 - \frac{5}{3}x_3 = 0$ maka $x_1 = \frac{5}{3}x_3 = 10$.

Akibatnya nilai-nilai x_1, x_2, x_3 diberikan dalam bentuk perbandingan
$x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 6 : 6 = 5 : 3 : 3$

2.5. Penerapan pada Rangkaian Listrik

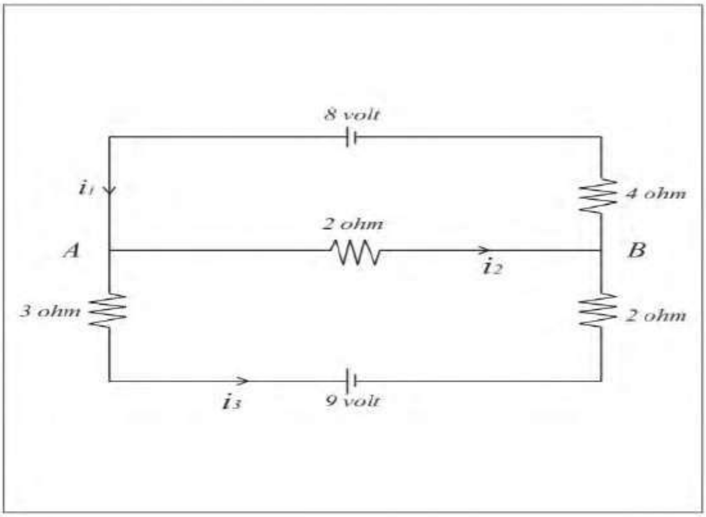
Sistem Persamaan Linier dapat digunakan untuk menentukan kuat arus di setiap cabang rangkaian listrik yang dinyatakan dalam resistansi dan tegangan. Sumber listrik adalah baterai yang digunakan untuk menggerakkan muatan dan menghasilkan arus. Arus mengalir keluar dari terminal yang digambarkan oleh garis vertical yang lebih panjang. Resistansi diukur dalam Ohm. Kode huruf menyatakan simpul (node) dan i adalah arus antar simpul yang dinyatakan dalam Ampere. Tanda panah menunjukkan arah arus. Jika arus bernilai negative menandakan bahwa arus sepanjang cabang itu berlawanan arah dengan tanda panah.

Untuk menentukan kuat arus arus digunakan Hukum Kirchhoff yaitu [14]:

1. Pada setiap simpul jumlah kuat arus yang masuk sama dengan jumlah kuat arus yang keluar.
2. Disetiap keliling simpul yang tertutup , jumlah aljabar tegangan harus sama dengan jumlah aljabar penurunan tegangan.

Penurunan tegangan E untuk setiap tahanan didasarkan pada hukum Ohm yaitu , dimana resistansi dalam Ohm.

Diketahui rangkaian listrik seperti di gambar di bawah ini, akan ditentukan kuat arus .



Gambar 2.2 Rangkaian Arus Listrik[15]

Dari hukum pertama Kirchoff diperoleh [16]:

$i_1 - i_2 + i_3 = 0$ (pada Simpul A)

$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (pada Simpul B)

Dari hukum kedua Kirchhoff diperoleh:

$4i_1 + 2i_2 = 8$ (pada simpul atas)

$2i_2 + 5i_3 = 9$ (pada simpul atas)

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk Sistem Persamaan Linier dalam 3 variabel:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 4i_1 + 2i_2 = 8 \\ 2i_2 + 5i_3 = 9 \end{cases}$$

Sistem Persamaan ditulis dalam bentuk $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Matriks lengkap $[A : B]$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

Untuk menentukan kuat arus, dilakukan Operasi Gauss Jordan sebagai berikut:

Baris 2 ditambah dengan baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditukar dengan baris ke 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang dengan 4 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang dengan 3 kali baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikali dengan $\left(-\frac{1}{19}\right)$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 5 kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikali dengan ½ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris 3 diperoleh $i_3 = 1$ Ampere
Dari baris 2 diperoleh $i_2 = 2$ Ampere
Dari baris 1 diperoleh persamaan $i_1 - i_2 = -1$
maka $i_1 = -1 + 2 = 1$ Ampere

BAB 3
SISTEM PERSAMAAN LINIER BANYAK VARIABEL BEBAS DENGAN MENGGUNAKAN INVERS

3.1 Menentukan Invers dengan menggunakan Matriks Elementer

Jika A sebuah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dan matriks B juga berukuran $n \times n$ dapat ditentukan sehingga $AB = BA = I_n$, maka B disebut invers dari A. Invers dari matriks A ditulis A^{-1}.

I_n adalah matriks identitas utk matriks berukuran $n \times n$.

Jika A mempunyai invers maka $A^{-1}. A = I_n$.[17]

Matriks yang mempunyai invers disebut matriks tak singular, dan jika tidak mempunyai invers maka disebut matriks singular. Jika suatu matriks mempunyai invers maka inversnya adalah tunggal.

Matriks identitas [18] adalah matriks bujur sangkar dimana koefisien diagonal utama bernilai satu dan koefisien lain adalah nol.

Matriks identitas I_n untuk 3×3 adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks identitas I_n untuk 4×4 adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks identitas I_n untuk $n \times n$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Salah satu metode untuk menentukan invers suatu matriks adalah menggunakan Matriks Elementer dimana matriks bujur sangkar yang diperoleh dari matriks identitas yang bersesuaian yang telah dilakukan hanya oleh satu operasi baris elementer saja.

Matriks Elementer $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ diperoleh dari matriks identitas I_3 dengan menjumlahkan baris ke 3 dengan -4 kali baris ke 2.

Untuk menentukan Invers matriks [19] A atau A^{-1} tentukan terlebih dahulu matriks identitas yang bersesuaian dengan ukuran matriks A, kemudian tuliskan matriks lengkap dalam bentuk $\left[A\ :\ I_n\ \right]$ *OBE* $\left[\ I_n\ :A^{-1}\right]$.

Selanjutnya dilakukan operasi baris elementer secara bersamaan antara matriks A dengan matriks identitas I_n yang bersesuaian dengan tujuan merubah matriks A menjadi matriks I_n dan akibatnya diperoleh perubahan matriks identitas I_n menjadi matriks A^{-1}. Akibatnya jika matriks A tidak dapat berubah menjadi matriks identitas I_n maka matriks A disebut tidak mempunyai invers.

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Untuk menentukan invers A dilakukan dengan langkah berikut.

Matriks identitas yang bersesuaian adalah $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Tulisakan matriks lengkap $\left[A \ : I_3\right]$

$$\left[A \ : I_3\right] \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 : & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

Tukarkan baris 1 dan baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 : & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 : & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 ditambah 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 : & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 10 : & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang baris 2 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 3 dikali $\frac{1}{23}$ diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{23} & \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \end{array}\right]$$

Baris 2 ditambah 13 baris 3 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10/23 & -64/23 & 13/23 \\ 0 & 0 & 1 & -1/23 & 5/23 & 1/23 \end{array}\right]$$

Baris 1 dikurang 4 baris 3 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 4/23 & 3/23 & -4/23 \\ 0 & 1 & 0 & 10/23 & -64/23 & 13/23 \\ 0 & 0 & 1 & -1/23 & 5/23 & 1/23 \end{array}\right]$$

Diperoleh matriks lengkap $\left[I_3 : A^{-1} \right]$.
Posisi awal A menjadi I_3 dan posisi I_3 menjadi suatu matriks yang merupakan invers dari A .

Jadi invers $A = A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/23 & 3/23 & -4/23 \\ 10/23 & -64/23 & 13/23 \\ -1/23 & 5/23 & 1/23 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 10 & -64 & 13 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan invers matriks A yang berukuran 4 x 4 dilakukan dengan cara yang sama. Matriks Identitas yang

digunakan adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Menentukan invers A sebagai berikut.

Bentuk matriks lengkap $\left[A \ : \ I_4\right]$ kemudian lakukan Operasi Baris Elementer

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 ditukar dengan baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 4 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 2 dikali $\left(-\frac{1}{9}\right)$ diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 3 dikurang 2 kali baris ke 2 diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 4 ditambah kali baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & : & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{17}{9} & : & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang kali baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & : & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{17}{9} & : & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikali 9 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{17}{9} & : & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang $\frac{41}{9}$ kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & : & -10 & 20 & -\frac{41}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang $\frac{4}{9}$ kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & : & -1 & 2 & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & : & -10 & 20 & -\frac{41}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang $\frac{2}{9}$ kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & : & -\frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & : & -1 & 2 & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & : & -10 & 20 & -\frac{41}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikali $\frac{1}{30}$ diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & 1 \end{array}\right]$$

Baris 3 ditambah 7 kali baris 4 diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{17}{270} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{array}\right]$$

Baris 2 dikurang 3 kali baris 4 diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{90} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{17}{270} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{array}\right]$$

Baris 1 dikurang 2 kali baris 4 diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{82}{270} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & \frac{1}{90} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{17}{270} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{array}\right]$$

Diperoleh matriks lengkap $\left[\, I_4 \;:\; A^{-1} \,\right]$

Maka invers dari $A = \ A^{-1} = \dfrac{1}{270}\begin{bmatrix} 60 & 90 & 82 & -18 \\ 0 & 0 & 3 & -27 \\ -90 & 180 & -17 & 0 \\ -90 & 180 & -41 & 9 \end{bmatrix}$

3.2 Solusi Sistem Persamaan Linier dengan Menggunakan Invers

Tinjau Sistem Persamaan Linier n variabel bebas berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dapat dituliskan dalam bentuk $AX = B$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ adalah matriks koefisien yang berukuran $n \times n$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$ matriks berukuran $n \times 1$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$ matriks berukuran $n \times 1$

Jika matriks A dapat dibalik maka sistem persamaan linier $AX = B$ tepat mempunyai satu solusi atau penyelesaian . Jika A^{-1} adalah invers dari matriks A maka solusi penyelesaian sistem persamaan linier $AX = B$ diperoleh dengan mengalikan A^{-1} pada masing-masing ruas persamaan, yang diperoleh dengan cara :

$AX \quad = B$

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, karena $(A^{-1}A) = I_n$ maka

$I_n \; X = A^{-1}B$

$$X \quad = A^{-1} B$$

Jadi solusi atau penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan invers adalah $X = A^{-1} B$.
(Persamaan 3.1)

Pada kasus Sistem Persamaan Linier dalam 4 variabel bebas akan ditentukan penyelesaiannya dengan menggunakan Invers.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 + \; x_4 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases} .$$

Dimana $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matriks identitas yang bersesuian , yaitu $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tuliskan matriks lengkap $\left[A \ : \ I_4 \ \right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Selanjutnya lakukan Operasi Baris Elementer dengan langkah berikut:

Menukarkan baris 1 dan baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 2 kali baris 1 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baris 3 dikurang dengan 3 kali baris 1 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & : & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang dengan 4 kali baris 1 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & : & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & : & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang dengan 2 kali baris 2 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & : & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang dengan 3 kali baris 2 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -14 & : & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang dengan 6 kali baris 3 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & : & 9 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditambah dengan 3 kali baris 3 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & : & 9 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang dengan baris 3 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & : & 9 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikali dengan $\frac{1}{22}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & -\frac{4}{22} & -\frac{6}{22} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Baris 3 ditambah dengan 6 kali baris 4 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{18}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & -\frac{4}{22} & -\frac{6}{22} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditambah dengan 10 kali baris 4 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & : & -\frac{10}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{63}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{18}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & -\frac{2}{22} & \frac{3}{22} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Baris ke 1 dikurang dengan 3 kali baris 4 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & : & \frac{17}{22} & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -\frac{3}{22} \\ 0 & -3 & 0 & 0 & : & -\frac{10}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{63}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{18}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & -\frac{2}{22} & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Baris ke 2 dikali dengan $\left(-\frac{1}{3}\right)$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & : & \frac{17}{22} & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -\frac{3}{22} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -\frac{10}{33} & -\frac{3}{11} & -\frac{21}{11} & -\frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{18}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & -\frac{2}{22} & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Baris ke 1 dikurang dengan 2 kali baris ke 2 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{121}{726} & 0 & 2 & -\frac{77}{726} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & \frac{10}{33} & \frac{3}{11} & -\frac{21}{11} & -\frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{18}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Invers dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{121}{726} & 0 & 2 & -\frac{77}{726} \\ \frac{10}{33} & \frac{3}{11} & -\frac{21}{11} & -\frac{5}{33} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{18}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{9}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{726}\begin{bmatrix} 121 & 0 & 1452 & -77 \\ 220 & 198 & -1.386 & -110 \\ 330 & -66 & 1.188 & 132 \\ 297 & -132 & 198 & 33 \end{bmatrix}$$

Solusi Sistem Persamaan Linier adalah $X \quad A \quad B$, sehingga diperoleh

$$X = \frac{1}{726}\begin{bmatrix} 121 & 0 & 1.452 & -77 \\ 220 & 198 & -1.386 & -110 \\ 330 & -66 & 1.188 & 132 \\ 297 & -132 & 198 & 33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{726}\begin{bmatrix} (121\times 4) + 0 + (1.452\times 6) - (77\times 2) \\ (220\times 4) + (198\times 6) - (1.386\times 6) - (110\times 2) \\ (330\times 4) - (66\times 6) + (1.188\times 6) + (132\times 2) \\ (297\times 4) - (132\times 6) + (198\times 6) + (33\times 2) \end{bmatrix}$$

Maka penyelesaian Sistem Persamaan Linier adalah

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{726}\begin{bmatrix} 9.042 \\ -8.844 \\ 8.316 \\ 1.680 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{9.042}{726} \\ -\dfrac{8.844}{726} \\ \dfrac{8.316}{726} \\ \dfrac{1.680}{726} \end{bmatrix}$$

3.3 Penerapan Masalah Encoding dan Decoding

Teori Penerimaan Pesan (*Audience Reception Theory* atau *Reception Theory*) adalah teori yang menekankan pada peran pembaca atau khalayak dalam menerima pesan. Dalam teori yang dikemukakan oleh Stuart Hall, proses komunikasi (*encoding* dan *decoding*) berlangsung lebih kompleks. Encoding [20] merupakan proses membuat pesan yang sesuai dengan kode tertentu, sedangkan decoding merupakan proses menggunakan kode untuk memaknai pesan . Encoding dan Decoding mempunyai struktur makna yang tidak selalu simetris. Derajat simetri (simetris atau tidak simetrisnya pertukaran komunikasi) bergantung pada kesetaraan hubungan yang dibentuk antara pemberi pesan dan penerima pesan (pembuat kode dan penerima kode). Encoding biasa digunakan untuk merahasiakan pesan sehingga hanya penerima saja yang mengetahui. Decoding adalah proses menerjemahkan pesan yang telah di encoding sehingga dapat diterima pesan yang sesungguhnya.

Dalam kasus berikut, diberikan kode rahasia dalam bentuk huruf berikut:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
01	02	03	04	05	06	07	08	09
j	k	l	m	n	o	p	q	r
10	11	12	13	14	15	16	17	18
s	t	u	v	w	x	y	z	spasi
19	20	21	22	23	24	25	26	27

Contoh pesan rahasia yang akan disampaikan oleh seorang komandan kepada anggota pasukannya adalah "bawa ke buritan". Pesan tersebut akan disampaikan tanpa encoding oleh huruf-huruf di atas sebagai berikut:

02 01 23 01 27 11 05 27 02 21 18 09 20 01 14

Untuk menjaga kerahasiaan pesan tersebut komandan menggunakan sistem encoding dan decoding , dengan langkah sebagai berikut:

Jika matriks encoding $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

maka pesan yang terkirim akan menjadi seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 72 \\ 31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 27 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 61 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 38 \\ 71 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 66 \\ 108 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 63 \\ 76 \end{bmatrix}$$

Hasil encodingnya adalah :

28 72 31 40 61 68 39 28 71 69 66 109 55 63 76

Selanjutnya ditentukan invers matriks encodingnya, karena matriks A berukuran 3x3 maka matriks identitas yang digunakan adalah

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tulis matriks lengkap $\left[A\ :\ I_3\ \right]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1: & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3: & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1: & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya lakukan Operasi Baris Elementer sehingga hasil akhir berbentuk $\left[I_3\ : A^{-1}\right]$.

Baris 1 ditukar dengan baris 2, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3: & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1: & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1: & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3: & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5: & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1: & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3: & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5: & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -8: & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3: & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5: & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3: & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 ditambah baris 2 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Untuk menghindarkan perhitungan dengan menggunakan pecahan, kolom ke 3 dikalikan dengan Kelipatan Persekutuan Terbesar (KPK) , yaitu baris 1 dikali dengan 15, baris 2 dikali (-6), dan baris 3 dikali 10 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 15 & 0 & -30 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 30 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & -10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

Baris 2 ditambah baris 3 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 15 & 0 & -30 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -16 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & -10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

Baris 1 dikurang baris 3 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 15 & 0 & 0 & 25 & -5 & -10 \\ 0 & 6 & 0 & -16 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & -10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

Baris 1 dikali 1/15 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 6 & 0 & -16 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & -10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

Baris 1 dikali 1/6 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -8/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -30 & : & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikali (- 1/30) diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -8/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Langkah ini menghasilkan bentuk $\left[I_3 : A^{-1} \right]$.
Maka Invers matriks encoding adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pihak penerima pesan untuk membaca pesan harus mengubah pesan yang diterima dengan proses decoding dengan cara mengalikan pesan yang sudah diencoding dengan invers matriks encodingnya, yang diperoleh sebagai berikut:

$$1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 72 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$1/3\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ 61 \\ 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 27 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$1/3\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 39 \\ 38 \\ 71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$1/3\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 69 \\ 66 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$1/3\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 55 \\ 63 \\ 76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Maka pesan aslinya dapat diketahui si penerima dan pengirim pesan.

BAB 4
SISTEM PERSAMAAN LINIER BANYAK VARIABEL BEBAS DENGAN MENGGUNAKAN METODA CRAMER

4.1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Determinan suatu matriks bujur sangkar [21] A = det. A , ditulis $|A|$. Salah satu cara untuk menghitung determinan adalah menggunakan Ekspansi Kofaktor terhadap satu baris atau satu kolom.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Untuk menentukan determinan A jika digunakan ekspansi kofaktor terhadap baris 1 maka [17]

det. A = $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

dimana C_{11}, C_{12}, C_{13} adalah kofaktor yang bersesuaian dengan elemen-elemen.

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$,

M_{11} adalah Minor yg diperoleh dengan mencoret baris ke 1 dan kolom 1. $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$.

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$

M_{12} adalah Minor yg diperoleh dengan mencoret baris ke 1 dan kolom 2. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$.

$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$,

M_{13} adalah Minor yg diperoleh dengan mencoret baris ke 1 dan kolom 3. $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$.

Jika $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, maka

det. A terhadap ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i adalah :

$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$ (Persamaan 4.1)

det. A terhadap ekspansi kofaktor sepanjang baris ke j adalah :

$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$ (Persamaan 4.2)

Jika $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, maka Minor dari a_{ij} dilambangkan dengan M_{ij} adalah determinan dari submatriks Ayang diperoleh dengan mencoret elemen-elemen pada baris i dan kolom ke j [18][22].

Kofaktor dari a_{ij} ditulis $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

(Persamaan 4.3)

Pada kasus jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Determinan A ditentukan dengan menggunakan ekspansi terhadap baris ke 2. Maka det. A =

$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$

$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(-5-6) = 11$.

$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (10-3) = 7$.

$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+1) = -5$.

Maka det. A = $|A| = 3.(11) + 0.(7) + 1.(-5) = 33 - 5 = 28$

Kasus jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinan A jika dilakukan ekspansi sepanjang kolom ke 3, maka

$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[(2-12+0) - (0+2-8)\right] = -4$$

$C_{13} = (-1)^4 M_{13} = -4$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[(12+6+16)-(24+4+12)\right] = -6$$

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -(-6) = 6$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[(12+0+4)-(24+0+3)\right] = -11$$

$$C_{33} = (-1)^6 M_{33} = 11$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left[(8+0+8)-(32+0+6)\right] = -22$$

$$C_{43} = (-1)^7 M_{43} = -(-22) = 22$$

$$|A| = (0).(-4)+(3).(6)+(1).(11)+(2).(22) = 73$$

4.2. Determinan dengan Menggunakan Sifat-sifat Determinan

Untuk menentukan determinan matriks yang berukuran lebih dari 3x3 akan lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat determinan. Sifat-sifat determinan sebagai berikut:

1. det. (AB) = det. (A) det. (B).
2. det. $(A)^T$ = det. (A).

Jika $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

3. Jika matriks segitiga atas $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka nilai determinan adalah perkalian elemen-elemen diagonal utamanya.
   Jadi det.$(A) = (a_{11}).(a_{22}).(a_{33})\dots.(a_{nn})$.

4. Jika $A_{n\times n}$, maka det.$(kA) = k^n$ det.(A).

   Jika $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

   maka det $(2A) = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

5. det.$(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, untuk det.$(A) \neq 0$.

6. Jika matriks A memuat baris atau kolom nol, maka nilai det. $(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. Jika menukarkan letak 2 baris atau kolom dari matriks A maka nilai det.(A) menjadi negative dari determinan semula.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Jika dilakukan penjumlahan baris dengan kelipatan baris yang lain pada matriks A maka nilai determinan tidak berubah (tetap).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-3a_{11} & a_{22}-3a_{12} & a_{23}-3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. Jika matriks A memuat dua baris atau kolom yang sama atau berkelipatan maka nilai det.$(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Karena baris ke 2 dan ke 3 berkelipatan maka nilai determinan = 0.

Untuk kasus matriks yang berukuran 3x3, akan ditentukan determinannya dengan menggunakan sifat determinan.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & -9 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & 12 \end{vmatrix}$$

(sifat 7: menukarkan baris 1 dan ke dua)

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : 3 kali baris ke 3)

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -14 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8: $b_2 - 3b_1$)

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -14 \\ 0 & -9 & -4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8: $b_3 - 2b_1$)

$$= -3.(-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -9 & -4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : (-4) baris ke 2)

$$= 12.\left(\frac{1}{9}\right)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 18 & 56 \\ 0 & -9 & -4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris ke 2 dikali 9 maka det. menjadi 1/9 determinan semula)

$$= 12.\left(\frac{1}{9}\right).\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 18 & 56 \\ 0 & 18 & 8 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris ke 3 dikali (-2) maka det menjadi ($-\frac{1}{2}$) determinan semula)

$$=\left(\frac{1}{9}\right).(-6)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 18 & 56\\0 & 0 & -48\end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : $b_3 - b_2$)

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)(1)(18)(-48)$$ (sifat ke 3 : perkalian elemen diagonal utama)

$$=576$$

Untuk kasus matriks berukuran 5x5, dimana

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 0 & 5\\-3 & 4 & 2 & 3 & 1\\4 & 2 & -6 & 8 & 10\\1 & 0 & 2 & 4 & 3\\2 & 3 & -2 & 3 & 4\end{vmatrix}.$$

Nilai determinan matriks A ditentukan dengan menggunakan sifat- sifat determinan dengan langkah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 0 & 5\\-3 & 4 & 2 & 3 & 1\\4 & 2 & -6 & 8 & 10\\1 & 0 & 2 & 4 & 3\\2 & 3 & -2 & 3 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 4 & 3\\-3 & 4 & 2 & 3 & 1\\4 & 2 & -6 & 8 & 10\\2 & 3 & 1 & 0 & 5\\2 & 3 & -2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

(sifat ke 7 : menukarkan baris 1 dan baris 4)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 4 : baris ke 3 dikali dengan ½ , maka determinan menjadi 2 kali determinan semula)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 2 ditambah 3 kali baris 1)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 3 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 4 dikurang 2 kali baris1)

$$=-2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 5 dikurang 2 kali baris1)

$$= \quad 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 7 : menukarkan baris 2 dan 3)

(sifat ke 8 : baris 3 dikurang 4 kali baris2)

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 4 dikurang 3 kali baris2)

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 5 dikurang 3 kali baris2)

$$=2.(2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 4 : baris 4 dikali ½ maka nilai determinan menjadi 2 kali determinan sebelumnya)

$$=4.(28)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 4 : baris 3 dikali $\frac{1}{28}$ maka determinan menjadi 28 kali determinan sebelumnya)

$$=4.(28)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{38}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 4 dikurang 6 kali baris 3)

$$=4.(28)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{38}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{28} & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 5 dikurang 11 kali baris 3)

$$=4.(28).\left(\frac{38}{28}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{28} & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$

(sifat ke 4 : baris 4 dikali $\frac{38}{28}$ maka determinan menjadi $\frac{38}{28}$ determinan sebelumnya).

$$=4.(38)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris ke 5 dikurang $\frac{28}{53}$ kali baris ke 4).

$=4.(38)$.(1).(1).(1).(1).($-—$) $= -684$.

Pada kasus jika diketahui determinan $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -8$.

Akan ditentukan determinan dari

$$\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan sifat-sifat determinan .

Langkahnya sebagai berikut:

$$-8 = -\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ e & f & g & h \\ e+2a & f+2b & g+2c & h+2d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$-8 = -\left(\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$-8 = -\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$-8 = -\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Maka $\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

$= (-12).(-8) = 96$

4.3. Solusi Sistem Persamaan Linier dengan Metoda Cramer

Jika $A = \left[a_{ij} \right]$ adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dan C_{ij} kofaktor dari a_{ij}. Maka matriks

$B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks kofaktor dari

A.Transpose dari matriks kofaktor A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut adjoint dari A, ditulis $adj(A)$.

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Menentukan matriks kofaktornya sebagai berikut.

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-6-20) = -26$$

$$C_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(9-20) = 11$$

$$C_{13} = (-1)^4 M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = (15+10) = 25$$

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(6-15) = 9$$

$$C_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (3-15) = -12$$

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -(5-10) = 5$$

$$C_{31} = (-1)^4 M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (8+6) = 14$$

$$C_{32} = (-1)^5 M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-9) = 5$$

$$C_{33} = (-1)^6 M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(5-10) = 5$$

Kofaktor dari $A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -26 & 11 & 25 \\ 9 & -12 & 5 \\ 14 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Adjoint $A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -26 & 9 & 14 \\ 11 & -12 & 5 \\ 25 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Adjoint A dapat digunakan untuk menentukan Invers dari matriks A yaitu:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} .adj(A)$ (Persamaan 4.4)

Pada kasus $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Untuk menentukan A^{-1} dengan menggunakan $adj(A)$ dilakukan dengan cara berikut.

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) - (1-6) = 6 + 5 = 11$$

$$C_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\{(4-1) - (-4-3) - 3(2+6)\}$$

$$= -(3 + 7 - 24) = 14$$

$$C_{13} = (-1)^4 M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4-3) - (-2+9) + 2(-1-6)$$

$$= 2(-7) - (7) + 2(-7) = -14 - 7 - 14 = -35$$

$$C_{14} = (-1)^5 M_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{ (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\{(-2)(2+1) + 2(-1-6)\}$$

$$= -(-6+14) = -8$$

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\{(4-1) + (-1+4)\}$$

$$= -(3+3) = -6$$

$$C_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) + (-4-3) + 2(2+6)$$

$$= 2(3) + (-7) + 2(8) = 6 - 7 + 16 = 15$$

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\{(-2)(-2+2) - (-2-3)\}$$

$$= -(0+5) = -5$$

$$C_{24} = (-1)^6 M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) + (-4-3) + 2(2+6)$$

$$= 2(3) + (-7) + 2(8) = 6 - 7 + 16 = 15$$

$$C_{31} = (-1)^4 M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-2+3) + (-4-3) + 2(2+1)$$

$$= (1-7+6) = 0$$

$$C_{32} = (-1)^5\, M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{ (2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\{(-2)(-2+2) - (-2-3)\}$$

$$= -(0+5) = -5$$

$$C_{33} = (-1)^6\, M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4-3) - (-2+9) + 2(-1-6)$$

$$= (-14-7-14) = -35$$

$$C_{34} = (-1)^4\, M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2+1) - (1-3) - (-1-6)$$

$$= (6 + 2 + 7) = 15$$

$$C_{41} = (-1)^5 M_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\{(1-6) - 2(-1+4)\}$$

$$= -(-5-6) = 11$$

$$C_{42} = (-1)^6 M_{42} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-6) + (1+6) + 2(-2-2)$$

$$= (-10 + 7 - 8) = -11$$

$$C_{43} = (-1)^7 M_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{ 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\{2(2) - (-1+6) + 2(-4)\}$$

$$= -(4-5-8) = 9$$

$$C_{44} = (-1)^8 M_{44} = . \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4) - (-2-2) - (-4)$$

$$= (-8+4+4) = 0$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 & 0 & 11 \\ 14 & 15 & -5 & -11 \\ -35 & -5 & -35 & 9 \\ -8 & 15 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}$$
$$= (2)(0) + 0 - 2(-35) + (15) = 85$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} .adj(A)$$

$$= \frac{1}{85} \begin{bmatrix} 11 & -6 & 0 & 11 \\ 14 & 15 & -5 & -11 \\ -35 & -5 & -35 & 9 \\ -8 & 15 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaikan Sistem Persamaan Linier dalam n variable bebas dapat menggunakan determinan .

Dari persamaan (3.1) $X = A^{-1}B$

dan dari persamaan (4.4)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, .adj(A)$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$, maka $x_j = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{1j} & C_{2j} & \cdots & C_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{\det(A)} \left[C_{1j} b_1 + C_{2j} b_2 + \dots + C_{nj} b_n \right]$$

maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal. Sehingga diperoleh penyelesaiannya adalah:

$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$, ..., $x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ dengan $|A| \neq 0$.

Matriks A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti elemen kolom ke j dari A dengan elemen pada matriks B.

Jika $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

maka $|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_2 \dots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Aturan penyelesaian Sistem Persamaan Linier ini disebut Aturan Cramer atau Metoda Cramer.
Secara umum penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan

Aturan Cramer ditulis $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$, $j = 1, 2 \dots, n$ dimana $|A| \neq 0$ (Persamaan 4.5)

Pada kasus Sistem Persamaan Linier $\begin{cases} -2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$

Menetukan solusi SPL dengan menggunakan Metoda Cramer dilakukan sebagai berikut.
Tulis dalam bentuk persamaan $AX = B$, dimana

Dimana $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

Maka $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor

$$= (-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(6+3) - 3(9-6) - (-3-4)$$

$$= (-2)(9) - 3(3) - (-7)$$

$$|A| \quad = -18 - 9 + 7 = -20$$

Determinan A_1 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B

Maka $|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (4)(6+3) - 3(3-6) - (-1-4)$$

$$= (4)(9) - 3(-3) - (-5)$$

$$|A_1| \quad = 36 + 9 + 5 = 50$$

Determinan A_2 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B

Maka $|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(3-6) - 4(9-6) - (6-2)$$
$$= (-2)(-3) - 4(3) - (4)$$
$$|A_2| \quad = 6 - 12 - 4 = -10$$

Determinan diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B

Maka $|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(4+1) - 3(6-2) + 4(-3-4)$$
$$= (-2)(5) - 3(4) + 4(-7)$$
$$|A_3| \quad = -10 - 12 - 28 = -50$$

Sehingga diperoleh :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{50}{-20} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-50}{-20} = \frac{5}{2}$$

Jadi solusi Sistem Persamaan Linier tersebut adalah

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Pada kasus Sistem Persamaan Linier $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 + \ x_4 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

Menentukan solusi SPL dengan menggunakan Metoda Cramer dilakukan sebagai berikut.

Tulis dalam bentuk persamaan $AX = B$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

maka determinan

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ (menukar baris 1 dan 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 \\ 0 & -9 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 4 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -9 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 3 kali baris 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 6 kali baris 3)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 6 kali baris 3)}$$

$$|A| = -(1).(-3).(1).(22) = 66$$

Determinan diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \text{ (menukar baris 1 dan 4)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (baris ke 2 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (baris ke 3 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$ (baris ke 4 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris ke 4 dikurang baris 3)

$$= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 2 kali dengan 3)

$$= \left(-\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{5}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 15 & -25 & 35 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 3 kali dengan 5)

$$= \left(-\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{5}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -19 & 26 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris ke 2)

$$= \left(-\frac{1}{15}\right).\left(\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -38 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali dengan 2)

$$=\left(\frac{1}{15}\right).\left(\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -38 & 52 \end{vmatrix}$$ (menukar baris 3 dan baris 4)

$$=\left(\frac{1}{15}\right).\left(\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{vmatrix}$$ (baris 4 ditambah 19 kali baris 3)

$$|A_1| = \left(\frac{1}{15}\right).\left(\frac{1}{2}\right).(2).(15).(2).(33) = 66$$

Determinan A_2 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ (menukar baris 1 dan 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 0 & -12 & -5 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 0 & -12 & -5 & 10 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang 4 kali baris 1)}$$

$$= -\left(\frac{1}{6}\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -48 & -18 & 48 \\ 0 & -12 & -5 & 10 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikali dengan 6)}$$

$$= -\left(\frac{1}{6}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -48 & -18 & 48 \\ 0 & -48 & -20 & 40 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikali dengan 4)}$$

$$= -\left(\frac{1}{6}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -48 & -18 & 48 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang baris 2)}$$

$$= -\left(\frac{1}{6}\right).(6).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikali 1/6)}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -88 & -33 & 88 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikali 11)}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & -88 & -12 & 40\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 4)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 21 & -48\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 2)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right).(-2)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 21 & -48\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali -1/2)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right).(-2).(3)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 7 & -16\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 1/3)

$$= \left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{2}\right).(3)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -44\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 7 kali baris 3)

$$|A_2| = \left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{2}\right).(3).(1).(-88).(1).(-44) = 132$$

Determinan diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ (menukar baris 1 dan 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 0 & -9 & -22 & 10 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 4 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & -9 & -22 & 10 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikurang 2 kali baris 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 3 kali baris 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikali dengan ½)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang baris 3)}$$

$$|A_3| = (-2).\,(1).(-3).(2).(-11) = -132$$

Determinan A_4 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 4 dengan B

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (menukar baris 1 dan 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \text{ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & -12 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (aris 3 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & -12 \\ 0 & -9 & -3 & -22 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 4 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -22 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikurang 2 kali baris 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 3 kali baris 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 6 kali baris 3)}$$

$$|A_4| = -(1).(-3).(1).(-22) = -66$$

Sehingga diperoleh :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{66}{66} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{132}{66} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-132}{66} = -2$$

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-66}{66} = -1$$

Jadi solusi Sistem Persamaan Linier tersebut adalah

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.4.Penerapan Masalah Real

Kasus 1

Ani, Dina, dan Cinta adalah 3 bersaudara. Jumlah usia mereka bertiga adalah 28 tahun. Jumlah usia Ani ditambah 2 tahun dan usia Dina ditambah 3 tahun sama dengan 5 tahun ditambah tiga kali usia Cinta. Dua kali usia Ani dikurangi usia Dina kemudian ditambah usia Cinta sama dengan 13 tahun. Urutkan usia mereka dari yang paling tua.

Misalkan usia Ani $= x$, usia Dina $= y$, dan usia Cinta $= z$
Diperoleh persamaan :

$$\begin{cases} x+y+z=28 \\ (x+2)+(y+3)=5+3z \\ 2x-y+z=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=28 \\ x+y-3z=0 \\ 2x-y+z=13 \end{cases}$$

Ditulis dalam Sistem Persamaan Linier $AX=B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Maka $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (baris 2 kurang baris 1)

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ (baris 3 kurang 2 kali baris 1)

$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ (baris 2 ditukar dengan baris 3)

$$|A|=(-).(1).(-3).(-4)=-12$$

Determinan A_1 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B (dengan menggunakan kofaktor)

Maka $|A_1| = \begin{vmatrix} 28 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 13 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (28)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 13\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (28)(1-3) + 13(-3-1)$$

$$|A_1| = (28)(-2) + 13(-4) = -56 - 52 = -108$$

Determinan A_2 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B (dengan menggunakan kofaktor)

Maka $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 13 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 28 & 1 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -(28-13) + 3(13-56)$$

$$|A_2| = -15 - 129 = -144$$

Determinan A_3 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B (dengan menggunakan kofaktor)

Maka $|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 28 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 13 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 28 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -(13+28)+(13-56)$$
$$|A_3| = -41-43 = -84$$

Sehingga diperoleh :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-108}{-12} = 9$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-144}{-12} = 12$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-84}{-12} = 7$$

Urutan usia mulai yang tertua adalah Dina, Ani dan Cinta

Kasus 2

Untuk keperluan konstruksi PT MAJU setiap minggu membeli 4 jenis semen grade A, B, C dan D. Minggu pertama membeli 10 sak semen grade A , 20 sak semen grade B, 10 sak semen grade C dan 10 sak semen grade D dengan jumlah $ 120. Minggu ke dua membeli 20 sak semen grade A , 10 sak semen grade B, 40 sak semen grade C dan 10 sak semen grade D dengan jumlah $ 120. Minggu ketiga membeli 20 sak semen grade A , 10 sak semen grade B, 10 sak semen grade C dan 30 sak semen grade D dengan jumlah $ 190. Minggu keempat membeli 30 sak semen grade A , 10 sak semen grade B, 20 sak semen grade C dan 20 sak semen grade D dengan jumlah $ 190. Akan ditentukan berapa harga masing-masing jenis semen tersebut.

Misalkan semen Grade A $= x_1$, semen Grade B $= x_2$, semen Grade C $= x_3$ dan semen Grade D $= x_4$

Dapat ditulis dalam Sistem Persamaan Linier

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 = 120 \\ 20x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 10x_4 = 120 \\ 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 30x_4 = 190 \\ 30x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4 = 190 \end{cases}$$

Menentukan solusi SPL dengan menggunakan Metoda Cramer dilakukan sebagai berikut.

Tulis dalam bentuk persamaan $AX = B$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 20 & 10 & 40 & 10 \\ 20 & 10 & 10 & 30 \\ 30 & 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 120 \\ 120 \\ 190 \\ 190 \end{bmatrix}$$

maka determinan A

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 20 & 10 & 40 & 10 \\ 20 & 10 & 10 & 30 \\ 30 & 10 & 20 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ (10 kali baris 1, baris 2 baris 3, baris 4)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 3 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali 5)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -15 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 3)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) . \left(\frac{1}{7}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 7)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) . \left(\frac{1}{7}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & -21 & 24 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 3)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) . \left(\frac{1}{7}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 3)

$$|A| = (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) . \left(\frac{1}{7}\right) . (1) . (-15) . (-21) . (10) = 300.000$$

Determinan A_1 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 120 & 20 & 10 & 10 \\ 120 & 10 & 40 & 10 \\ 190 & 10 & 10 & 30 \\ 190 & 10 & 20 & 20 \end{vmatrix}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 4 & 1 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 19 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ (10 kali baris 1, baris 2 baris 3, baris 4)

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 19 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang baris 1)

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 19 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang baris 1)

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 3)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right)\begin{vmatrix} 228 & 38 & 19 & 19 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 1 dikali 19)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix} 228 & 38 & 19 & 19 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 228 & 12 & 12 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 12)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & -26 & -7 & -17\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 1)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -85 & -17\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 26 baris 2)

$$=(-)(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -85 & -17\end{vmatrix}$$ (tukar baris 3 dan baris 4)

$$=(-)(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 68\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 85 baris 3)

$$|A_1| = =(-)(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)(228)(-1)(1)(68) = 680.000$$

Determinan diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B

$$|A_2| = \begin{vmatrix}10 & 120 & 10 & 10\\ 20 & 120 & 40 & 10\\ 20 & 190 & 10 & 30\\ 30 & 190 & 20 & 20\end{vmatrix} = (10)^4\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 2 & 12 & 4 & 1\\ 2 & 19 & 1 & 3\\ 3 & 19 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

(10 kali baris 1,2,3, dan 4)

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -12 & 2 & -1\\ 2 & 19 & 1 & 3\\ 3 & 19 & 2 & 2\end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -12 & 2 & -1\\ 0 & -5 & -1 & 1\\ 3 & 19 & 2 & 2\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 1)

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -12 & 2 & -1\\ 0 & -5 & -1 & 1\\ 0 & -17 & -1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 3 kali baris 1)

$$=(10)^4\left(-\frac{1}{17}\right)\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & 204 & -34 & 17\\ 0 & -5 & -1 & 1\\ 0 & -17 & -1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali - 17)

$$=(10)^4\left(-\frac{1}{17}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & 204 & -34 & 17\\ 0 & -5 & -1 & 1\\ 0 & -204 & -12 & -12\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 12)

$$=(10)\left(\frac{1}{17}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & 204 & 34 & 17\\ 0 & -5 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 46 & 5\end{vmatrix}$$ (baris 4 ditambah baris 2)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali -1/17)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -60 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali 5)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -60 & 10 & -5 \\ 0 & -60 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 12)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -60 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -22 & 17 \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 2)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)(22)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -60 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{22} \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 1/22)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)(22)(46)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -60 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{22} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{46} \end{vmatrix}$$

(baris 4 dikali 1/46)

$$=(10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)(22)(46)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -60 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{22} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{168}{253} \end{vmatrix}$$

(baris 4 dikurang baris 3)

$$|A_2| = (10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)(22)(46)(1)(-60)(-1)\left(\frac{168}{253}\right) = 560.000$$

Determinan A_3 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 120 & 10 \\ 20 & 10 & 120 & 10 \\ 20 & 10 & 190 & 30 \\ 30 & 10 & 190 & 20 \end{vmatrix}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\2 & 1 & 12 & 1\\2 & 1 & 19 & 3\\3 & 1 & 19 & 2\end{vmatrix}\text{(10 kali baris 1,2,3, dan 4)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -3 & -24 & -1\\2 & 1 & 19 & 3\\3 & 1 & 19 & 2\end{vmatrix}\text{(baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -3 & -24 & -1\\0 & -3 & -5 & 1\\3 & 1 & 19 & 2\end{vmatrix}\text{(baris 3 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -3 & -24 & -1\\0 & -3 & -5 & 1\\0 & -5 & -7 & -1\end{vmatrix}\text{(baris 4 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -3 & -24 & -1\\0 & 0 & 19 & 0\\0 & -5 & -7 & -1\end{vmatrix}\text{(baris 3 dikurang baris 2)}$$

$$=(10)^4\left(\frac{1}{5}\right)\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -15 & -120 & -5\\0 & 0 & 19 & 2\\0 & -5 & -7 & -1\end{vmatrix}.\text{ (baris 2 dikali 5)}$$

$$= (10)^4 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 2 \\ 0 & -15 & -21 & -3 \end{vmatrix}$$ (bis 4 dikali 3)

$$= (10)^4 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 2 \\ 0 & 0 & 99 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(19)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 99 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 1/19)

$$= (10)^4 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(19)(99)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{99} \end{vmatrix}$$

(baris 4 dikali 1/99)

$$= (10)^4 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(19)(99)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-160}{1.881} \end{vmatrix}$$

(baris 4 dikurang baris 3)

$$|A_3| = (10)^4 \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(19)(99)(1)(-15)(1)\left(-\frac{160}{1.881}\right) = 1.600.000$$

Determinan A_4 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 4 dengan B

$$|A_4| = |A| = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 10 & 120 \\ 20 & 10 & 40 & 120 \\ 20 & 10 & 10 & 190 \\ 30 & 10 & 20 & 190 \end{vmatrix} = (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 19 \end{vmatrix}$$

(10 kali baris 1,2,3, dan 4)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 19 \end{vmatrix}$$ (baris 2 di kurang 2 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & -12 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 19 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & -12 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali 5)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -15 & -3 & -51 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 3)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -13 & 9 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -39 & 91 \\ 0 & 0 & -13 & 9 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 13)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -39 & 91 \\ 0 & 0 & -39 & 27 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 3)

$$= (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -39 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 3)

$$|A_4| = (10)^4 . \left(\frac{1}{5}\right) . \left(\frac{1}{3}\right), (1) . (-15) . (-39) . (64) = 24.960.000$$

Maka $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{680.000}{300.000} =$ 2.27

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{560.000}{300.000} = \text{ 1.87}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1.600.000}{300.000} = \text{ 5.33}$$

$$x_4 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{24.960.000}{300.000} = \text{ 83.1}$$

Jadi harga semen grade A adalah $2.27, semen grade B adalah $1.87, semen grade C adalah $5.33 dan semen grade D adalah $83.1

DAFTAR PUSTAKA

[1] Zuhri, "Analisis Regresi Linier dan Korelasi menggunakan Pemrograman Visual Basic," *J. Ilman J. Ilmu Manaj.*, 2020.

[2] N. Nurmalasari, Y. Yanita, and I. M. Arnawa, "FAKTORISASI MATRIKS," *J. Mat. UNAND*, 2019.

[3] F. M. S. M. Fransiskus Fran, "BEBERAPA SIFAT KRONECKER PRODUCT," *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, 2019.

[4] M. Mahyudi and E. Endaryono, "LEARNING OBSTACLES KONSEP OPERASI BARIS ELEMENTER," *Indiktika J. Inov. Pendidik. Mat.*, 2020.

[5] E. J. Solaiman, "Modifikasi Metode Gauss atau Operasi Baris Elementer pada Solusi Sistim Persamaan Linier 3 Variabel dan 3 Persamaan," *TeIKa*, 2016.

[6] M. R. Nur and D. Rolliawati, "Prototipe Aplikasi Penghitung Matrik Berbasis Java," *Syst. Inf. Syst. Informatics J.*, 2018.

[7] Z. Zaini, "Model Penyelesaian Determinan Matriks dengan Metode Eliminasi Gauss Melalui Matrix Laboratory (MATLAB)," *JST (Jurnal Sains Ter.*, 2017.

[8] WAHIDA, "APLIKASI METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN DAN METODE DEKOMPOSISI CROUT PADA SISTEM PERSAMAAN LINEAR NON HOMOGEN DALAM MENENTUKAN JUMLAH KENDARAAN ARUS LALU LINTAS. STUDI KASUS: (JALAN PROTOKOL A.P PETTARANI MAKASSAR)," *Univ. Islam NEGERI ALAUDDIN*, 2017.

[9] U. Azmi, R. Yuliastuti, and K. Oktafianto, "PENDEKATAN FUNGSI POLYNOMIAL DARI BENDA PUTAR DENGAN METODE ELIMINASI GAUSS JORDAN," *Limits J. Math. Its Appl.*, 2016.

[10] A. N. Rahma, R. Rahmawati, and W. Wahyuni, "Metode Eliminasi Gauss untuk Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier," *J. Sains Mat. dan Stat.*, 2020.

[11] S. Adnan and R. Anugrahwaty, "Implementasi Metode Eliminasi Gauss Pada Rangkaian Listrik Menggunakan Matlab Software," *JITEKH (Jurnal Ilm. Teknol. Harapan)*, 2017.

[12] Y. Herlambang, "PERHITUNGAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN METODE LEAST SQUARE DAN ELIMINASI GAUSS DALAM PEMROGRAMAN PASCAL 7.00," *EKUITAS (Jurnal Ekon. dan Keuangan)*, 2016.

[13] R. S. A. Nugroho, "Analisis Kesalahan dalam Menyelesaikan Soal Cerita Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel pada Siswa Kelas X MAN 1 Sukoharjo Tahun Ajaran 2017/2018," *J. Educ.*, 2019.

[14] N. Y. Cahaya, "Hukum Ohm dan Hukum Kirchoff," *J. Prakt. Elektron. Dasar*, 2019.

[15] A. Nugraha, I. K. Werdhiana, and I. W. Darmadi, "Rangkaian listrik arus searah," *J. Pendidik. Fis. Tadulako*, 2001.

[16] A. Nugraha, I. K. Werdhiana, and I. W. Darmadi, "DESKRIPSI KONSEPSI SISWA SMA TENTANG RANGKAIAN LISTRIK ARUS SEARAH," *JPFT (Jurnal Pendidik. Fis. Tadulako Online)*, 2014.

[17] Ilhamsyah, Helmi, and F. Fran, "Determinan dan Invers Matriks Blok 2 x 2," *Bul. Ilm. Math. Stat. dan Ter.*, 2017.

[18] A. S. Nur, "KONSEP DETERMINAN PADA MATRIKS NONBUJUR SANGKAR," *MAGISTRA J. Kegur. dan Ilmu Pendidik.*, 2014.

[19] B. Putri Herviani, R. Budhiati Veronica, I. Artikel, and S. Artikel, "ENENTUAN NILAI EIGEN SUATU MATRIKS DENGAN METODE PANGKAT (POWER METHOD)," *UJM*, 2020.

[20] C. Farris, T. A. Treat, R. J. Viken, and R. M. McFall, "{D} ecoding women's sexual intent," *Psych. Sci.*, 2008.

[21] Y. S. Sari and N. N. Bakar, "DETERMINAN MATRIKS 2 × n," *J. Mat. UNAND*, 2019.

[22] A. N. Rahma and Z. Aqilah, "DETERMINAN MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF," *J. Sains Mat. dan Stat.*, 2021.

INDEKS

x_i	variable bebas ke $i = 1, 2, ..., n$
a_{ij}	elemen baris ke $i = 1,..,m$; dan kolom ke $j = 1,..,n$
$A\ , B$	matriks
$AX = B$	Sistem Persamaan Linier
X	solusi Sistem Persamaan Linier
OBE	Operasi Baris Elementer
$\left[A \middle| B \right]$	matriks lengkap A dan B
$A_{m \times n}$	matriks berukuran m x n
$A_{n \times n}$	matriks berukuran n x n
A^{-1}	invers matriks A
I_n	matriks Identitas n x n
A^T	Transpose dari matriks A
$A^T = A$	matriks simetri A
$\lvert A \rvert$	Determinan dari A
c_{ij}	kofaktor baris ke i dan kolom ke j
M_{ij}	minor dari bari ke I dan kolom ke j
$adj\ A$	adjoint dari matriks A
$\lvert A_j \rvert$	determinan dengan mengganti kolom ke j dengan
i	arus listrik
R	resitensi
$E = iR$	tegangan (hukum Ohm)

BIODATA PENULIS

Monograf Sistem Persamaan Linier n Variabel

by Lisa Samura

Submission date: 30-Nov-2021 09:04PM (UTC+0700)
Submission ID: 1716337975
File name: Lisa_Samura_MONOGRAF.docx (276.39K)
Word count: 10962
Character count: 59207

HALAMAN PENGESAHAN

16

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR ISTILAH/GLOSARIUM

Sistem Persamaan Linier dengan n variabel – koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier yang memuat n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan n variabel – bilangan bilangan real $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang memenuhi persamaan sistem linier .

Matriks Eselon Baris Terduksi - bentuk matriks eselon baris yang lebih disederhanakan sehingga lebih mudah dalam mencari solusi dari suatu sistem persamaan.

Metoda Gauss Jordan- prosedur pemecahan Sistem Persamaan Linier dengan mengubah bentuk matrisk eselon baris tereduksi dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE).

Metoda Cramer-penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan determinan dengan syarat determinan matriks A tidak sama dengan nol. Nilai x_j diperoleh dengan membagi determinan A_j dengan determinan A. Determinan A_j diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke j dengan B.

Invers- diperoleh dari matriks lengkap berisikan matriks bujur sangkar A dengan matriks identitas yang bersesuaian yang dilakukan Metoda Gauss Jordan.

Encoding – mengubah informasi dari suatu sistem ke sistem lain dalam bentuk kode. Kode dapat berupa symbol, tanda atau huruf yang digunakan untuk merepresentasikan secara rahasia .

Decoding – proses membuka file berkode yang sudah dikirim dan harus diterjemahkan kembali ke bentuk aslinya .

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan karunia dan rizkinya sehingga penulis bisa menyelesaikan monograf Sistem Persamaan Linier dengan n Variabel.

Buku ini membahas tentang Sistem Persamaan Linier n variable yang merupakan sub bab pada matakuliah Matriks dan Ruang Vektor. Materi ini banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan baik di bidang teknik, ekonomi, sosial, kedokteran dan lain-lain. Diberikan juga beberapa aplikasi untuk masalah di bidang teknik, ekonomi, dan masalah real yang lain. Pembahasan materi monograf ini meliputi Sistem Persamaan Linier banyak variable dengan menggunakan Metoda Gauss Jordan, Invers, dan Metoda Cramer.

Penulis menyadari bahwa monograf yang disusun ini masih belum sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk kesempurnaannya. Semoga buku ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan bagi kita semua.

Jakarta, Juli 2021

Penulis

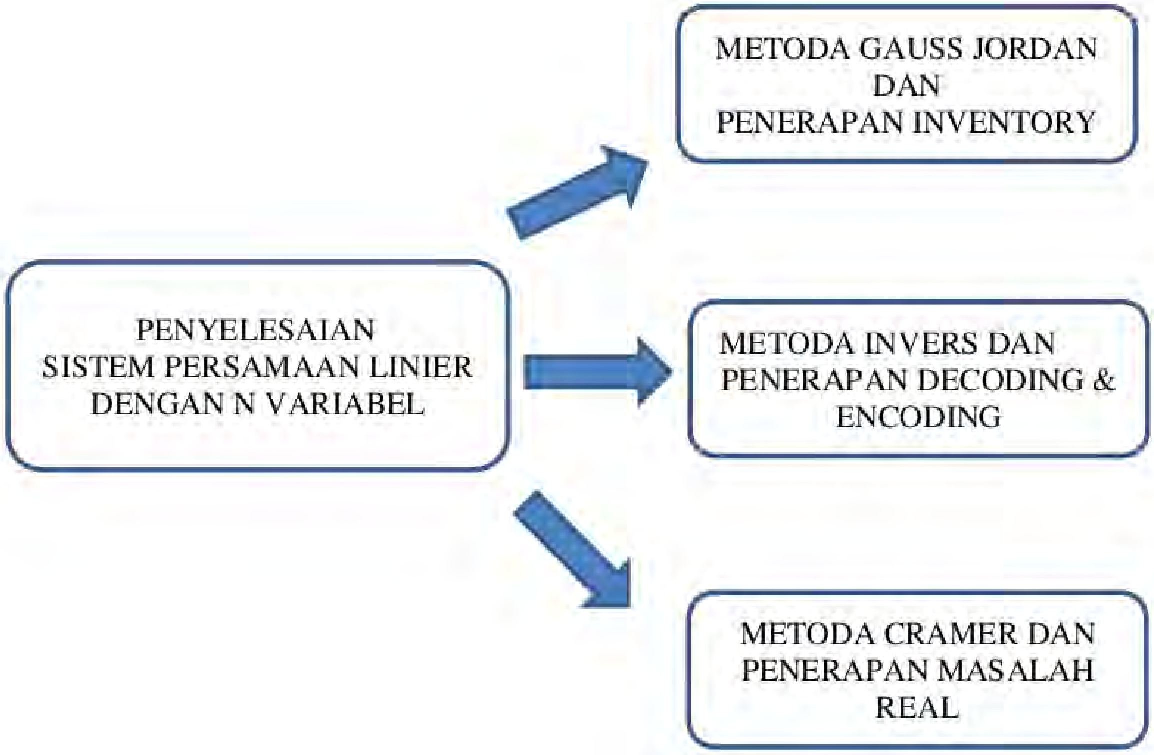
PRAKATA

Permasalahan pada Sistem Persamaan Linier adalah menentukan solusi atau penyelesaiannya dimana solusi bisa berbentuk unik, banyak atau tidak berhingga dan tidak ada solusi. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas memerlukan waktu pengerjaan yang lebih lama. Pada monograf ini akan disajikan cara menyelesaikan Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas dengan menggunakan 3 metoda yaitu Gauss Jordan, Invers dan Metoda Cramer. Setiap metoda akan dijelaskan secara runut sehingga pembaca dapat mudah memahami dan memilih metoda yang sesuai dengan permasalahannya.

Sistem Persamaan Linier merupakan salah satu sub bab Matriks di dalam buku Aljabar Linier yang umumnya hanya membahas sampai dengan 3 variabel bebas . Metoda penyelesaian pada buku teks lain juga terpisah pada masing-masing sub bab. Dengan menyajikan penyelesaian langsung dalam 3 metoda ini diharapkan pembaca lebih cepat mempelajari dan memahami Sistem Persamaan Linier lebih dari 3 variabel bebas.

Sasaran utama monograf ini adalah mahasiswa yang mengambil matakuliah Matriks & Ruang Vektor dan Matematika Teknik di lingkup internal Universitas Trisakti. Sasaran umum adalah mahasiswa di luar lingkup Universitas Trisakti atau peneliti yang ingin mempelajari lebih lanjut Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas.

RINGKASAN



Gambar 1. Ringkasan

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang

Sistem Persamaan Linier merupakan bagian dari Aljabar Linier. Persamaan Linier yang sederhana adalah membentuk garis dalam bidang XY sehingga disebut Persamaan Linier dalam variable x dan y. Dalam Persamaan Linier bentuk variabel yang muncul hanya sekali dan berpangkat satu dan tidak berbentuk fungsi trigonometri, eksponensial atau logaritma . Penyelesaian Persamaan Linier adalah sehimpunan bilangan terurut yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan linier akan menjadi valid. Penyelesaian atau solusi Persamaan Linier disebut himpunan penyelesaiannya atau disebut penyelesaian umum .

Jika persamaan dalam 2 variabel $3x + 2y = 6$, maka $y = 3 - \frac{3}{2}x$ merupakan persamaan garis yang melalui titik (0,3) dan (2,0). Untuk menentukan penyelesaiannya misalkan $x = t$ maka $y = 3 - \frac{3}{2}t$ dimana t adalah bilangan Real.

Untuk penyelesaian khusus diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai khusus dari t . Dengan memisalkan $t = 1$ maka diperoleh $y = \frac{3}{2}$, sehingga himpunan penyelesaian khususnya adalah

$\{x = 1, \quad y = \frac{3}{2}\}$.

Jika persamaannya dalam 3 variabel seperti $3x + 2y + z = 6$ merupakan persamaan dalam variable x, y dan z . Persamaan ini membentuk bidang 3 dimensi. Untuk menentukan penyelesaiannya dengan mengambil dua nilai sembarang untuk dua variabel yang dipilih misalkan $x = t$, $y = p$ maka $z = 6 - 3t - 2p$.

Untuk penyelesaian khususnya diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai khusus dari t dan p. Dengan memisalkan $t = 2$, $p = 1$ maka $z = -2$ sehingga penyelesaian khususnya adalah $\{x = 2, \ y = 1, z = -2\}$.

Aljabar Linier berkaitan dengan generalisasi Persamaan Linier untuk banyak variable (n variable).

Persamaannya ditulis $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$,

dimana : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ disebut koefisien yang tidak semua bernilai sama dengan nol

: b adalah konstanta bilangan Real

: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah variabel

Sehingga persamaan di atas disebut Persamaan Linier dalam banyak variabel yaitu dalam variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Selanjutnya Persamaan Linier dalam n variable ini dapat membentuk Sistem Persamaan Linier dalam banyak variable .

Berikut diberikan Sistem Persamaan Linier dalam beberapa variable dan beberapa persamaan .

Kasus-kasus Sistem Persamaan Linier 3 variabel (x, y, z) .

Jika dengan 2 persamaan :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 6 \\ x + 3y - 2z = 10 \end{cases}$$

Jika dengan 3 persamaan:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ x + 3y + 4z = 4 \\ 5x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Tidak semua Sistem Persamaan Linier mempunyai penyelesaian. Setiap Sistem Persamaan Linier mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai hanya satu penyelesaian atau mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian. Sistem Persamaan Linier yang mempunyai penyelesaian baik tunggal ataupun tak hingga banyaknya penyelesaian disebut konsisten . Sistem Persamaan Linier yang tidak mempunyai penyelesaian disebut tak konsisten. Gambar berikut menjelaskan jenis-jenis penyelesaian (solusi) Sistem Persamaan Linier.

Gambar 1. 1 Jenis-jenis solusi Sistem Persamaan Linier

Berikut adalah kasus-kasus solusi untuk Sistem Peramaan Linier dalam 3 variabel .

Kasus 1. Solusi tunggal :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ x + 3y - 2z = 10 \\ x \quad - 2z = 4 \end{cases}$$

Dari persamaan ke 3 diperoleh $x = 2z + 4$

Disubstitusikan ke persamaan yang lain:

$$2x - y + 3z = 6 \rightarrow 2(2z + 4) - y + 3z = 6 \rightarrow -y + 7z = -2$$

$$x + 3y - 2z = 10 \rightarrow (2z + 4) + 3y - 3z = 10 \rightarrow 3y - z = 6$$

Sehingga diperoleh:

$$x = 4, \quad y = 2 \text{ dan } z = 0$$

Karena ini merupakan satu-satunya penyelesaian, maka penyelesaian atau solusi Sistem Persamaan Linier ini disebut tunggal.

Kasus 2. Solusi tak hingga atau solusi banyak:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x + 2y \quad = -3 \end{cases}$$

Dari persamaan ke 2 diperoleh :

$$x = -3 - 2y$$

Substitusikan ke persamaan 1 diperoleh:

$$3x - y + z = 2 \rightarrow 3(-3 - 2y) - 2y + z = 2 \rightarrow -8y + z = 11$$

dengan misalkan $y = t$, t bilangan Real

maka $x = -3 - 2t$ dan $z = 11 + 8t$

Jika $t = 0$ maka $x = -3$, $y = 0$ dan $z = 11$

Jika $t = -\frac{1}{2}$ maka $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$ dan $z = 7$

Karena t bilangan Real maka penyelesaian yang dihasilkan tergantung nilai t sehingga Sistem Persamaan Linier menghasilkan solusi tak terhingga atau banyak.

Kasus 3. Tidak mempunyai solusi :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -4x + 2y - 6z = 3 \\ x \quad - 2z = 4 \end{cases}$$

Jika persamaan di baris 1 dan baris 2 disubstitusikan menghasilkan tidak ada solusi.

Permasalahan Sistem Persamaan Linier ini banyak ditemui pada berbagai ilmu seperti di bidang ekonomi, teknik, kedokteran dan banyak kasus lainnya. Penerapan pada beberapa kasus akan dibahas pada bab-bab berikut.

4

1.2.Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat ditentukan rumusan masalah dalam monograf ini yaitu :

1. Bagaimana membuat Sistem Persamaan Linier dalam banyak variabel bebas ?
2. Bagaimana menentukan penyelesaian Sistem Persamaan Linier dalam banyak variable bebas?
3. Bagaimana aplikasi Sistem Persamaan Linier dalam banyak variable bebas?

1.3.Nilai Kebaruan (Novelty)

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variable ini menggabungkan beberapa metoda yaitu: Metoda Gauss Jordan, Invers dan Cramer sehingga memudahkan pembaca untuk mempelajari metoda yang akan dipilih sesuai dengan kebutuhannya. Dalam monograf ini juga disertakan beberapa aplikasi di bidang ekonomi, inventory, rangkaian listrik, encoding dan decoding serta masalah real.

BAB 2. SISTEM PERSAMAAN LINIER BANYAK VARIABEL BEBAS DENGAN MENGGUNAKAN METODA GAUSS JORDAN

2.1. Sistem Persamaan Linier banyak variabel bebas

Sebuah sistem dengan m Persamaan Linier dalam banyak variabel atau n variabel bebas dituliskan sebagai berikut [1]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dimana : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas

: a_{ij} adalah elemen $i = 1, \ldots, m$; dan $j = 1, \ldots, n$

Sistem Persamaan Linier di atas dapat dibuat ke dalam bentuk perkalian matriks $AX = B$ [2]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},$$

dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ adalah matriks koefisien a_{ij} yang berukuran $m \times n$ [3]

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berukuran $n \times 1$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \text{ adalah matriks yang berukuran } m \times 1$$

Penyelesaian atau solusi dari Sistem Persamaan Linier dengan n variabel adalah menentukan X yang dicari dengan menggunakan Metoda Gauss Jordan. Untuk penyelesaian dengan Metoda Gauss Jordan harus dipelajari terlebih dahulu Operasi Baris Elementer dan Metoda Gauss.

2.2. Operasi Baris Elementer

Untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier n variabel harus ditentukan matriks yang diperbesar atau matriks lengkap , dimana matriks lengkap ini berisikan matriks koefisien A yang diperluas dengan menambahkan matriks konstanta B , sehingga diperoleh [4]

$$\text{matriks lengkap } [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & |b_2 \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & |b_m \end{bmatrix}$$

Metode dasar untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier adalah menggantikan sistem yang diberikan dengan suatu sistem baru yang mempunyai penyelesaian yang sama dan lebih mudah diselesaikan. Sistem baru ini diperoleh dalam serangkaian langkah dengan menerapkan tiga jenis operasi untuk menghilangkan variabel secara sistematis .Operasi itu meliputi: menukarkan posisi dua persamaan, mengalikan sebuah persamaan dengan konstanta tidak nol, dan menambahkan kelipatan suatu persamaan ke persamaan lainnya.

Karena baris dari suatu matriks lengkap bersesuaian dengan persamaan dalam sistem terkait, maka operasi-operasi tersebut juga bersesuaian dengan operasi berikut pada baris-baris matriks lengkap. Cara seperti ini disebut dengan Operasi Baris Elementer , dimana operasinya sebagai berikut [5]:

1. Menukarkan letak 2 baris .
2. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.

3. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris yang lain.

Untuk matriks koefisen yang berordo $n \times n$ maka matriks lengkap yang dihasilkan menyatakan suatu sistem segitiga.

Matriks segitiga terbagi dalam 2 jenis yaitu segitiga atas dan segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dimana semua elemen dibawah diagonal utama bernilai nol.

Secara umum matriks segitiga atas berordo 3×3 adalah

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah matriks bujur sangkar dimana semua elemen di atas diagonal utama bernilai nol.

Seacara umum matriks segitiga bawah berordo 4×4 adalah .

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Tanda $*$ melambangkan konstanta yang tidak nol.

Penerapan Operasi Baris Elementer untuk Sistem Persamaan Linier dengan 3 variabel bebas .[6]

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Dari Sistem Persamaan Linier dapat dituliskan dalam bentuk $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Maka matriks lengkap $[A|B]$ ditulis $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$

Kemudian dilakukan Operasi Baris Elementer pada matriks lengkap $[A|B]$ dengan langkah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & |-12 \\ 2 & -1 & 1 & | \quad 8 \\ 3 & 1 & -2 & | \; -1 \end{bmatrix} \text{baris 2 dikurang 2 kali baris 1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & |-12 \\ 0 & -5 & 9 & | \; 32 \\ 3 & 1 & -2 & | \; -1 \end{bmatrix}$$

baris 3 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & |-12 \\ 0 & -5 & 9 & | \; 32 \\ 0 & -5 & 10 & | \; 35 \end{bmatrix}$

baris 3 dikurang baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & |-12 \\ 0 & -5 & 9 & | \; 32 \\ 0 & 0 & 1 & | \; 3 \end{bmatrix}$

baris 2 dikali $(-\frac{1}{5})$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & |-12 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & |-\frac{32}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | \quad 3 \end{bmatrix}$

Hasil akhir dari matriks lengkap membentuk sistem segitiga atas sehingga didapatkan sebagai berikut:
dari baris ke 3 diperoleh $x_3 = 3$
dari baris ke 2 diperoleh:

$x_2 - \frac{9}{5}x_3 = -\frac{32}{5}$, substitusi nilai $x_3 = 3$ maka $x_2 = -1$

dari baris 1 diperoleh:

$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -12$, substitusikan nilai $x_3 = 3$ dan $x_2 = -1$ maka diperoleh $x_1 = -12 - 2\,(-1) + 4(3) = 2$

Maka penyelesaiannya $\{x_1 = 2\,, x_2 = -1\,, x_3 = 3\,\}$ atau dapat dituliskan dalam bentuk matriks $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian ini adalah tunggal dan konsisten.

2.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Banyak Variabel dengan Metoda Eliminasi Gauss Jordan

Dalam memudahkan penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variable bebas maka matriks lengkap harus mempunyai ciri-ciri yang dapat dilihat dari entri yang merupakan matriks koefisien dan dilihat dari kiri ke kanan. Sehingga matriks lengkap menjadi matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi.

Sifat-sifat matriks eselon baris adalah:

1. Pada setiap baris, entri tak nol yang pertama adalah angka 1 . Angka 1 ini disebut 1 utama.
2. Jika terdapat baris nol maka baris tersebut diletakkan pada baris yang terbawah.
3. Pada dua baris yang berurutan letak 1 utama nya maka 1 utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih ke kanan dari 1 utama dari baris yang di atasnya.

Proses operasi Sistem Persamaan Linier menjadi matriks lengkap dengan menggunakan semua sifat matriks eselon baris disebut Eliminasi Gauss.

Beberapa contoh matriks eselon baris[7] :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks eselon baris jika direduksi menjadi matriks eselon baris terduksi . Sifat-sifat matriks eselon baris terduksi adalah :

1. Semua sifat 1 sampai dengan 3 pada matriks eselon baris.
2. Pada setiap kolom yang terdapat 1 utama maka entri-entri lain adalah nol.

Beberapa contoh matriks eselon baris tereduksi :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Proses operasi Sistem Persamaan Linier menjadi matriks lengkap dengan menggunakan semua sifat matriks eselon baris tereduksi disebut Eliminasi Gauss-Jordan .

Langkah-langkah penyelesaian Eliminasi Gauss-Jordan [8]:

1. Tentukan Sistem Persamaan Linier
2. Tentukan matriks A , matriks X dan matriks B .
3. Tentukan matriks lengkap $[A|B]$ kemudian lakukan semua operasi baris elementer tereduksi .
4. Diperoleh X merupakan penyelesaian Sistem Persamaan Linier banyak variable bebas.

Penerapan Sistem Persamaan Linier dalam 4 variabel bebas dengan menggunakan Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan[9]

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dimana

matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matriks lengkap $[A|B]$ adalah $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

a. Penyelesaian dengan Eliminasi Gauss [10] b.

Langkah-langkahnya:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{menukarkan baris 1 ke baris 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

baris 2 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

baris 3 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & -12 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

baris 4 dikurang 4 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & -12 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & -22 \end{bmatrix}$

baris 3 dikurang 2 kali baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & -22 \end{bmatrix}$

baris 4 dikurang 3 kali baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -14 & 2 \end{bmatrix}$

baris 4 dikali ½ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

baris 4 dikurang 3 kali baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -11 \end{bmatrix}$

baris ke 4 dikali $\frac{1}{11}$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 2 dikali $-\frac{1}{3}$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Terlihat matriks koefisien A sudah membentuk matriks segitiga atas sehingga dapat ditentukan penyelesaiannya[11].

dari baris 4 diperoleh : $x_4 = -1$

dari baris ke 3 : $x_3 - 6\,x_4 = 4$ maka $x_3 = -2$

dari baris ke 2 : $x_2 + x_3 - \frac{8}{3}\,x_4 = \frac{8}{3}$ maka $x_2 = 2$

dari baris ke 1 : $x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$ maka $x_1 = 1$

Penyelesaian adalah $\{x_1 = 1\,, x_2 = 2\,, x_3 = -2\,, x_4 = -1\}$

atau ditulis dalam bentuk matriks $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

b. Penyelesaian dengan Metoda Eliminasi Gauss-Jordan

Metoda Eliminasi Gauss Jordan adalah penyempurnaan dari Metoda Eliminasi Gauss .

Dalam pengerjaannya dilakukan semua tahapan penyelesaian menggunakan Eliminasi Gauss yang dilanjutkan dengan substitusi balik sehingga menjadi Eliminasi Gauss Jordan.

Dari matriks lengkap dengan Eliminasi Gauss pada penyelesaian a. di atas

diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Selanjutnya dilakukan substitusi balik dengan langkah berikut:

baris 3 ditambah 6 kali baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 2 ditambah $\frac{8}{3}$ baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 1 ditambah 3 kali baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 2 dikurang baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 1 dikurang baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

baris 1 dikurang 2 kali baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Matriks koefisien A yang berukuran 4x4 menjadi matriks Identitas dimana koefisien diagonal utama bernilai 1 dan koefisien yang lain bernilai 0.

Sehingga diperoleh solusi dengan menggunakan Eliminasi Gauss Jordan adalah:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ dan $x_4 = -1$.

Maka $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Hasil pengerjaan dengan menggunakan Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss Jordan menghasilkan solusi yang sama.

2.4. Penerapan pada Inventory

Sistem Persamaan Linier dengan banyak variabel bebas dapat ditemui pada permasalahan inventory [12].

Penerapan 1.

Setiap minggu Toko Grosir Maju menerima 4 merk biskuit bayi yaitu A,B,C dan D dengan total 200 pak. Minggu 1 di awal bulan Desember 2020 toko tersebut menjual biskuit A dan B seharga \$1 , biskuit C seharga \$3, dan biskuit D seharga \$4 sehingga diperoleh \$380. Minggu ke 2 toko mengorder biscuit A seharga \$2 , biskuit B seharga \$3 , biscuit C seharga \$4 dan biscuit D seharga \$5 dengan harapan memperoleh \$ 620. Minggu ke 3 toko tersebut mengorder biscuit A seharga \$2 , biscuit B seharga \$3, biskuit C seharga \$2 dan biscuit D seharga \$1 dengan peroleh \$520. Berapa banyak masing-masing merk biskuit yang harus diorder supaya toko tersebut membeli dengan jumlah yang sama selama 3 minggu.

Pertama ditentukan variable bebasnya yaitu biskuit A, B, C dan D. Disini ada 4 variabel bebas. Misalkan : $x =$ biskuit A , $y =$ biskuit B , $z =$ biskuit C dan $t =$ biskuit D.

Persamaan Linier I adalah : $x + y + z + t = 200$

Persamaan Linier II adalah : $x + y + 3z + 4t = 380$

Persamaan Linier III adalah : $2x + 3y + 4z + 5t = 620$

Persamaan Linier IV adalah : $2x + 3y + 2z + 4t = 520$

Maka Sistem Persamaan Linier 4 variabel bebas dapat ditulis:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 200 \\ x + y + 3z + 4t = 380 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 620 \\ 2x + 3y + 2z + 4t = 520 \end{cases}$$

Sistem Persamaan Linier ditulis dalam bentuk perkalian matriks AX = B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 380 \\ 620 \\ 520 \end{bmatrix}$$

dimana matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 200 \\ 380 \\ 620 \\ 520 \end{bmatrix}$

Matriks lengkap $[A|B]$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 380 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 620 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 520 \end{bmatrix}$

Lakukan Eliminasi Gauss Jordan dengan cara sebagai berikut:

Baris 2 dikurang baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 620 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 520 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 220 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 520 \end{bmatrix}$

Baris 4 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \end{bmatrix}$

Baris 2 ditukar dengan baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikurang baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 180 \end{bmatrix}$

Baris 4 dikurang baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 80 \end{bmatrix}$

Baris 4 dikali ½ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Selanjutnya dilakukan substitusi mundur

Baris 3 dikurang baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Baris 2 dikurang (2) kali baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Baris 1 dikurang baris 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikali ½ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Baris 1 dikurang baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Baris 1 dikurang baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$

Matriks koefisiennya berbentuk matriks Identitas dan matriks lengkap sudah membentuk matriks eselon baris tereduksi.

Diperoleh dari baris I: $x = 90$

baris II: $y = 40$

baris III: $z = 30$

baris IV: $t = 40$.

Jadi biskuit yang harus dipesan setiap minggu adalah:

- Biskuit merk A sebanyak 90 pak
- Biskuit merk B sebanyak 40 pak

- Biskuit merk C sebanyak 30 pak
- Biskuit merk D sebanyak 40 pak

Penerapan 2 .

Perusahaan Terang yang bergerak di bidang perlengkapan rumah tangga memiliki cabang di beberapa kota besar di Indonesia yaitu Jakarta, Surabaya , Medan dan Ujung Pandang. Perlengkapan rumah tangga yang dijual adalah sofa set, meja makan, lemari pakaian dan kitchen set. Inventori pada awal tahun 2020 adalah sebagai berikut:

- Jakarta : 225 sofa set, 180 meja makan, 170 lemari pakaian dan 200 kitchen set.
- Surabaya : 180 sofa set, 210 meja makan, 150 lemari pakaian dan 160 kitchen set.
- Medan : 210 sofa set, 175 meja makan, 145 lemari pakaian dan 150 kitchen set.
- Ujung Pandang : 175 sofa set, 155 meja makan, 160 lemari pakaian dan 140 kitchen set.

Harga sofa set adalah Rp 20 juta, meja makan Rp 12 juta, lemari pakaian Rp 6 jt dan kitchen set Rp 15 juta.

Hasil penjualan tiap kota pada tahun 2020 adalah sebagai berikut:

- Jakarta : 213 sofa set, 155 meja makan, 162 lemari pakaian dan 175 kitchen set.
- Surabaya : 165 sofa set, 202 meja makan, 130 lemari pakaian dan 144 kitchen set.
- Medan : 187 sofa set, 156 meja makan, 143 lemari pakaian dan 121 kitchen set.
- Ujung Pandang : 147 sofa set, 145 meja makan, 152 lemari pakaian dan 128 kitchen set.

Manajemen ingin mengetahui hal-hal berikut:

a. Nilai inventori .
b. Pendapatan kotor tiap cabang pada tahun 2020.
c. Biaya yang ditanggung untuk sisa inventori pada tahun 2020.

Pertama ditentukan variable bebas :

- sofa set sebagai variable bebas x
- meja makan sebagai variable bebas y

- lemari pakaian sebagai variable bebas z
- kitchen set sebagai variable bebas t.

Persamaan Linier I (Jakarta / J) : $225\,x + 180\,y + 170\,z + 200\,t = J$
Persamaan Linier II (Surabaya / S) : $180\,x + 210\,y + 150\,z + 160\,t = B$
Persamaan Linier III (Medan / M) : $210\,x + 175\,y + 145\,z + 150\,t = M$
Persamaan Linier IV (U.Pandang/ U) :$175\,x + 155\,y + 160\,z + 140\,t = U$

Maka Sistem Persamaan Linier 4 variabel bebas utk permasalahan inventori di atas dapat ditulis:

$$\begin{cases} 225x + 180y + 170z + 200t & = J \\ 180x + 210y + 150z + 160t & = B \\ 210x + 175y + 145z + 150t & = M \\ 175x + 155y + 160z + 140t & = U \end{cases}$$

a. Matriks inventori : $\begin{bmatrix} 225 & 180 & 170 & 200 \\ 180 & 210 & 150 & 160 \\ 210 & 175 & 145 & 150 \\ 175 & 155 & 160 & 140 \end{bmatrix}$

Matriks harga = $\begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \end{bmatrix}$

Nilai Inventori = Matriks Inventori dikali Matriks Harga

$$= \begin{bmatrix} 225 & 180 & 170 & 200 \\ 180 & 210 & 150 & 160 \\ 210 & 175 & 145 & 150 \\ 175 & 155 & 160 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.680.000.000 \\ 9.420.000.000 \\ 9.420.000.000 \\ 8.420.000.000 \end{bmatrix}$$

Nilai Inventori utk masing-masing cabang adalah:

- Jakarta : Rp10.680.000.000
- Medan : Rp 9.420.000.000

- Bandung : Rp 9.420.000.000
- Ujung Pandang : Rp 8.420.000.000

b. Matriks penjualan $= \begin{bmatrix} 213 & 155 & 162 & 175 \\ 165 & 202 & 130 & 144 \\ 187 & 156 & 143 & 121 \\ 147 & 145 & 152 & 128 \end{bmatrix}$

Pendapatan kotor setiap cabang pada tahun 2020 diperoleh dari matriks penjualan dikali dengan matriks harga,

$$= \begin{bmatrix} 213 & 155 & 162 & 175 \\ 165 & 202 & 130 & 144 \\ 187 & 156 & 143 & 121 \\ 147 & 145 & 152 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.717.000.000 \\ 8.644.000.000 \\ 8.285.000.000 \\ 7.512.000.000 \end{bmatrix}$$

Jadi pendapatan kotor untuk masing-masing cabang pada tahun 2020 sebagai berikut:

- Jakarta : Rp 9.717.000.000
- Medan : Rp 8.644.000.000
- Bandung : Rp 8.285.000.000
- Ujung Pandang : Rp 7.512.000.000

c. Sisa inventori pada akhir tahun 2020 di tiap cabang diperoleh dari Matriks Inventori – Matriks penjualan terjual =

$$\begin{bmatrix} 225 & 180 & 170 & 200 \\ 180 & 210 & 150 & 160 \\ 210 & 175 & 145 & 150 \\ 175 & 155 & 160 & 140 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 213 & 155 & 162 & 175 \\ 165 & 202 & 130 & 144 \\ 187 & 156 & 143 & 121 \\ 147 & 145 & 152 & 128 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 25 & 8 & 25 \\ 15 & 18 & 20 & 16 \\ 23 & 19 & 2 & 29 \\ 28 & 10 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Biaya yang ditanggung untuk sisa inventori, diperoleh dari sisa inventori dikali dengan harga, yaitu:

$$= \begin{bmatrix} 12 & 25 & 8 & 25 \\ 15 & 18 & 20 & 16 \\ 23 & 19 & 2 & 29 \\ 28 & 10 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000.000 \\ 12.000.000 \\ 6.000.000 \\ 15.000.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 963.000.000 \\ 756.000.000 \\ 1.135.000.000 \\ 908.000.000 \end{bmatrix}$$

Jadi biaya yang ditanggung masing-masing cabang adalah:

- Jakarta : Rp 963.000.000
- Medan : Rp 756.000.000
- Bandung : Rp 1.135.000.000
- Ujung Pandang : Rp 908.000.000

Penerapan 3.

Pada suatu daerah mempunyai 3 kecamatan yaitu F, M dan C dimana setiap kecamatan mempunyai usaha yang berbeda . Kecamatan F warganya berusaha di bidang konveksi pakaian anak-anak, kecamatan M berusaha di bidang pertanian dan kecamatan C berusaha di bidang peralatan pertanian yang sederhana. Daerah ini menerapkan sistem barter untuk semua bidang usahanya.

Kecamatan F menggunakan setengah dari pakaian untuk digunakan sendiri dan memberikan seperempat hasil konveksi kepada masing-masing kecamatan M dan C. Hasil pertanian di kecamatan M dibagi merata untuk masing-masing kecamatan. Kecamatan C memberikan setengah dari hasil peralatan pertanian kepada kecamatan F dan sisanya dibagi rata untuk dua kecamatan yang lain.

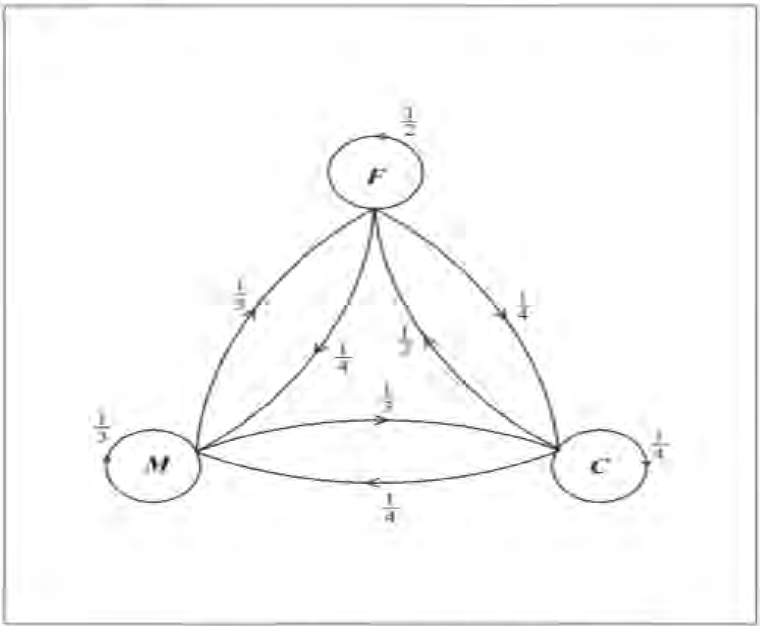
Sistem barter tersebut dapat dituliskan dalam tabel

	F	M	C
F	1/2	1/3	1/2
M	1/4	1/3	1/4
C	1/4	1/3	1/4

Tabel 2. 1 Sistem Barter

Masing-masing kolom menunjukkan distribusi usaha setiap kecamatan.

Barter ini menjadi tidak praktis jika terjadi penambahan penduduk setiap kecamatan sehingga diterapkan sistem keuangan untuk perdagangan dengan asumsi semua berjalan normal , tidak terjadi penimbunan modal dan harga yang wajar untuk setiap barang . Bagaimana memberikan nilai-nilai pada hasil usaha yang mewakili sistem barter yang berlaku. Alur sistem barter diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2. 1 Alur Sistem Barter

Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan Sistem Persamaan Linier dengan tiga variable bebas [13].

Variabel bebasnya adalah :

- variable 1 yaitu x_1 adalah nilai dari hasil konveksi
- variabel 2 yaitu x_2 adalah nilai hasil pertanian
- variabel 3 yaitu x_3 adalah nilai hasil peralatan pertanian.

Sistemnya dianggap adil sehingga nilai total barang-barang yang diterima oleh kecamatan F adalah x_1 .

Dari baris pertama di tabel diperoleh persamaan linier :

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1$$

maka

$$-\frac{1}{2}\,x_1+\frac{1}{3}\,x_2+\frac{1}{2}\,x_3\;=\;0.$$

Nilai total barang-barang yang diterima oleh kecamatan M adalah x_2 .
Dari baris kedua di tabel diperoleh persamaan linier :

$$\frac{1}{4}\,x_1+\frac{1}{3}\,x_2+\frac{1}{4}\,x_3\;=\;x_2$$

$$\frac{1}{4}\,x_1-\frac{2}{3}\,x_2+\frac{1}{4}\,x_3\;=\;0.$$

Nilai total barang-barang yang diterima oleh kecamatan C adalah x_3.
Dari baris ketiga di tabel diperoleh persamaan linier :

$$\frac{1}{4}\,x_1+\frac{1}{3}\,x_2+\frac{1}{4}\,x_3\;=\;x_3$$

$$\frac{1}{4}\,x_1+\frac{1}{3}\,x_2-\frac{3}{4}\,x_3\;=\;0.$$

Sehingga ketiga persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk Sistem Persamaan Linier homogen dengan 3 variabel bebas:

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\,x_1+\dfrac{1}{3}\,x_2+\dfrac{1}{2}\,x_3\;=\;0\\ \dfrac{1}{4}\,x_1-\dfrac{2}{3}\,x_2+\dfrac{1}{4}\,x_3\;=\;0\\ \dfrac{1}{4}\,x_1+\dfrac{1}{3}\,x_2-\dfrac{3}{4}\,x_3\;=\;0\end{cases}$$

Sistem Persamaan Linier di atas dituliskan dalam $AX=B$

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\ \text{dan}\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Karena ruas kanan semua bernilai nol atau $B=0$ maka Sistem Persamaan Linier disebut Sistem Persamaan Linier Homogen. Sehingga matriks lengkap $[A|B]$ dalam pengerjaannya cukup matriks A yang dilakukan operasi Gauss Jordan.

Pada soal ini untuk menghindari perhitungan yang lebih lama maka angka pecahan sertiap baris dikalikan dengan bilangan tertentu yang tidak nol.
Baris 1 dikali dengan (-6) , baris ke 2 dikali dengan (12) dan baris ke 3 dikali dengan (12) sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 3 & -8 & 3\\ 3 & 4 & -9\end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang baris 1 diperoleh
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang baris 1 diperoleh
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

Baris 3 ditambah baris 2 diperoleh
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikali dengan (-1/6) diperoleh
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 ditambah dengan 2 kali baris 2 diperoleh
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikali dengan 1/3 diperoleh
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada baris ketiga semua bernilai nol.
Dengan memisalkan variabel bebas $x_3 = 6$.
Dari persamaan kedua $x_2 - x_3 = 0$ maka $x_2 = x_3 = 6$.
Dari persamaan pertama $x_1 - \frac{5}{3}x_3 = 0$ maka $x_1 = \frac{5}{3}x_3 = 10$.
Akibatnya nilai-nilai $x_1,\ x_2,\ x_3$ diberikan dalam bentuk perbandingan
$x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 6 : 6 = 5 : 3 : 3$

2.5. Penerapan pada Rangkaian Listrik

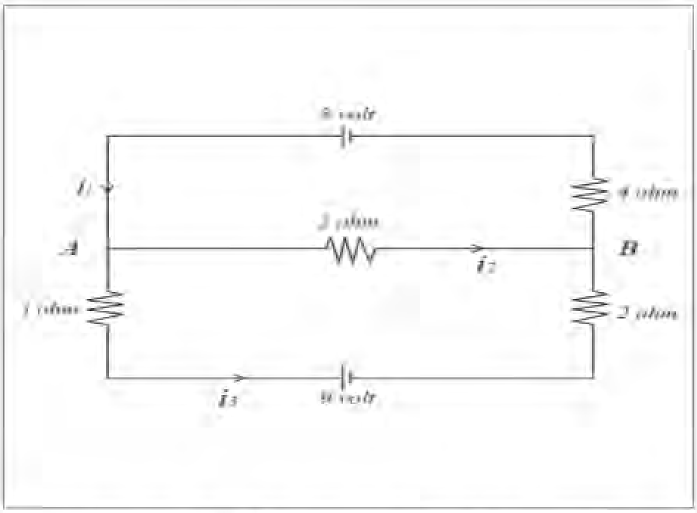
Sistem Persamaan Linier dapat digunakan untuk menentukan kuat arus di setiap cabang rangkaian listrik yang dinyatakan dalam resistansi dan tegangan. Sumber listrik adalah baterai yang digunakan untuk menggerakkan muatan dan menghasilkan arus. Arus mengalir keluar dari terminal yang digambarkan oleh garis vertical yang lebih panjang. Resistansi diukur dalam Ohm. Kode huruf menyatakan simpul (node) dan i adalah arus antar simpul yang dinyatakan dalam Ampere. Tanda panah menunjukkan arah arus. Jika arus bernilai negative menandakan bahwa arus sepanjang cabang itu berlawanan arah dengan tanda panah.

Untuk menentukan kuat arus arus digunakan Hukum Kirchhoff yaitu [14]:

1. Pada setiap simpul jumlah kuat arus yang masuk sama dengan jumlah kuat arus yang keluar.
2. Disetiap keliling simpul yang tertutup , jumlah aljabar tegangan harus sama dengan jumlah aljabar penurunan tegangan.

Penurunan tegangan E untuk setiap tahanan didasarkan pada hukum Ohm yaitu $E = i\ R$, dimana R resistansi dalam Ohm.

Diketahui rangkaian listrik seperti di gambar di bawah ini, akan ditentukan kuat arus .



Gambar 2. 2 Rangkaian Arus Listrik[15]

Dari hukum pertama Kirchoff diperoleh [16]:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0 \qquad \text{(pada Simpul A)}$$

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0 \qquad \text{(pada Simpul B)}$$

Dari hukum kedua Kirchhoff diperoleh:

$$4i_1 + 2i_2 = 8 \qquad \text{(pada simpul atas)}$$

$$2i_2 + 5i_3 = 9 \qquad \text{(pada simpul atas)}$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk Sistem Persamaan Linier dalam 3 variabel:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 4i_1 + 2i_2 = 8 \\ 2i_2 + 5i_3 = 9 \end{cases}$$

Sistem Persamaan ditulis dalam bentuk $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Matriks lengkap $[A : B]$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

Untuk menentukan kuat arus, dilakukan Operasi Gauss Jordan sebagai berikut:

Baris 2 ditambah dengan baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

Baris 2 ditukar dengan baris ke 4 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikurang dengan 4 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikurang dengan 3 kali baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikali dengan $\left(-\frac{1}{19}\right)$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Baris 2 dikurang 5 kali baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Baris 1 dikurang baris 3 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Baris 2 dikali dengan ½ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dari baris 3 diperoleh $i_3 = 1$ Ampere
Dari baris 2 diperoleh $i_2 = 2$ Ampere
Dari baris 1 diperoleh persamaan $i_1 - i_2 = -1$
maka $i_1 = -1 + 2 = 1$ Ampere

BAB 3. SISTEM PERSAMAAN LINIER BANYAK VARIABEL BEBAS DENGAN MENGGUNAKAN INVERS

3.1 Menentukan Invers dengan menggunakan Matriks Elementer

Jika A sebuah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dan matriks B juga berukuran $n \times n$ dapat ditentukan sehingga $AB = BA = I_n$, maka B disebut invers dari A. Invers dari matriks A ditulis A^{-1}.

I_n adalah matriks identitas utk matriks berukuran $n \times n$.

Jika A mempunyai invers maka $A^{-1}.A = I_n$.[17]

Matriks yang mempunyai invers disebut matriks tak singular, dan jika tidak mempunyai invers maka disebut matriks singular. Jika suatu matriks mempunyai invers maka inversnya adalah tunggal.

Matriks identitas [18] adalah matriks bujur sangkar dimana koefisien diagonal utama bernilai satu dan koefisien lain adalah nol.

Matriks identitas I_n untuk 3×3 adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks identitas I_n untuk 4×4 adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks identitas I_n untuk $n \times n$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Salah satu metode untuk menentukan invers suatu matriks adalah menggunakan Matriks Elementer dimana matriks bujur sangkar yang diperoleh dari matriks identitas yang bersesuaian yang telah dilakukan hanya oleh satu operasi baris elementer saja.

Matriks Elementer $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ diperoleh dari matriks identitas I_3 dengan menjumlahkan baris ke 3 dengan -4 kali baris ke 2.

Untuk menentukan Invers matriks [19] A atau A^{-1} tentukan terlebih dahulu matriks identitas yang bersesuaian dengan ukuran matriks A, kemudian tuliskan matriks lengkap dalam bentuk

$$[A\ :\ I_n\ ] \quad OBE \quad [\ I_n\ :\ A^{-1}\ ]\ .$$

Selanjutnya dilakukan operasi baris elementer secara bersamaan antara matriks A dengan matriks identitas I_n yang bersesuaian dengan tujuan merubah matriks A menjadi matriks I_n dan akibatnya diperoleh perubahan matriks identitas I_n menjadi matriks A^{-1}. Akibatnya jika matriks A tidak dapat berubah menjadi matriks identitas I_n maka matriks A disebut tidak mempunyai invers.

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Untuk menentukan invers A dilakukan dengan langkah berikut.

Matriks identitas yang bersesuaian adalah $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tulisakan matriks lengkap $[A\ :\ I_3\ ]$

$$[A\ :\ I_3\ ] \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

Tukarkan baris 1 dan baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Baris 2 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & : & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Baris 3 ditambah 2 kali baris 1 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & : & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & : & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikurang baris 2 diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & : & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & : & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

Baris 3 dikali $\frac{1}{23}$ diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & : & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{23} & \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \end{bmatrix}$

Baris 2 ditambah 13 baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 10/23 & -64/23 & 13/23 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1/23 & 5/23 & 1/23 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang 4 baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 4/23 & 3/23 & -4/23 \\ 0 & 1 & 0 & : & 10/23 & -64/23 & 13/23 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1/23 & 5/23 & 1/23 \end{bmatrix}$$

Diperoleh matriks lengkap $[\ I_3 : A^{-1}\ ]$.

Posisi awal A menjadi I_3 dan posisi I_3 menjadi suatu matriks yang merupakan invers dari A .

Jadi invers $A = A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/23 & 3/23 & -4/23 \\ 10/23 & -64/23 & 13/23 \\ -1/23 & 5/23 & 1/23 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 10 & -64 & 13 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan invers matriks A yang berukuran 4 x 4 dilakukan dengan cara yang sama. Matriks Identitas yang digunakan adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Menentukan invers A sebagai berikut.

Bentuk matriks lengkap $[A\ :\ I_4\ ]$ kemudian lakukan Operasi Baris Elementer

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 ditukar dengan baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & 1 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & 1 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikali $(-\frac{1}{9})$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang 2 kali baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & -7/9 & : & 2/9 & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 ditambah 8 kali baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & -7/9 & : & 2/9 & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 41/9 & -17/9 & : & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang 4 kali baris ke 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} & : & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{17}{9} & : & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikali 9 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{17}{9} & : & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang $\frac{41}{9}$ kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & : & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & : & -10 & 20 & -\frac{41}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang $\frac{4}{9}$ kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & : & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & : & -1 & 2 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & : & -10 & 20 & -\frac{41}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang $\frac{2}{9}$ kali baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & : & -4/9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & : & -1 & 2 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & : & -10 & 20 & -\frac{41}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikali $\frac{1}{30}$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & : & -4/9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & : & -1 & 2 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

Baris 3 ditambah 7 kali baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & : & -4/9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & : & -1 & 2 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1/3 & 2/3 & -17/270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 3 kali baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & : & -4/9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1/90 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1/3 & 2/3 & -17/270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang 2 kali baris 4 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 2/9 & -1/3 & 82/270 & -1/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1/90 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1/3 & 2/3 & -17/270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{270} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

Diperoleh matriks lengkap $[\ I_4 : A^{-1}\ ]$

Maka invers dari $A = A^{-1} = \frac{1}{270}\begin{bmatrix} 60 & 90 & 82 & -18 \\ 0 & 0 & 3 & -27 \\ -90 & 180 & -17 & 0 \\ -90 & 180 & -41 & 9 \end{bmatrix}$

3.2 Solusi Sistem Persamaan Linier dengan Menggunakan Invers

Tinjau Sistem Persamaan Linier n variabel bebas berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dapat dituliskan dalam bentuk $AX = B$, dimana

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks koefisien yang berukuran $n \times n$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ matriks berukuran $n \times 1$

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ matriks berukuran $n \times 1$

Jika matriks A dapat dibalik maka sistem persamaan linier $AX = B$ tepat mempunyai satu solusi atau penyelesaian . Jika A^{-1} adalah invers dari matriks A maka solusi penyelesaian sistem persamaan linier $AX = B$ diperoleh dengan mengalikan A^{-1} pada masing-masing ruas persamaan, yang diperoleh dengan cara :

$$AX = B$$

$$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}\,B, \quad \text{karena } (A^{-1}A) = I_n \text{ maka}$$

$$I_n \; X = A^{-1}\,B$$
$$X \quad = A^{-1}\,B$$

Jadi solusi atau penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan invers adalah $X \quad = A^{-1}\,B$. (Persamaan 3.1)

Pada kasus Sistem Persamaan Linier dalam 4 variabel bebas akan ditentukan penyelesaiannya dengan menggunakan Invers.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Dimana $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matriks identitas yang bersesuian , yaitu $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tuliskan matriks lengkap $[A \;:\; I_4\;]$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & -1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Selanjutnya lakukan Operasi Baris Elementer dengan langkah berikut:

Menukarkan baris 1 dan baris 2 diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 2 dikurang 2 kali baris 1 , diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Baris 3 dikurang dengan 3 kali baris 1 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & : & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang dengan 4 kali baris 1 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 10 & : & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & : & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang dengan 2 kali baris 2 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 10 & : & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang dengan 3 kali baris 2 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -14 & : & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikurang dengan 6 kali baris 3 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 8 & : & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & : & 9 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditambah dengan 3 kali baris 3 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & : & 9 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang dengan baris 3 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & : & 9 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 4 dikali dengan $\frac{1}{22}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & : & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{9}{22} & \frac{-4}{22} & \frac{6}{22} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

Baris 3 ditambah dengan 6 kali baris 4 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & : & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 5/11 & -1/11 & 18/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 9/22 & -2/11 & 3/11 & 1/22 \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditambah dengan 10 kali baris 4 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & : & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & : & -10/11 & -9/11 & 63/11 & 5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 5/11 & -1/11 & 18/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 9/22 & -2/11 & 3/11 & 1/22 \end{bmatrix}$$

Baris ke 1 dikurang dengan 3 kali baris 4 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & : & 17/22 & 6/11 & -20/11 & -3/22 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & : & -10/11 & -9/11 & 63/11 & 5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 5/11 & -1/11 & 18/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 9/22 & -2/11 & 3/11 & 1/22 \end{bmatrix}$$

Baris ke 2 dikali dengan $(^{-1}/_{3})$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & : & 17/22 & 6/11 & -20/11 & -3/22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 10/33 & 3/11 & -21/11 & -5/33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 5/11 & -1/11 & 18/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 9/22 & -2/11 & 3/11 & 1/22 \end{bmatrix}$$

1

Baris ke 1 dikurang dengan 2 kali baris ke 2 , diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 121/726 & 0 & 2 & -77/726 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 10/33 & 3/11 & -21/11 & -5/33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 5/11 & -1/11 & 18/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 9/22 & -2/11 & 3/11 & 1/22 \end{bmatrix}$$

Invers dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 121/726 & 0 & 2 & -77/726 \\ 10/33 & 3/11 & -21/11 & -5/33 \\ 5/11 & -1/11 & 18/11 & 2/11 \\ 9/22 & -2/11 & 3/11 & 1/22 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{726}\begin{bmatrix} 121 & 0 & 1452 & -77 \\ 220 & 198 & -1.386 & -110 \\ 330 & -66 & 1.188 & 132 \\ 297 & -132 & 198 & 33 \end{bmatrix}$$

11

Solusi Sistem Persamaan Linier adalah $X = A^{-1}B$, sehingga diperoleh

$$X = \frac{1}{726}\begin{bmatrix} 121 & 0 & 1.452 & -77 \\ 220 & 198 & -1.386 & -110 \\ 330 & -66 & 1.188 & 132 \\ 297 & -132 & 198 & 33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{726}\begin{bmatrix} (121 \times 4) + 0 + (1.452 \times 6) - (77 \times 2) \\ (220 \times 4) + (198 \times 6) - (1.386 \times 6) - (110 \times 2) \\ (330 \times 4) - (66 \times 6) + (1.188 \times 6) + (132 \times 2) \\ (297 \times 4) - (132 \times 6) + (198 \times 6) + (33 \times 2) \end{bmatrix}$$

Maka penyelesaian Sistem Persamaan Linier adalah

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{726}\begin{bmatrix} 9.042 \\ -8.844 \\ 8.316 \\ 1.680 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{9.042}{726} \\ -\frac{8.844}{726} \\ \frac{8.316}{726} \\ \frac{1.680}{726} \end{bmatrix}$$

3.3 Penerapan Masalah Encoding dan Decoding

Teori Penerimaan Pesan (*Audience Reception Theory* atau *Reception Theory*) adalah teori yang menekankan pada peran pembaca atau khalayak dalam menerima pesan. Dalam teori yang dikemukakan oleh Stuart Hall, proses komunikasi (*encoding* dan *decoding*) berlangsung lebih kompleks. Encoding [20] merupakan proses membuat pesan yang sesuai dengan kode tertentu, sedangkan decoding merupakan proses menggunakan kode untuk memaknai pesan . Encoding dan Decoding mempunyai struktur makna yang tidak selalu simetris. Derajat simetri (simetris atau tidak simetrisnya pertukaran komunikasi) bergantung pada kesetaraan hubungan yang dibentuk antara pemberi pesan dan penerima pesan (pembuat kode dan penerima kode). Encoding biasa digunakan untuk merahasiakan pesan sehingga hanya penerima saja yang mengetahui. Decoding adalah proses menerjemahkan pesan yang telah di encoding sehingga dapat diterima pesan yang sesungguhnya.

Dalam kasus berikut, diberikan kode rahasia dalam bentuk huruf berikut:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
01	02	03	04	05	06	07	08	09

j	k	l	m	n	o	p	q	r
10	11	12	13	14	15	16	17	18

s	t	u	v	w	x	y	z	spasi
19	20	21	22	23	24	25	26	27

Contoh pesan rahasia yang akan disampaikan oleh seorang komandan kepada anggota pasukannya adalah "bawa ke buritan". Pesan tersebut akan disampaikan tanpa encoding oleh huruf-huruf di atas sebagai berikut:

02 01 23 01 27 11 05 27 02 21 18 09 20 01 14

Untuk menjaga kerahasiaan pesan tersebut komandan menggunakan sistem encoding dan decoding , dengan langkah sebagai berikut:

Jika matriks encoding $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

maka pesan yang terkirim akan menjadi seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 72 \\ 31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 27 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 61 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 38 \\ 71 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 66 \\ 108 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 63 \\ 76 \end{bmatrix}$$

Hasil encodingnya adalah :

28 72 31 40 61 68 39 28 71 69 66 109 55 63 76

Selanjutnya ditentukan invers matriks encodingnya, karena matriks A berukuran 3x3 maka matriks identitas yang digunakan adalah

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tulis matriks lengkap $[A \; : \; I_3 \;]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya lakukan Operasi Baris Elementer sehingga hasil akhir berbentuk $[\, I_3 : A^{-1}]$.

Baris 1 ditukar dengan baris 2, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 2 dikurang 2 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & : & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang 3 kali baris 1 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & : & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & : & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikurang baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & : & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & : & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris 1 ditambah baris 2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & : & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & : & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menghindarkan perhitungan dengan menggunakan pecahan, kolom ke 3 dikalikan dengan Kelipatan Persekutuan Terbesar (KPK) , yaitu baris 1 dikali dengan 15, baris 2 dikali (-6) , dan baris 3 dikali 10 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -30 & : & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 30 & : & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & : & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Baris 2 ditambah baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -30 & : & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & : & -16 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & : & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikurang baris 3 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & : & 25 & -5 & -10 \\ 0 & 6 & 0 & : & -16 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & : & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikali 1/15 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 6 & 0 & : & -16 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & : & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dikali 1/6 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -8/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -30 & : & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Baris 3 dikali (- 1/30) diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -8/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Langkah ini menghasilkan bentuk $[\,I_3 : A^{-1}]$.
Maka Invers matriks encoding adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pihak penerima pesan untuk membaca pesan harus mengubah pesan yang diterima dengan proses decoding dengan cara mengalikan pesan yang sudah diencoding dengan invers matriks encodingnya, yang diperoleh sebagai berikut:

$$1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 72 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 61 \\ 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 27 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 38 \\ 71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$1/3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 66 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$1/3\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 55 \\ 63 \\ 76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Maka pesan aslinya dapat diketahui si penerima dan pengirim pesan.

BAB 4. SISTEM PERSAMAAN LINIER BANYAK VARIABEL BEBAS DENGAN MENGGUNAKAN METODA CRAMER

4.1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Determinan suatu matriks bujur sangkar [21] A = det. A ,ditulis $|A|$. Salah satu cara untuk menghitung determinan adalah menggunakan Ekspansi Kofaktor terhadap satu baris atau satu kolom.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Untuk menentukan determinan A jika digunakan ekspansi kofaktor terhadap baris 1 maka [17]

det.A = $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$,

dimana C_{11}, C_{12}, C_{13} adalah kofaktor yang bersesuaian dengan elemen-elemen.

$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$,

M_{11} adalah Minor yg diperoleh dengan mencoret baris ke 1 dan kolom 1.

$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$.

$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$

M_{12}adalah Minor yg diperoleh dengan mencoret baris ke 1 dan kolom 2.

$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$.

$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$,

M_{13} adalah Minor yg diperoleh dengan mencoret baris ke 1 dan kolom 3.

$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$.

Jika $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$, maka

det.A terhadap ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i adalah :

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad \text{(Persamaan 4.1)}$$

det.A terhadap ekspansi kofaktor sepanjang baris ke j adalah :

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad \text{(Persamaan 4.2)}$$

Jika $A_{n\times n} = [a_{ij}]$, maka Minor dari a_{ij} dilambangkan dengan M_{ij} adalah determinan dari submatriks Ayang diperoleh dengan mencoret elemen-elemen pada baris i dan kolom ke j [18][22].

Kofaktor dari a_{ij} ditulis $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$ (Persamaan 4.3)

Pada kasus jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Determinan A ditentukan dengan menggunakan ekspansi terhadap baris ke 2.

Maka det.$A = |A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$

$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(-5-6) = 11.$

$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (10-3) = 7.$

$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+1) = -5.$

Maka det.$A = |A| = 3.(11) + 0.(7) + 1.(-5) = 33 - 5 = 28$

Kasus jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinan A jika dilakukan ekspansi sepanjang kolom ke 3, maka

$$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(2-12+0) - (0+2-8)] = -4$$

$$C_{13} = (-1)^4 M_{13} = -4$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(12+6+16) - (24+4+12)] = -6$$

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -(-6) = 6$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(12+0+4) - (24+0+3)] = -11$$

$$C_{33} = (-1)^6 M_{33} = 11$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = [(8+0+8)-(32+0+6)] = -22$$

$$C_{43} = (-1)^7 M_{43} = -(-22) = 22$$

$$|A| = (0).(-4) + (3).(6) + (1).(11) + (2).(22) = 73$$

4.2. Determinan dengan Menggunakan Sifat-sifat Determinan

Untuk menentukan determinan matriks yang berukuran lebih dari 3x3 akan lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat determinan. Sifat-sifat determinan sebagai berikut:

1. $\det.(AB) = \det.(A)\det.(B)$.
2. $\det.(A)^T = \det.(A)$.

   Jika $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

3. Jika matriks segitiga atas $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka nilai determinan adalah perkalian elemen-elemen diagonal utamanya.

   Jadi $\det.(A) = (a_{11}).(a_{22}).(a_{33})\dots.(a_{nn})$.

4. Jika $A_{n\times n}$, maka $\det.(kA) = k^n \det.(A)$.

   Jika $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

   maka $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

5. $\det.(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, untuk $\det.(A) \neq 0$.

6. Jika matriks A memuat baris atau kolom nol, maka nilai $\det.(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. Jika menukarkan letak 2 baris atau kolom dari matriks A maka nilai det.(A) menjadi negative dari determinan semula.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Jika dilakukan penjumlahan baris dengan kelipatan baris yang lain pada matriks A maka nilai determinan tidak berubah (tetap).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{22} - 3a_{12} & a_{23} - 3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. Jika matriks A memuat dua baris atau kolom yang sama atau berkelipatan maka nilai det.$(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Karena baris ke 2 dan ke 3 berkelipatan maka nilai determinan = 0.

Untuk kasus matriks yang berukuran 3x3, akan ditentukan determinannya dengan menggunakan sifat determinan.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & -9 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & 12 \end{vmatrix}$$ (sifat 7: menukarkan baris 1 dan ke dua)

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : 3 kali baris ke 3)

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -14 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8: $b_2 - 3b_1$)

$$= -3\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & -8 & -14\\0 & -9 & -4\end{vmatrix}$$ (sifat ke 8: $b_3 - 2b_1$)

$$= -3.(-4)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 2 & 7\\0 & -9 & -4\end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : (-4) baris ke 2)

$$= 12.\left(\tfrac{1}{9}\right)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 18 & 56\\0 & -9 & -4\end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris ke 2 dikali 9 maka det. menjadi 1/9 determinan semula)

$$= 12.\left(\tfrac{1}{9}\right).\left(-\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 18 & 56\\0 & 18 & 8\end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris ke 3 dikali (-2) maka det menjadi ($-\frac{1}{2}$) determinan semula)

$$= \left(\tfrac{1}{9}\right).(-6)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 18 & 56\\0 & 0 & -48\end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : $b_3 - b_2$)

$$= \left(-\tfrac{2}{3}\right)(1)(18)(-48)$$ (sifat ke 3 : perkalian elemen diagonal utama)

$$= 576$$

Untuk kasus matriks A berukuran 5x5, dimana

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 0 & 5\\-3 & 4 & 2 & 3 & 1\\4 & 2 & -6 & 8 & 10\\1 & 0 & 2 & 4 & 3\\2 & 3 & -2 & 3 & 4\end{vmatrix}.$$

Nilai determinan matriks A ditentukan dengan menggunakan sifat- sifat determinan dengan langkah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 0 & 5\\-3 & 4 & 2 & 3 & 1\\4 & 2 & -6 & 8 & 10\\1 & 0 & 2 & 4 & 3\\2 & 3 & -2 & 3 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 4 & 3\\-3 & 4 & 2 & 3 & 1\\4 & 2 & -6 & 8 & 10\\2 & 3 & 1 & 0 & 5\\2 & 3 & -2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

(sifat ke 7 : menukarkan baris 1 dan baris 4)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 4 : baris ke 3 dikali dengan ½ , maka determinan menjadi 2 kali determinan semula)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 2 ditambah 3 kali baris 1)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 3 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(sifat ke 8 : baris 4 dikurang 2 kali baris1)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 5 dikurang 2 kali baris1)

$$= \quad 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & 10 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 7 : menukarkan baris 2 dan 3)

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 3 dikurang 4 kali baris2)

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 4 dikurang 3 kali baris2)

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 5 dikurang 3 kali baris2)

$$= 2.(2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & 31 & 14 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris 4 dikali ½ maka nilai determinan menjadi 2 kali determinan sebelumnya)

$$= 4.(28)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris 3 dikali $\frac{1}{28}$ maka determinan menjadi 28 kali determinan sebelumnya)

$$= 4.(28)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{38}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 4 dikurang 6 kali baris 3)

$$= 4.(28)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{38}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{28} & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris 5 dikurang 11 kali baris 3)

$$= 4.(28).(\tfrac{38}{28})\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{28} & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$ (sifat ke 4 : baris 4 dikali $\frac{38}{28}$ maka determinan menjadi $\frac{38}{28}$ determinan sebelumnya).

$$= 4.(38)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$ (sifat ke 8 : baris ke 5 dikurang $\frac{28}{53}$ kali baris ke 4).

$= 4.(38).(1).(1).(1).(1).(-\frac{9}{2}) = -684.$

Pada kasus jika diketahui determinan $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -8.$

Akan ditentukan determinan dari $\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$ dengan menggunakan sifat-sifat determinan .

Langkahnya sebagai berikut:

$$-8 = -\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= -(-\tfrac{1}{3})\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ e & f & g & h \\ e+2a & f+2b & g+2c & h+2d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$-8 = -\left(\tfrac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$-8 = -\left(\tfrac{1}{3}\right).\left(\tfrac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$-8 = -\left(\tfrac{1}{12}\right)\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Maka $\begin{vmatrix} -3i & -3j & -3k & -3l \\ 2a+e & 2b+f & 2c+g & 2d+h \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

$= (-12).(-8) = 96$

4.3. Solusi Sistem Persamaan Linier dengan Metoda Cramer

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dan C_{ij} kofaktor dari a_{ij}. Maka matriks

$$B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$ adalah matriks kofaktor dari A.

Transpose dari matriks kofaktor A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut adjoint dari A , ditulis $adj\ (A)$.

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Menentukan matriks kofaktornya sebagai berikut.

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-6 - 20) = -26$$

$$C_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 20) = 11$$

$$C_{13} = (-1)^4 M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = (15 + 10) = 25$$

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 15) = 9$$

$$C_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 15) = -12$$

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 10) = 5$$

$$C_{31} = (-1)^4 M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (8 + 6) = 14$$

$$C_{32} = (-1)^5 M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 9) = 5$$

$$C_{33} = (-1)^6 M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(5 - 10) = 5$$

Kofaktor dari $A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -26 & 11 & 25 \\ 9 & -12 & 5 \\ 14 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Adjoint $A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -26 & 9 & 14 \\ 11 & -12 & 5 \\ 25 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Adjoint A dapat digunakan untuk menentukan Invers dari matriks A yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, .adj(A) \qquad \text{(Persamaan 4.4)}$$

Pada kasus $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Untuk menentukan A^{-1} dengan menggunakan $adj(A)$ dilakukan dengan cara berikut.

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\,(4-1) - (1-6) = 6 + 5 = 11$$

$$C_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -\left\{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= -\{(4-1) - (-4-3) - 3(2+6)\}$$
$$= -(3 + 7 - 24) = 14$$

$$C_{13} = (-1)^4 M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\,(-4-3) - (-2+9) + 2(-1-6)$$
$$= 2\,(-7) - (7) + 2(-7) = -14 - 7 - 14 = -35$$

$$C_{14} = (-1)^5 M_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\left\{(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= -\{(-2)(2+1) + 2(-1-6)\}$$
$$= -(-6 + 14) = -8$$

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -\left\{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= -\{(4-1) + (-1+4)\}$$
$$= -(3+3) = -6$$
$$C_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4-1) + (-4-3) + 2(2+6)$$
$$= 2(3) + (-7) + 2(8) = 6 - 7 + 16 = 15$$
$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -\left\{(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= -\{(-2)(-2+2) - (-2-3)\}$$
$$= -(0+5) = -5$$
$$C_{24} = (-1)^6 M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4-1) + (-4-3) + 2(2+6)$$
$$= 2(3) + (-7) + 2(8) = 6 - 7 + 16 = 15$$
$$C_{31} = (-1)^4 M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-2+3) + (-4-3) + 2(2+1)$$
$$= (1 - 7 + 6) = 0$$
$$C_{32} = (-1)^5 M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -\left\{(2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= -\{(-2)(-2+2) - (-2-3)\}$$

$$= -(\ 0 + 5) = -5$$

$$C_{33} = (-1)^6 M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \ 2(-4-3) - (-2+9) + 2(-1-6)$$

$$= (-14 - 7 - 14) = -35$$

$$C_{34} = (-1)^4 M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \ 2(2+1) - (1-3) - (-1-6)$$

$$= (6 + 2 + 7) = 15$$

$$C_{41} = (-1)^5 M_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\{(1-6) - 2(\ -1 + 4)\}$$

$$= -(-5 - 6) = 11$$

$$C_{42} = (-1)^6 M_{42} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \ 2(1-6) + (1+6) + 2(-2-2)$$

$$= (-10 + 7 - 8) = -11$$

$$C_{43} = (-1)^7 M_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\{2(2) - (\ -1 + 6) + 2(-4)\}$$

$$= -(4 - 5 - 8) = 9$$

$$C_{44} = (-1)^8 M_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4) - (-2-2) - (-4)$$
$$= (-8+4+4) = 0$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 & 0 & 11 \\ 14 & 15 & -5 & -11 \\ -35 & -5 & -35 & 9 \\ -8 & 15 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}$$
$$= (2)\,(0) + 0 - 2(-35) + (15) = 85$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ .adj(A)$$
$$= \frac{1}{85} \begin{bmatrix} 11 & -6 & 0 & 11 \\ 14 & 15 & -5 & -11 \\ -35 & -5 & -35 & 9 \\ -8 & 15 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaikan Sistem Persamaan Linier dalam n variable bebas dapat menggunakan determinan .

Dari persamaan (3.1) $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

dan dari persamaan (4.4)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ .adj(A)$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$, maka

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{1j} & C_{2j} & \cdots & C_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \left[C_{1j} b_1 + C_{2j} b_2 + \cdots + C_{nj} b_n \right]$$

maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal. Sehingga diperoleh penyelesaiannya adalah:

$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$, …., $x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ dengan $|A| \neq 0$.

10

Matriks A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti elemen kolom ke j dari A dengan elemen pada matriks B.

Jika $\quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

maka

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\ b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\ b_2 \dots & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\ b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aturan penyelesaian Sistem Persamaan Linier ini disebut Aturan Cramer atau Metoda Cramer.

Secara umum penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Aturan Cramer ditulis $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$ $, j = 1,2 \dots, n$ dimana $|A| \neq 0$ (Persamaan 4.5)

Pada kasus Sistem Persamaan Linier $\begin{cases} -2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$

Menetukan solusi SPL dengan menggunakan Metoda Cramer dilakukan sebagai berikut.

Tulis dalam bentuk persamaan $AX = B$, dimana

Dimana $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Maka $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor

$$= (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\,(6 + 3) - 3\,(9 - 6) - (-3 - 4)$$

$$= (-2)\,(9) - 3(3) - (-7)$$

$$|A| \quad = -18 - 9 + 7 = -20$$

Determinan A_1diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B

Maka $|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (4)\,(6+3) - 3\,(3-6) - (-1-4)$$

$$= (4)\,(9) - 3(-3) - (-5)$$

$$|A_1| \quad = 36 + 9 + 5 = 50$$

Determinan A_2 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B

Maka $|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\,(3-6) - 4\,(9-6) - (6-2)$$

$$= (-2)\,(-3) - 4(3) - (4)$$

$$|A_2| \quad = 6 - 12 - 4 = -10$$

Determinan A_3 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B

Maka $|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\,(4+1) - 3\,(6-2) + 4(-3-4)$$

$$= (-2)\,(5) - 3(4) + 4(-7)$$

$$|A_3| \quad = -10 - 12 - 28 = -50$$

Sehingga diperoleh :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{50}{-20} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-50}{-20} = \frac{5}{2}$$

Jadi solusi Sistem Persamaan Linier tersebut adalah

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Pada kasus Sistem Persamaan Linier $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 \quad - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

Menentukan solusi SPL dengan menggunakan Metoda Cramer dilakukan sebagai berikut.

Tulis dalam bentuk persamaan $AX = B$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

maka determinan A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \text{(menukar baris 1 dan 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -5 & 10 \\ 0 & -9 & -3 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang 4 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -9 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 3 kali baris 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 6 kali baris 3)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 6 kali baris 3)

$$|A| = -(1).(-3).(1).(22) = 66$$

Determinan A_1diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$ (menukar baris 1 dan 4)

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris ke 2 dikurang 3 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris ke 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} \text{(baris ke 4 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris ke 4 dikurang baris 3)}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 2 kali dengan 3)}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\right).\left(\tfrac{1}{5}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 15 & -25 & 35 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 3 kali dengan 5)}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\right).\left(\tfrac{1}{5}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -19 & 26 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang baris ke 2)}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{15}\right).\left(\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -38 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikali dengan 2)}$$

$$= \left(\tfrac{1}{15}\right).\left(\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -38 & 52 \end{vmatrix} \text{(menukar baris 3 dan baris 4)}$$

$$= \left(\tfrac{1}{15}\right).\left(\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{vmatrix} \text{(baris 4 ditambah 19 kali baris 3)}$$

$$|A_1| = \left(\tfrac{1}{15}\right).\left(\tfrac{1}{2}\right).(2).(15).(2).(33) = 66$$

Determinan A_2diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$(menukar baris 1 dan 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$(baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 0 & -12 & -5 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$(baris 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 0 & -12 & -5 & 10 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$(baris 4 dikurang 4 kali baris 1)

$$= -(\tfrac{1}{6})\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -48 & -18 & 48 \\ 0 & -12 & -5 & 10 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$(baris 2 dikali dengan 6)

$$= -\left(\tfrac{1}{6}\right).(\tfrac{1}{4})\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -48 & -18 & 48 \\ 0 & -48 & -20 & 40 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$(baris 3 dikali dengan 4)

$$= -\left(\tfrac{1}{6}\right).(\tfrac{1}{4})\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -48 & -18 & 48 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$(baris 3 dikurang baris 2)

$$= -\left(\tfrac{1}{6}\right).(6).(\tfrac{1}{4})\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -22 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$(baris 2 dikali 1/6)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & -22 & -3 & 10\end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali 11)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & -88 & -12 & 40\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 4)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 21 & -48\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 2)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right).(-2)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 21 & -48\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali -1/2)

$$= -\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{4}\right).(-2).(3)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 7 & -16\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 1/3)

$$= \left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{2}\right).(3)\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & -3\\ 0 & -88 & -33 & 88\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -44\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 7 kali baris 3)

$$|A_2| = \left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{11}\right).\left(\frac{1}{2}\right).(3).(1).(-88).(1).(-44) = 132$$

Determinan A_3 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B

$$|A_3| = \begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 6 & -3\\ 3 & 0 & 6 & 1\\ 4 & -1 & 2 & -2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 2 & 6 & -3\\ 2 & 1 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 6 & 1\\ 4 & -1 & 2 & -2\end{vmatrix}$$ (menukar baris 1 dan 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 0 & -9 & -22 & 10 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 4 kali baris 1)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & -9 & -22 & 10 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikurang 2 kali baris 2)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang 3 kali baris 2)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{vmatrix} \text{ (baris 3 dikali dengan ½)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \text{ (baris 4 dikurang baris 3)}$$

$$|A_3| = (-2).\ (1).(-3).(2).(-11) = -132$$

Determinan A_4 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 4 dengan B

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ (menukar baris 1 dan 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & -12 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & -12 \\ 0 & -9 & -3 & -22 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 4 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -22 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 3 kali baris 2)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 6 kali baris 3)

$$|A_4| = -(1).(-3).(1).(-22) = -66$$

Sehingga diperoleh :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{66}{66} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{132}{66} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-132}{66} = -2$$
$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-66}{66} = -1$$

Jadi solusi Sistem Persamaan Linier tersebut adalah

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.4.Penerapan Masalah Real

Kasus 1

Ani, Dina, dan Cinta adalah 3 bersaudara. Jumlah usia mereka bertiga adalah 28 tahun. Jumlah usia Ani ditambah 2 tahun dan usia Dina ditambah 3 tahun sama dengan 5 tahun ditambah tiga kali usia Cinta. Dua kali usia Ani dikurangi usia Dina kemudian ditambah usia Cinta sama dengan 13 tahun. Urutkan usia mereka dari yang paling tua.

Misalkan usia Ani $= x$, usia Dina $= y$, dan usia Cinta $= z$

Diperoleh persamaan :

$$\begin{cases} x + y + z = 28 \\ (x+2) + (y+3) = 5 + 3z \\ 2x - y + z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 28 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 13 \end{cases}$$

Ditulis dalam Sistem Persamaan Linier $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Maka $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (baris 2 kurang baris 1)

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ (baris 3 kurang 2 kali baris 1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \text{ (baris 2 ditukar dengan baris 3)}$$

$$|A| = (-).(1).(-3).(-4) = -12$$

Determinan A_1diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B (dengan menggunakan kofaktor)

Maka $|A_1| = \begin{vmatrix} 28 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 13 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (28)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 13\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (28)(1-3) + 13(-3-1)$$

$$|A_1| = (28)(-2) + 13(-4) = -56 - 52 = -108$$

Determinan A_2diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B (dengan menggunakan kofaktor)

Maka $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 28 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 13 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 28 & 1 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -(28-13) + 3(13-56)$$

$$|A_2| = -15 - 129 = -144$$

Determinan A_3 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B (dengan menggunakan kofaktor)

Maka $|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 28 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 13 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 28 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -(13+28) + (13-56)$$

$$|A_3| = -41 - 43 = -84$$

Sehingga diperoleh :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-108}{-12} = 9$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-144}{-12} = 12$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-84}{-12} = 7$$

Urutan usia mulai yang tertua adalah Dina, Ani dan Cinta

Kasus 2

Untuk keperluan konstruksi PT MAJU setiap minggu membeli 4 jenis semen grade A, B, C dan D. Minggu pertama membeli 10 sak semen grade A , 20 sak semen grade B, 10 sak semen grade C dan 10 sak semen grade D dengan jumlah $ 120. Minggu ke dua membeli 20 sak semen grade A , 10 sak semen grade B, 40 sak semen grade C dan 10 sak semen grade D dengan jumlah $ 120. Minggu ketiga membeli 20 sak semen grade A , 10 sak semen grade B, 10 sak semen grade C dan 30 sak semen grade D dengan jumlah $ 190. Minggu keempat membeli 30 sak semen grade A , 10 sak semen grade B, 20 sak semen grade C dan 20 sak semen grade D dengan jumlah $ 190. Akan ditentukan berapa harga masing-masing jenis semen tersebut.

Misalkan semen Grade A= x_1, semen Grade B= x_2 , semen Grade C= x_3 dan semen Grade D= x_4

Dapat ditulis dalam Sistem Persamaan Linier

$$\begin{cases} 10x_1+20x_2 + 10\,x_3 + 10x_4 = 120 \\ 20x_1+10x_2 + \ 40x_3 + 10x_4 = 120 \\ 20x_1+10x_2 + 10\,x_3 + \ 30x_4 = 190 \\ 30x_1+10x_2 + \ 20x_3 + 20x_4 = 190 \end{cases}$$

Menentukan solusi SPL dengan menggunakan Metoda Cramer dilakukan sebagai berikut.

Tulis dalam bentuk persamaan $AX = B$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 20 & 10 & 40 & 10 \\ 20 & 10 & 10 & 30 \\ 30 & 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 120 \\ 120 \\ 190 \\ 190 \end{bmatrix}$$

maka determinan A

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 20 & 10 & 40 & 10 \\ 20 & 10 & 10 & 30 \\ 30 & 10 & 20 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(10 kali baris 1, baris 2 baris 3, baris 4)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang baris 2)}$$

$$= (10)^4.(\tfrac{1}{5}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikali 5)}$$

$$= (10)^4.\left(\tfrac{1}{5}\right).(\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -15 & 3 & 3 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikali 3)}$$

$$= (10)^4.\left(\tfrac{1}{5}\right).(\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang baris 2)}$$

$$= (10)^4.\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{7}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikali 7)}$$

$$= (10)^4.\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{7}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & -21 & 24 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikali 3)}$$

$$= (10)^4.\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{7}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang baris 3)}$$

$$|A| = (10)^4.\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{7}\right).(1).(-15).(-21).(10) = 300.000$$

Determinan A_1 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 1 dengan B

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 120 & 20 & 10 & 10 \\ 120 & 10 & 40 & 10 \\ 190 & 10 & 10 & 30 \\ 190 & 10 & 20 & 20 \end{vmatrix}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 4 & 1 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 19 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(10 kali baris 1, baris 2 baris 3, baris 4)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 19 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikurang baris 1)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 19 & 1 & 1 & 3 \\ 19 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikurang baris 1)}$$

$$=(10)^4\begin{vmatrix}12 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 19 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 3)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 19 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 1 dikali 19)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 228 & 12 & 12 & 36\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 12)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & -26 & -7 & -17\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 1)

$$=(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -85 & -17\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 26 baris 2)

$$=(-\ )(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -85 & -17\end{vmatrix}$$ (tukar baris 3 dan baris 4)

$$=(-\ )(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)\begin{vmatrix}228 & 38 & 19 & 19\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 68\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang 85 baris 3)

$$|A_1| ==(-\ )(10)^4.\left(\frac{1}{19}\right).\left(\frac{1}{12}\right)(228)(-1)(1)(68) = 680.000$$

Determinan A_2 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 2 dengan B

$|A_2| = \begin{vmatrix} 10 & 120 & 10 & 10 \\ 20 & 120 & 40 & 10 \\ 20 & 190 & 10 & 30 \\ 30 & 190 & 20 & 20 \end{vmatrix}$ $=(10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 4 & 1 \\ 2 & 19 & 1 & 3 \\ 3 & 19 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (10 kali baris 1,2,3, dan 4)

$=(10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -1 \\ 2 & 19 & 1 & 3 \\ 3 & 19 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (baris 2 dikurang 2 kali baris 1)

$=(10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 3 & 19 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (baris 3 dikurang 2 kali baris 1)

$=(10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -17 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ (baris 4 dikurang 3 kali baris 1)

$=(10)^4(-\frac{1}{17}) \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 204 & -34 & 17 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -17 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ (baris 2 dikali - 17)

$=(10)^4(-\frac{1}{17})(\frac{1}{12}) \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 204 & -34 & 17 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -204 & -12 & -12 \end{vmatrix}$ (baris 4 dikali 12)

$=(10)^4(-\frac{1}{17})(\frac{1}{12}) \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 204 & -34 & 17 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$ (baris 4 ditambah baris 2)

$=(10)^4(\frac{1}{12}) \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -46 & 5 \end{vmatrix}$ (baris 2 dikali -1/17)

$$=(10)^4(\tfrac{1}{12})(\tfrac{1}{5})\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -60 & 10 & -5\\ 0 & -5 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -46 & 5\end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali 5)

$$=(10)^4(\tfrac{1}{12})(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{12})\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -60 & 10 & -5\\ 0 & -60 & -12 & 12\\ 0 & 0 & -46 & 5\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 12)

$$=(10)^4(\tfrac{1}{12})(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{12})\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -60 & 10 & -5\\ 0 & 0 & -22 & 17\\ 0 & 0 & -46 & 5\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 2)

$$=(10)^4(\tfrac{1}{12})(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{12})(22)\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -60 & 10 & -5\\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{22}\\ 0 & 0 & -46 & 5\end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 1/22)

$$=(10)^4(\tfrac{1}{12})(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{12})(22)(46)\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -60 & 10 & -5\\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{22}\\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{46}\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 1/46)

$$=(10)^4(\tfrac{1}{12})(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{12})(22)(46)\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 1\\ 0 & -60 & 10 & -5\\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{22}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{168}{253}\end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 3)

$$|A_2| = (10)^4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{12}\right)(22)(46)(1)(-60)(-1)\left(\frac{168}{253}\right) = 560.000$$

Determinan A_3 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 3 dengan B

$$|A_3| = \begin{vmatrix}10 & 20 & 120 & 10\\ 20 & 10 & 120 & 10\\ 20 & 10 & 190 & 30\\ 30 & 10 & 190 & 20\end{vmatrix}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \\ 2 & 1 & 19 & 3 \\ 3 & 1 & 19 & 2 \end{vmatrix} \text{(10 kali baris 1,2,3, dan 4)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -3 & -24 & -1 \\ 2 & 1 & 19 & 3 \\ 3 & 1 & 19 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -3 & -24 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 19 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -3 & -24 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang 3 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -3 & -24 & -1 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 3 dikurang baris 2)}$$

$$= (10)^4 (\tfrac{1}{5}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \end{vmatrix} \text{(baris 2 dikali 5)}$$

$$= (10)^4 (\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 2 \\ 0 & -15 & -21 & -3 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikali 3)}$$

$$= (10)^4 (\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -15 & -120 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 2 \\ 0 & 0 & 99 & 2 \end{vmatrix} \text{(baris 4 dikurang baris 2)}$$

$$= (10)^4(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{3})(19)\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -15 & -120 & -5\\0 & 0 & 1 & \frac{2}{19}\\0 & 0 & 99 & 2\end{vmatrix}\text{(baris 3 dikali 1/19)}$$

$$= (10)^4(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{3})(19)(99)\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -15 & -120 & -5\\0 & 0 & 1 & \frac{2}{19}\\0 & 0 & 1 & \frac{2}{99}\end{vmatrix}\text{(baris 4 dikali 1/99)}$$

$$= (10)^4(\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{3})(19)(99)\begin{vmatrix}1 & 2 & 12 & 1\\0 & -15 & -120 & -5\\0 & 0 & 1 & \frac{2}{19}\\0 & 0 & 0 & \frac{-160}{1.881}\end{vmatrix}\text{(baris 4 dikurang baris 3)}$$

$$|A_3| = (10)^4\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(19)(99)(1)(-15)(1)\left(-\frac{160}{1.881}\right) = 1.600.000$$

Determinan A_4 diperoleh dari determinan A dengan mengganti kolom ke 4 dengan B

$$|A_4| = |A| = \begin{vmatrix}10 & 20 & 10 & 120\\20 & 10 & 40 & 120\\20 & 10 & 10 & 190\\30 & 10 & 20 & 190\end{vmatrix} = (10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 12\\2 & 1 & 4 & 12\\2 & 1 & 1 & 19\\3 & 1 & 2 & 19\end{vmatrix}\text{(10 kali baris 1,2,3, dan 4)}$$

$$= (10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 12\\0 & -3 & 2 & -12\\2 & 1 & 1 & 19\\3 & 1 & 2 & 19\end{vmatrix}\text{(baris 2 di kurang 2 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 12\\0 & -3 & 2 & -12\\0 & -3 & -1 & -5\\3 & 1 & 2 & 19\end{vmatrix}\text{(baris 3 dikurang 2 kali baris 1)}$$

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & -12 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang 3 kali baris 1)

$$= (10)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 . (\tfrac{1}{5}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$ (baris 2 dikali 5)

$$= (10)^4 . \left(\tfrac{1}{5}\right) . (\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -15 & -3 & -51 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 3)

$$= (10)^4 . \left(\tfrac{1}{5}\right) . (\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -13 & 9 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 2)

$$= (10)^4 . \left(\tfrac{1}{5}\right) . (\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -39 & 91 \\ 0 & 0 & -13 & 9 \end{vmatrix}$$ (baris 3 dikali 13)

$$= (10)^4 . \left(\tfrac{1}{5}\right) . (\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -39 & 91 \\ 0 & 0 & -39 & 27 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikali 3)

$$= (10)^4 . \left(\tfrac{1}{5}\right) . (\tfrac{1}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -15 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & -39 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{vmatrix}$$ (baris 4 dikurang baris 3)

$$|A_4| = (10)^4 . \left(\tfrac{1}{5}\right) . \left(\tfrac{1}{3}\right) , (1) . (-15) . (-39) . (64) = 24.960.000$$

Maka $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{680.000}{300.000} = 2.27$

$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{560.000}{300.000} = 1.87$

$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1.600.000}{300.000} = 5.33$

$x_4 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{24.960.000}{300.000} = 83.1$

Jadi harga semen grade A adalah $2.27, semen grade B adalah $1.87, semen grade C adalah $5.33 dan semen grade D adalah $83.1

DAFTAR PUSTAKA

[1] Zuhri, "Analisis Regresi Linier dan Korelasi menggunakan Pemrograman Visual Basic," *J. Ilman J. Ilmu Manaj.*, 2020.

[2] N. Nurmalasari, Y. Yanita, and I. M. Arnawa, "FAKTORISASI MATRIKS," *J. Mat. UNAND*, 2019.

[3] F. M. S. M. Fransiskus Fran, "BEBERAPA SIFAT KRONECKER PRODUCT," *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, 2019.

[4] M. Mahyudi and E. Endaryono, "LEARNING OBSTACLES KONSEP OPERASI BARIS ELEMENTER," *Indiktika J. Inov. Pendidik. Mat.*, 2020.

[5] E. J. Solaiman, "Modifikasi Metode Gauss atau Operasi Baris Elementer pada Solusi Sistim Persamaan Linier 3 Variabel dan 3 Persamaan," *TeIKa*, 2016.

[6] M. R. Nur and D. Rolliawati, "Prototipe Aplikasi Penghitung Matrik Berbasis Java," *Syst. Inf. Syst. Informatics J.*, 2018.

[7] Z. Zaini, "Model Penyelesaian Determinan Matriks dengan Metode Eliminasi Gauss Melalui Matrix Laboratory (MATLAB)," *JST (Jurnal Sains Ter.*, 2017.

[8] WAHIDA, "APLIKASI METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN DAN METODE DEKOMPOSISI CROUT PADA SISTEM PERSAMAAN LINEAR NON HOMOGEN DALAM MENENTUKAN JUMLAH KENDARAAN ARUS LALU LINTAS. STUDI KASUS: (JALAN PROTOKOL A.P PETTARANI MAKASSAR)," *Univ. Islam NEGERI ALAUDDIN*, 2017.

[9] U. Azmi, R. Yuliastuti, and K. Oktafianto, "PENDEKATAN FUNGSI POLYNOMIAL DARI BENDA PUTAR DENGAN METODE ELIMINASI GAUSS JORDAN," *Limits J. Math. Its Appl.*, 2016.

[10] A. N. Rahma, R. Rahmawati, and W. Wahyuni, "Metode Eliminasi Gauss untuk Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier," *J. Sains Mat. dan Stat.*, 2020.

[11] S. Adnan and R. Anugrahwaty, "Implementasi Metode Eliminasi Gauss Pada Rangkaian Listrik Menggunakan Matlab Software," *JITEKH (Jurnal Ilm. Teknol. Harapan)*, 2017.

[12] Y. Herlambang, "PERHITUNGAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN METODE LEAST SQUARE DAN ELIMINASI GAUSS DALAM PEMROGRAMAN PASCAL 7.00," *EKUITAS (Jurnal Ekon. dan Keuangan)*, 2016.

[13] R. S. A. Nugroho, "Analisis Kesalahan dalam Menyelesaikan Soal Cerita Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel pada Siswa Kelas X MAN 1 Sukoharjo Tahun Ajaran 2017/2018," *J. Educ.*, 2019.

[14] N. Y. Cahaya, "Hukum Ohm dan Hukum Kirchoff," *J. Prakt. Elektron. Dasar*, 2019.
[15] A. Nugraha, I. K. Werdhiana, and I. W. Darmadi, "Rangkaian listrik arus searah," *J. Pendidik. Fis. Tadulako*, 2001.
[16] A. Nugraha, I. K. Werdhiana, and I. W. Darmadi, "DESKRIPSI KONSEPSI SISWA SMA TENTANG RANGKAIAN LISTRIK ARUS SEARAH," *JPFT (Jurnal Pendidik. Fis. Tadulako Online)*, 2014.
[17] Ilhamsyah, Helmi, and F. Fran, "Determinan dan Invers Matriks Blok 2 x 2," *Bul. Ilm. Math. Stat. dan Ter.*, 2017.
[18] A. S. Nur, "KONSEP DETERMINAN PADA MATRIKS NONBUJUR SANGKAR," *MAGISTRA J. Kegur. dan Ilmu Pendidik.*, 2014.
[19] B. Putri Herviani, R. Budhiati Veronica, I. Artikel, and S. Artikel, "ENENTUAN NILAI EIGEN SUATU MATRIKS DENGAN METODE PANGKAT (POWER METHOD)," *UJM*, 2020.
[20] C. Farris, T. A. Treat, R. J. Viken, and R. M. McFall, "{D}ecoding women�s sexual intent," *Psych. Sci.*, 2008.
[21] Y. S. Sari and N. N. Bakar, "DETERMINAN MATRIKS 2 × n," *J. Mat. UNAND*, 2019.
[22] A. N. Rahma and Z. Aqilah, "DETERMINAN MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF," *J. Sains Mat. dan Stat.*, 2021.

INDEKS

x_i	variable bebas ke $i = 1,2,\ldots,n$
a_{ij}	elemen baris ke $i = 1,..,m$; dan kolom ke $j = 1,..,n$
$A\,,B$	matriks
$AX = B$	Sistem Persamaan Linier
X	solusi Sistem Persamaan Linier
OBE	Operasi Baris Elementer
$[A\|B]$	matriks lengkap A dan B
$A_{m\times n}$	matriks berukuran m x n
$A_{n\times n}$	matriks berukuran n x n
A^{-1}	invers matriks A
I_n	matriks Identitas n x n
A^T	Transpose dari matriks A
$A^T = A$	matriks simetri A
$\|A\|$	Determinan dari A
c_{ij}	kofaktor baris ke i dan kolom ke j
M_{ij}	minor dari bari ke I dan kolom ke j
$adj\ A$	adjoint dari matriks A
$\|A_j\|$	determinan dengan mengganti kolom ke j dengan
i	arus listrik
R	resitensi
$E = iR$	tegangan (hukum Ohm)

Monograf Sistem Persamaan Linier n Variabel

ORIGINALITY REPORT

9%	8%	2%	2%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	repository.uin-suska.ac.id Internet Source	1%
2	edoc.pub Internet Source	1%
3	adoc.pub Internet Source	1%
4	www.slideshare.net Internet Source	1%
5	mahdastain.blogspot.com Internet Source	1%
6	id.wikipedia.org Internet Source	1%
7	123dok.com Internet Source	<1%
8	schorsch.efi.fh-nuernberg.de Internet Source	<1%
9	www.scribd.com Internet Source	<1%
10	eprints.unm.ac.id Internet Source	<1%

11	www.gusblog.com Internet Source	<1 %
12	docplayer.info Internet Source	<1 %
13	studfile.net Internet Source	<1 %
14	www.profematika.com Internet Source	<1 %
15	text-id.123dok.com Internet Source	<1 %
16	Submitted to Universitas Dian Nuswantoro Student Paper	<1 %
17	fr.scribd.com Internet Source	<1 %
18	dokumen.pub Internet Source	<1 %
19	idoc.pub Internet Source	<1 %
20	aditmilan.wordpress.com Internet Source	<1 %
21	informatika.stei.itb.ac.id Internet Source	<1 %
22	pistunovi.inf.ua Internet Source	<1 %
23	repository.unikom.ac.id Internet Source	<1 %

24	nanopdf.com Internet Source	<1 %
25	share.its.ac.id Internet Source	<1 %
26	Submitted to Babes-Bolyai University Student Paper	<1 %
27	Submitted to North West University Student Paper	<1 %
28	www.antivirus-shop.de Internet Source	<1 %
29	www.docstoc.com Internet Source	<1 %
30	Submitted to University of Edinburgh Student Paper	<1 %

Exclude quotes On
Exclude bibliography On
Exclude matches < 15 words